

Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διονύσιος Α. Αναπολιτάνος

Η εικασία στις επιστήμες

Ο χώρος των μαθηματικών διακρίνεται από τους λοιπούς επιστημονικούς χώρους (αποτελώντας συγχρόνως την γνωσιακή βάση εκκίνησής τους) εξαιτίας του γεγονότος ότι θεμελιώδες χαρακτηριστικό του δεν είναι η σπουδή και η μελέτη της φύσης, της κοινωνίας, της ιστορίας και, γενικώς, των υπαρχόντων και τεκταινομένων στον εμπειρικό μας κόσμο, αλλά η ανακάλυψη (και όχι η εφεύρεση) της προϋπάρχουσας δομής των ποσοτικών αποτιμήσεων όλων των πλευρών του φαίνεσθαι. Είναι, δηλαδή, τα μαθηματικά, ως χώρος, και τα μαθηματικά, ως δραστηριότητα, ανεξάρτητα, υπό μία συγκεκριμένη έννοια, από την εμπειρική πραγματικότητα, αποτελώντας την γλώσσα, στο πλαίσιο της οποίας λαμβάνει χώρα μία σχετικώς ακριβής (με την έννοια του σεβασμού των προσεγγίσεων) εξεικόνιση του εμπειρικώς υπαρχτού. Η ανεξαρτησία αυτή των μαθηματικών από την εμπειρική πραγματικότητα είναι υπεύθυνη για την επιστημονική αυτάρκεια που τα διακρίνει, με την έννοια ότι το δίπολο θεωρία – πράξη ή, καλύτερα, το δίπολο θεωρία – πείραμα δεν αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό τους. Αυτό σημαίνει ότι οι αλήθειές τους δεν κατοχυρώνονται από την αντιστοιχία θεωρίας και πειράματος, όπως αυτό, κατεξοχήν, συμβαίνει στις θετικές εμπειρικές επιστήμες, αλλά από την παραγωγή με εσωτερικές αυστηρές διαδικασίες αποδειξιμότητας (που συνοδεύονται από αντιστοιχείς διαδικασίες επαληθευσμάτητας) των αληθειών αυτών, με την μορφή προκυπτόντων θεωρημάτων από προκείμενες πρώτες αρχές, οι οποίες κατατίθενται και παίζουν τον ρόλο των αξιωμάτων. Έτοι, η έννοια του «πειράματος», με την μορφή της εργαστηριακής ή άλλης εμπειρικής επιβεβαίωσης ή και ανακάλυψης ενός συγκεκριμένου θεωρητικού πλαισίου, δεν βρίσκει πρόσφορο έδαφος στα χωράφια των μαθηματικών. Παρά ταύτα, υπάρχει μία έννοια «πειράματος» που θα εξετάσουμε στην συνέχεια, η οποία παίζει κυριαρχικό ρόλο στην ανακάλυψη άγνωστων μαθηματικών αληθειών. Συνεπικουρείται από την έννοια της «εικασίας», διά της οποίας τροφοδοτείται όλος ο χώρος των μαθηματικών με ανοικτά ερωτήματα, με επακόλουθο, πολλές φορές, έναν φρενήρη αγώνα δρόμου για την εύρεση σχετικών απαντήσεων σε αυτά.

Τι είναι ακριβώς η «εικασία» (conjecture) στα μαθηματικά; Πώς θα μπορούσε να ορισθεί; Εικασία είναι, συνήθως, ένα ανοικτό ερώτημα που τίθεται προς απάντηση με την μορφή μιας μη ερωτηματικής πρότασης. Ας δούμε ένα παράδειγμα: Η περίφημη εικασία του Goldbach έχει την εξής απλούστατη διατύπωση: «Κάθε άρτιος φυσικός αριθμός είναι το άθροισμα δύο πρώτων φυσικών αριθμών». Η εικασία αυτή δεν διατυπώνεται ερωτηματικά, παρ' ότι υποκρύπτεται και υπονοείται η ερώτηση περί της αληθειακής ισχύος της συγκεκριμένης εικασίας. Με τον καταφατικό τρόπο διατύπωσής της εκφράζεται η επιθυμία του αρχικώς εικάζοντος για θετική τελική απάντηση στο προφανές ερώτημα περί της ισχύος αυτής. Η έκφραση της συγκεκριμένης επιθυμίας δεν επηρεάζει το πιθανό ποθούμενο αποτέλεσμα, ή το αντίθετό του, που είναι δυνατόν να πάρει ή μάλλον να πάρουν αρκετό χρόνο για να (πάντα αποκλειστικώς διαζευκτικά) κάνουν την εμφάνισή τους.

Η συζήτηση μας, όμως, θα μπορούσε να είχε ξεκινήσει με μία μικρή προσέγγιση στον χώρο των φυσικών επιστημών, καθώς σε αυτόν ενδημεί η έννοια του «πειράματος» (με κυρίαρχο στοιχείο το χαρακτηριστικό της εργαστηριακής επαναληψιμότητας) και καθώς σε αυτόν παρεισφρέει πλαγίως η έννοια της «εικασίας». Τι είναι ακριβώς η εικασία στις επιστήμες της φύσης και ποιος είναι ο ρόλος της στην διαμόρφωση του αντιστοίχου γνωσιολογικού τοπίου; Οι εικασίες στις φυσικές επιστήμες εμφανίζονται με την μορφή θεμελιώδων γενικευτικών υποθέσεων και, ως διατυπώσεις, εκφράζονται, συνήθως, με μη ερωτηματικό τρόπο, δηλαδή με καταφατικό τρόπο. Είναι κοντολογίς ένα είδος αξιωμάτων βάσης που τίθενται για να στηρίξουν το αντίστοιχο γνωσιολογικό οικοδόμημα, υπό την αίρεση πάντοτε της πιθανής και ανοικτής στο μέλλον εμπειρικής διαφεύσιμότητας και αναίρεσής των. Έτσι, σε περιόδους, ιδιαιτέρως ομαλές, της επιστημονικής δραστηριότητας, είναι δυνατόν να παίξουν (και συνήθως τον παίζουν) τον ρόλο του οδηγού για περαιτέρω εμπειρική έρευνα.¹ Επειδή η φυσική είναι η πλέον παραδειγματική εκ των επιστημών της φύσης και αυτή στην οποίαν προστρέχουν σχεδόν άπαντες για άντληση αποδεικτικού υλικού (που σχετίζεται με τα βασικά γνωσιολογικά χαρακτηριστικά της εξεικόνισης του φυσικού μας κόσμου), θα αναφερθούμε σε μία ενδιαφέρουσα περίπτωση εικασίας που, με την μορφή, προς επιβεβαίωση ή διάφευση, θεμελιώδους αξιώματος, χαρακτήρισε συγκεκριμένη περίοδο ανάπτυξης της γνώσης μας για την φύση. Είναι σε όλους γνωστή η κυριαρχήσασα κατά τον 19ο αιώνα και, τελικώς, διαφεύσθείσα και απορριφθείσα, θεμελιώδης εικασία περί

1. Βλ., για παράδειγμα, T. S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, Συκάριο 1962· K. R. Popper, *Conjectures and Refutations. The Growth of Scientific Knowledge*, Routledge and Kegan Paul, Λονδίνο 1963.

της ύπαρξης του αιθέρος. Είναι, πιθανώς, λιγότερο γνωστό ότι η εικασία αυτή είχε ως μήτρα προέλευσής της την ιδεολογικά φορτισμένη και τελικώς λανθασμένη αρχική πίστη του έλλογου όντος ότι οι διαταραχές ηλεκτρομαγνητικής, ή όποιας άλλης φύσεως, απαιτείται να μεταδίδονται όχι εν κενώ αλλά διά ενός μέσου ευαίσθητου στην μεταφορά τέτοιων διαταραχών. Η ιστορία της φυσικής είναι γεμάτη με τέτοιες τελικώς διαφευσθείσες εικασίες καθώς και με εικασίες που εξακολουθούν να είναι γνωσιολογικά κυρίαρχες. Μία τέτοια εικασία, ένα τέτοιο αξίωμα, για την σύγχρονη φυσική αποτελεί η -μη διαφεύσισα μέχρι τώρα- παραδοχή ότι η ταχύτητα του φωτός αποτελεί μία ανεξάρτητη, από οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς, σταθερά. Αξίζει τον κόπο να παραθέσουμε ένα ακόμη παράδειγμα εικασίας (κυρίαρχης στην προκειμένη περίπτωση) που συναντά κανείς, όμως, πέραν του χώρου της φυσικής. Το τρίτο μας παράδειγμα, λοιπόν, εικασίας, και μάλιστα μέχρι τώρα μη διαφευσθείσας, προέρχεται από τον χώρο της βιολογίας. Δεν είναι άλλο από της ρηγικέλευθης, διαρβίνειας υπόθεσης-εικασίας της φυσικής επιλογής. Σύμφωνα με τον Charles Darwin, τα βιολογικά συστήματα μεταβάλλονται και διαφοροποιούνται κάτω από συνθήκες ελεγχόμενης τυχαιότητας, με την έννοια ότι η επιβίωση των έτοι μεταλλασσόμενων νέων οργανισμών υπόκειται σε διαδικασίες φυσικής επιλογής. Όσοι οργανισμοί μεταλλάσσονται έτοι ώστε να ευνοούνται από το περιβάλλον επιβιώνουν και συμβάλλουν στην συνέχιση του παιγνίου της τυχαιότητας και της φυσικής επιλογής. Όσοι μεταλλάσσονται έτοι ώστε να μην ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις του περιβάλλοντός τους εξαφανίζονται. Η διαρβίνεια υπόθεση δεν έχει ακόμα διαφεύσει. Τουναντίον, οι επιβεβαιώσεις της και ο διαρβινισμός ως άποψη (με σύγχρονο πλέον ένδυμα) αποτελούν κυρίαρχο χαρακτηριστικό της σύγχρονης βιολογίας. Δεν είναι μόνον η μελέτη του βιολογικού παρελθόντος που βρίθει επιβεβαιωτικών χαρακτηριστικών της διαρβίνειας υπόθεσης, είναι κυρίως οι αλματώδεις εξελίξεις στην γονιδιακή μελέτη των βιολογικών συστημάτων που την καθιστούν κυρίαρχη και έχουν συμβάλει προς την κατεύθυνση του να θεωρείται η βιολογία ως η κυρίαρχη εμπειρική επιστήμη του 21ου αιώνα.

Η έννοια της «εικασίας» δεν έχει ως προνομιακό χώρο εμφάνισή της μόνον αυτόν των μαθηματικών ή των φυσικών επιστημών. Ανιχνεύεται σχεδόν παντού. Έτσι, ο χώρος των κοινωνικοοικονομικών επιστημών φιλοξενεί, επίσης, την έννοια και η «εικασία» αποτελεί, μεταξύ άλλων, ευρετικό μεθοδολογικό εργαλείο ανίχνευσης χρήσιμων για την περιοχή γενικεύσεων. Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα διαδικασίας, όπου η «εικασία» χρησιμοποιείται όχι καθαρώς επαγγελματικά αλλά, μάλλον, παραγωγικά. Ας υποθέσουμε ότι, στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης αντίληψης του οικονομικού γίγνεσθαι, η πρόταση «οι άνθρωποι επιδιώκουν την απόκτηση όλο και μεγαλύτερης οικονομι-

κής ισχύος» υιοθετείται με απότερο στόχο την διαμόρφωση μιας οικονομικής θεωρίας, όπου η ύπαρξη κινήτρων μεγιστοποίησης της ατομικής οικονομικής αφέλειας αποτελεί τον ακρογωνιαίο της θεμέλιο λίθο. Η αποδοχή της συγκεκριμένης πρότασης λειτουργεί αξιωματικά ως αποδοχή μιας προς διερεύνηση εικασίας, ως αποδοχή, δηλαδή, μιας ισχυρής υπόθεσης εργασίας, που είναι αξιωματικά θεμελιώδης αλλά και ανοικτή σε επαλήθευση ή διάφευση. Η συνέχεια μπορεί να είναι εξαιρετικώς ενδιαφέρουσα. Η συγκεκριμένη πρόταση είναι δυνατόν να καταστεί (μόνη της ή σε συνδυασμό και με άλλες) η μήτρα παραγωγής θεωρημάτων οικονομικού χαρακτήρα, συνεπειών, δηλαδή, που είναι επίσης δυνατόν να παραχθούν με τυπικές συμπερασματικές μεθόδους, με μεθόδους, δηλαδή, που προσιδίζουν σε μαθηματικοποιημένες περιοχές της τυπικής λογικής. Στην συνέχεια, καθένα από τα παραχθέντα θεωρήματα είναι δυνατόν να υποστεί την βάσανο του εμπειρικού ελέγχου, επιτρέποντας, έτσι, τον έμμεσο εμπειρικό έλεγχο της μητρικής πρότασης. Αν ο εμπειρικός αυτός έλεγχος οδηγήσει σε ανατροπή ή διάφευση κάποιου ή κάποιων εκ των θεωρημάτων, τότε η μητρική πρόταση και αυτές που, πιθανώς, την συνόδευσαν είτε απορρίπτονται είτε τροποποιούνται καταλλήλως, αν κάτι τέτοιο είναι εμπειρικά επιτρεπτό. Αν από την άλλη μεριά ο εμπειρικός έλεγχος του ή των θεωρημάτων αυτών οδηγήσει σε σειρά επιβεβαιώσεων, χωρίς εξαιρέσεις, τότε η μητρική πρόταση και αυτές που, πιθανώς, την συνόδευσαν αποκτούν το status του (μέχρις εκείνη την στιγμή και έως μελλοντικής εμπειρικής αποδείξεως του εναντίου) προνομιακού αξιωματικού πλαισίου διαμόρφωσης μίας πολύ συγκεκριμένης, πλέον, αξιωματικής οικονομικής θεωρίας. Η περιγραφέσα διαδικασία και η αντίστοιχη εξετασθείσα παραδειγματική περίπτωση δεν έχουν χαρακτηριστικά επαγωγικής υιοθεσίας υποθέσεων και εικασιών ως αξιωμάτων, αλλά χαρακτηριστικά παραγωγικής διαδικασίας και εμμέσου εμπειρικού ελέγχου, αποδοχής υποθέσεων και εικασιών υπό συνεχή και αδιάκοπη αμφισβήτηση, με μότο και κατευθύνουσα αρχή, την αποδοχή θεωρητικού ή θεωρητικών πλαισίων ισχυουσών «μέχρις αποδείξεως του εναντίου».

Η παραπάνω περιγραφέσα διαδικασία, όπως ήδη ελέχθη, αναφέρεται στον τρόπο εύρεσης των βασικών αρχών – αξιωμάτων της συγκεκριμένης επιστημονικής περιοχής. Παρά ταύτα, είναι ευκόλως γενικεύσιμη και, επιπλέον, είναι ημι-επαγωγικού και, μάλλον, παραγωγικού χαρακτήρα, με την έννοια ότι οι τελικώς υιοθετούμενες αρχές και τα αντίστοιχα αξιώματα ανακαλύπτονται διά νοητικών αλμάτων, τα οποία έχουν τον χαρακτήρα γιγαντιαίων ασυνεχειών. Τα υιοθετούμενα αυτά αξιώματα υποβάλλονται σε έμμεσο εμπειρικό έλεγχο, με την έννοια ότι, αφού, με λογικές συμπερασματικές διαδικασίες, παραχθούν από αυτά νέες προτάσεις – θεωρήματα, αυτές οι νέες προτάσεις υποβάλλονται σε έλεγχο, είτε με εμπειρικές διαδικασίες επαληθευσμότητας, είτε με εμπει-

ρικές διαδικασίες διαψευσμότητας, οι οποίες σε επίπεδο αποτελεσματικότητας είναι ανοικτών οριζόντων. Είτε, δηλαδή, ο εμπειρικός αυτός έλεγχος οδηγεί σε οριστική απόρριψη συγκεκριμένης ή συγκεκριμένων προτάσεων – θεωρημάτων, με αποτέλεσμα την ολική ή μερική απόρριψη και τροποποίηση του υιοθετηθέντος αξιωματικού πλαισίου, είτε οδηγεί σε προσωρινή (και μέχρις αποδείξεως του εναντίου) εμπειρική αποδοχή των συγκεκριμένων προτάσεων – θεωρημάτων και, κατ' ακολουθίαν, σε προσωρινή (και μέχρις αποδείξεως του εναντίου) αποδοχή του ίδιου αυτού υιοθετηθέντος αξιωματικού πλαισίου. Στο σημείο αυτό είναι απαραίτητο να επισημανθεί ότι η εικόνα του «νοητικού πειράματος», ως συνοδεύουσα αυτήν της «εικασίας», δεν έχει τα λειτουργικά χαρακτηριστικά της αντίστοιχης της έννοιας, όπως αυτή ή αυτές συναντώνται στα μαθηματικά ή στις φυσικές επιστήμες. Κοντολογίς, η έννοια του «νοητικού πειράματος» στην περιοχή των κοινωνικοοικονομικών επιστημών έχει έναν σχετικά δυσπρόσιτο χαρακτήρα και, εν πάσει περιπτώσει, η εξέτασή της εκφεύγει των ορίων του παρόντος άρθρου.

Η εικασία στα μαθηματικά

Ας επιστρέψουμε, όμως, στην έννοια της «εικασίας» στα μαθηματικά. Χρησιμοποιήσαμε ήδη το παράδειγμα της εικασίας του Goldbach για να καταδείξουμε την ύπαρξη συγκεκριμένων χαρακτηριστικών της κλασικής έννοιας της «εικασίας», όπως αυτό της καταφατικής και όχι της ερωτηματικής διατύπωσής της, η οποία, όμως, εκφράζει προδιάθεση του εικάζοντος και όχι χαρακτηριολογικό στοιχείο του εικαζόμενου ως, πιθανώς, αληθούς. Αν κανείς αγνοήσει αυτό το όχι ουσιώδες χαρακτηριστικό των εικασιών, θα μπορούσε, επί παραδείγματι, να συμπεριλάβει στον χώρο όλα τα μεγάλα συνολοθεωρητικά ερωτήματα, που ταλάνισαν ιδιαίτερως τους μαθηματικούς τα πρώτα περίπου εβδομήντα χρόνια του 20ού αιώνα. Το κορυφαίο, ίσως, παράδειγμα τέτοιου συνολοθεωρητικού ερωτήματος είναι το σχετιζόμενο με το Αξίωμα Επιλογής. Το Αξίωμα Επιλογής είναι μια συνολοθεωρητική πρόταση, της οποίας το ανεξαρτησιακό ή μη status, ως προς τα υπόλοιπα αξιώματα της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων, απετέλεσε κορυφαίο σημείο συζήτησης των επιφανέστερων θεμελιώτων της λογικής και της θεωρίας συνόλων του προηγούμενου αιώνα. Σύμφωνα με την πλέον γνωστή διατύπωσή του, το Αξίωμα Επιλογής, δεδομένης μίας οικογένειας ξένων μεταξύ τους συνόλων, εγγυάται την ύπαρξη ενός συνόλου που αποτελείται από εκείνα ακριβώς τα στοιχεία, έτσι ώστε, πρώτον, καθένα τους να ανήκει ήδη σε κάποιο σύνολο της αρχικής οικογένειας και, δεύτερον, η τομή του συνόλου αυτού με καθένα από τα σύνολα της αρχικής οικογένειας να είναι

ένα μονοσύνολο. Το Αξίωμα Επιλογής είναι ένα αξίωμα που, ενώ εμφανίζει μια προφάνεια, αν εξετασθεί επιστημένως, οδηγεί σε βαθύτατα επιστημολογικά προβλήματα. Ουσιαστικά διά αυτού υιοθετείται η ύπαρξη όχι μόνον δυνατότητας αλλά πραγματικής επιλογής χωρίς, ως προϋπόθεσή της, να εξασφαλίζεται σχετικός αλγόριθμος ή επαρκώς περιγράψιμη διαδικασία που να οδηγεί σε αυτήν.

Είναι, πλέον, γνωστό ότι ούτε το Αξίωμα Επιλογής ούτε η άρνησή του αποδεικνύεται από τα υπόλοιπα αξιώματα της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων. Θεωρούμενο το Αξίωμα Επιλογής ως κορυφαία εικασία της θεωρίας συνόλων, έχει, πλέον, ως οριστική απάντησή του, το γεγονός όχι μόνον της μη αποδεξιμότητας του ίδιου αλλά και της άρνησής του από τα υπόλοιπα αξιώματα της θεωρίας. Αυτό σημαίνει ότι, πρώτον, αποκλειστικά είτε αυτό είτε η άρνησή του είναι δυνατόν να προστεθούν στα υπόλοιπα αξιώματα χωρίς να τα καταστήσουν αντιφατικά (ή καλύτερα μη συνεπή), αν αυτά δεν είναι ήδη αντιφατικά (ή καλύτερα μη συνεπή), και δεύτερον, από μοντελοθεωρητική άποψη, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, μοντέλο της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων που καθιστά το Αξίωμα Επιλογής αληθές και ένα, τουλάχιστον, μοντέλο² της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων που καθιστά την άρνηση του Αξιώματος Επιλογής αληθή.

Ένα δεύτερο, επίσης, κορυφαίο, συνολοθεωρητικό παράδειγμα ερωτήματος – εικασίας αποτελεί αυτό που εμπεριέχεται στην διατύπωση της «Υπόθεσης του Συνεχούς».³ Σύμφωνα με την συγκεκριμένη υπόθεση, το σύνολο των υποσυνόλων του συνόλου των φυσικών αριθμών έχει πληθυκότητα, η οποία αντιστοιχεί διατακτικά στον αριθμός επόμενο (μη αριθμήσιμο πληθάριθμο) του αριθμήσιμου πληθάριθμου, που αντιστοιχεί στην πληθυκότητα του συνόλου των φυσικών αριθμών. Μία άλλη ισοδύναμη διατύπωση της Υπόθεσης του Συνεχούς, που έχει το πλεονέκτημα να αναφέρεται σε γνωστές μαθηματικές οντότητες και να διαθέτει, επομένως, ένα πρόσθετο στοιχείο οικειότητας για τον μαθηματικά μυημένο αναγνώστη, είναι η ακόλουθη: Μεταξύ του συνόλου των φυσικών και του συνόλου των πραγματικών αριθμών, δεν υπάρχει ενδιάμεσο υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών με πληθυκότητα καθαρά μεγαλύτερη αυτής του συνόλου των φυσικών αριθμών και καθαρά μικρότερη αυτής του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

2. Για την έννοια του «μοντέλου», βλ. Δ. Α. Αναπολιτάνος, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, Νεφέλη, Αθήνα 1985· H. B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press, Νέα Υόρκη και Λονδίνο 1970· E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand Reinhold Co., Νέα Υόρκη 1964.

3. Για περαιτέρω μελέτη, βλ. H. B. Enderton, *Elements of Set Theory*, Academic Press, Νέα Υόρκη 1977.

Το αρχετά τεχνικό αυτό συνολοθεωρητικό ερώτημα – εικασία απασχόλησε για μεγάλο διάστημα κορυφαίους μαθηματικούς του 20ού αιώνα. Όπως και στην περίπτωση του Αξιώματος Επιλογής, το πρόβλημα που κυριαρχούσε ήταν αυτό της σχέσης της Υπόθεσης του Συνεχούς με τα αξιώματα της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων. Θα μπορούσε η συγκεκριμένη υπόθεση να αποδειχθεί ως προκύπτουσα από τα αξιώματα αυτά; Αν όχι, θα ήταν τότε δυνατόν η άρνησή της να προκύπτει ως θεώρημα του συγκεκριμένου αξιωματικού συστήματος; Οι απαντήσεις και στα δύο αυτά ερωτήματα είναι γνωστό, πλέον, ότι είναι αρνητικές. Όπως και στην περίπτωση του Αξιώματος Επιλογής, αυτό σημαίνει ότι, πρώτον, αποκλειστικά είτε η Υπόθεση του Συνεχούς είτε η άρνησή της είναι δυνατόν να προστεθούν στα υπόλοιπα αξιώματα της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων χωρίς να την καταστήσουν αντιφατική (ή, καλύτερα, μη συνεπή) και, δεύτερον, από μοντελοθεωρητική άποψη, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, μοντέλο της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων που καθιστά την Υπόθεση του Συνεχούς αληθή και ένα, τουλάχιστον, μοντέλο της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων που καθιστά την άρνηση της Υπόθεσης του Συνεχούς αληθή.

Η αντιμετώπιση των εικασιών στα μαθηματικά λαμβάνει χώρα στο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας. Οι εκδοχές απάντησης σε αυτές εξαρτώνται από την ίδια την φύση του μαθηματικού εγχειρήματος, που συναρθρώνται και συναποτελείται από παράγοντες δυσκολίας, οι οποίοι αποτελούν συνάρτηση, αφενός, της φύσης και δομής κάθε εικασίας ξεχωριστά και, αφετέρου, της ύπαρξης ή δημιουργίας εργαλείων επίλυσης των προβλημάτων που ανακύπτουν. Είναι, έτσι, σχεδόν προφανές ότι η επιλυσμότητα των ανακυπτόντων προβλημάτων καθώς και η τελική ή μη τελική απάντηση στην εκάστοτε παρούσα και ενδιαφέρουσα μαθηματική εικασία εξαρτώνται και από την μαθηματική δομή της και από την εργαλειακή και μαθηματική ωριμότητα της εποχής στην οποία η συγκεκριμένη εικασία εμφανίζεται ως ανοικτό ερώτημα.

Μία ταξινόμηση των εικασιών στα μαθηματικά, με κριτήριο την ύπαρξη (ή απλώς την δυνατότητα ύπαρξης) απάντησης σε αυτές ακολουθεί αμέσως παρακάτω:

α. Εικασίες ακόμη ανοικτές ως προς την αποδεξιμότητά τους ή όχι. Η μη ύπαρξη απάντησης είναι δυνατόν να έχει, εκάστοτε, συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα και, ως απάντηση, είναι δυνατόν να αφορά και την πιθανή αποδεξιμότητα της άρνησής τους.

β. Εικασίες με θετική έκβαση ως προς την αποδεξιμότητά τους.

γ. Εικασίες που αποδεικνύονται λανθασμένες, με την έννοια ότι τελικώς αποδεικνύονται ως ισχύουσα, στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου αξιωματικού στήματος, η άρνησή τους.

δ. Εικασίες που αποδεικνύεται ότι ούτε αυτές ούτε οι αρνήσεις τους είναι δυνατόν να αποδειχθούν στο πλαίσιο ενός συστήματος αξιωμάτων.

Η απόδειξη της αδυναμίας απόδειξης μίας εικασίας και της άρνησής της λαμβάνει, συνήθως, χώρα στο μεταθεωρητικό πλαίσιο, στο πλαίσιο δηλαδή της μεταγλώσσας, όπου περιγράφονται οι εκάστοτε συγχεκριμένες μαθηματικές θεωρίες ως αυτούσια αντικείμενα μελέτης και όπου, με τρόπο ουσιώδη, εξετάζονται και οι συντακτικές και οι σημασιολογικές πλευρές των μαθηματικών θεωριών. Στο μεταθεωρητικό – μεταγλωσσικό πλαίσιο ανήκουν οι έννοιες της «απόδειξης» και της «ικανοποιησιμότητας» ή «επαληθευσιμότητας», και έχουν αποδειχθεί για τις πρωτοβάθμιες γλώσσες σημαντικά θεωρήματα ή, μάλλον, μεταθεωρήματα, όπως αυτά της πληρότητας και της μη πληρότητας του Kurt Gödel.⁴ Ας σημειωθεί ότι το μεταθεωρητικό της πληρότητας αποτελεί την εγγύηση της ποθούμενης ισοδυναμίας μεταξύ των διαδικασιών της αποδειξιμότητας και επαληθευσιμότητας στις πρωτοβάθμιες γλώσσες.

Το πείραμα στα μαθηματικά

Ένα βασικό εναρκτήριο πρόβλημα το οποίο τίθεται, συνήθως, όταν επιχειρείται ο καθορισμός του γνωσιακού πλαισίου ενός επιστημονικού κλάδου ή μιας ευρύτερης επιστημονικής περιοχής, είναι αυτό του εντοπισμού και της καταγραφής, αφενός, των χαρακτηριολογικών συνιστώσων και, αφετέρου, των θεμελιωδών διαδικασιών κατοχύρωσης και ελέγχου είτε των γενικών αρχών και αξιωμάτων του, είτε των προκυπτόντων από αυτά θεωρημάτων με χρήση συγχεκριμένων αποδεικτικών κανόνων. Στις επιστήμες της φύσης τον ρόλο των θεμελιωδέστερων διαδικασιών κατοχύρωσης και ελέγχου των παίζουν οι λεγόμενες «πειραματικές διαδικασίες». Αυτές αποτελούν το εργαλείο επαληθευσης γενικών αρχών και αξιωμάτων. Είναι, δηλαδή, εμπειρικά στηρίγματα του εκάστοτε συγχεκριμένου θεωρητικού πλαισίου της αντίστοιχης επιστήμης: εμπειρικά στηρίγματα τα οποία έχουν πληροφοριακό περιεχόμενο, εφόσον το εκάστοτε συγχεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο είναι δυνάμει διαφεύσιμο και όχι ταυτολογικά αληθές.⁵ Αυτή η δυνάμει διαφεύσιμότητα του θεωρητικού πλαι-

4. Βλ., Αναπολιτάνος, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*. Enderton, *Elements of Set Theory*; Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*; Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*.

5. Ταυτολογικά αληθές, με την έννοια ότι τα αξιώματά του είναι λογικά έγκυροι τύποι. Για τον ορισμό του λογικά έγκυρου τύπου, βλ. Αναπολιτάνος, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, σ. 176.

σίου καθιστά αναγκαία την πειραματική επαγρύπνηση και επιβάλλει μια σχέση διαρκούς ελέγχου για την ανανέωση της αποδοχής και της εμπιστοσύνης της επιστημονικής κοινότητας προς το εν λόγω πλαίσιο.

Η έννοια και ο ρόλος του πειράματος στις επιστήμες της φύσης είναι δύο πράγματα αρκετά σαφή και καθορισμένα. Ένας τέτοιος ισχυρισμός δεν θα μπορούσε να διατυπωθεί με την ίδια απολυτότητα για τις ιστορικές και κοινωνικές επιστήμες. Ωστόσο, μια κατά περίπτωση προσαρμοζόμενη και σχετικά ευέλικτη έννοια πειράματος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση των επιστημών αυτών, ιδιαίτερα στο επίπεδο της δημιουργίας θεωρητικών μοντέλων και του, κατά το πλείστον, αναδρομικού εμπειρικού ελέγχου των.

Ως προς το πείραμα στις επιστήμες της φύσης, θα μπορούσε κανείς να εντοπίσει τουλάχιστον δύο διαφορετικά είδη του. Στο πρώτο είδος εντάσσονται όλα εκείνα τα πραγματοποιηθέντα, πραγματοποιούμενα ή πραγματοποιηθέσμενα πειράματα στο πλαίσιο ενός καλά εξοπλισμένου εργαστηρίου, με χρήση κατάλληλων οργάνων, κατόπιν επαρκούς θεωρητικού σχεδιασμού. Στο δεύτερο είδος εντάσσονται τα πειράματα εκείνα τα οποία δεν απαιτούν για την πραγμάτωσή τους ένα καλά οργανωμένο εργαστήριο και χρήση κατάλληλων οργάνων, αλλά ένα καλά οργανωμένο γραφείο-σπουδαστήριο-αναγνωστήριο (και αυτό όχι πάντοτε) και επαρκείς ποσότητες γραφικής ύλης. Όσο για τον επαρκή θεωρητικό σχεδιασμό, αντ' αυτού είναι αρκετή η θεωρητική κατάρτιση του εκτελούντος το πείραμα, η ικανότητά του κατά την εκτέλεσή του καθώς και το σαφές αυτού, το οποίο επιδιώκεται μέσω του πειράματος. Εν ολίγοις, στο δεύτερο αυτό είδος εντάσσονται όλα εκείνα τα πειράματα τα οποία καταχρηστικώς, ίσως, φέρουν αυτό το όνομα, δεδομένου ότι πρόκειται περί διεργασιών, χωρίς απάλλαξη σε εμπειρικό περιεχόμενο, συναγωγής συμπερασμάτων ή δημιουργίας πρώτων αρχών. Τα πειράματα αυτά ανήκουν στην σφαίρα του νοητού και λαμβάνουν χώρα νοερώς. Είναι τα πειράματα εκείνα τα οποία στο εξής θα ονομάζουμε «νοητικά».

Τα προβλήματα τα οποία αντιμετωπίζει κανείς όταν ασχολείται με τα νοητικά πειράματα στο πλαίσιο μιας επιστήμης είναι δυνατόν να κατανεμηθούν στις εξής τέσσερις κατηγορίες:

- 1) Στην πρώτη κατηγορία εντάσσονται τα προβλήματα τα αναφερόμενα στην, σχεδόν, διαισθητική συλλογή και ταξινόμηση συγχεκριμένων περιπτώσεων νοητικών διεργασιών, οι οποίες θα ήταν δυνατόν να θεωρηθούν ως παραδείγματα νοητικών πειραμάτων στην αντίστοιχη επιστημονική περιοχή και να ταξινομηθούν, ως τέτοια, σε μία βάση σαφώς αναθεωρήσιμη. Μία τέτοια ταξινόμηση δεν πρέπει να έχει ως απαραίτητη προϋπόθεσή της την ύπαρξη ενός θεωρητικού μοντέλου στον νου του εκτελούντος την ταξινόμηση, ενός μοντέλου, δηλαδή, το οποίο θα καθόριζε είτε το είδος του γενικού σχεδίου που θα έπρεπε

να ακολουθούν, είτε την γενική μορφή την οποία θα έπρεπε να έχουν τα νοητικά πειράματα. Είναι αρκετό στον επιστήμονα ή στον φιλόσοφο που ακολουθεί μία διαδικασία συλλογής παραδειγμάτων νοητικών πειραμάτων να έχει στον νου του μια σχετικά αμυδρή ιδέα ως προς το τι μπορεί να είναι ένα νοητικό πείραμα, χωρίς να απαιτεί το περιεχόμενο αυτής της ιδέας να είναι επαρκώς ευχρινές και σαφές. Ένα, κατ' ελάχιστον, θεμελιώδες χαρακτηριστικό μιας τέτοιας αμυδρής ιδέας θα πρέπει, βεβαίως, να είναι ότι ένα νοητικό πείραμα είναι ιδανική διερευνητική διαδικασία, η οποία συντελείται και πραγματώνεται σύμφωνα με κανόνες που επιβάλλονται από την λογική και τις ιδιαιτερότητες της συγκεκριμένης επιστήμης και η οποία έχει ως σκοπό την παροχή απαντήσεων σε θεωρητικά ή μεταθεωρητικά ερωτήματα, που τίθενται στο γενικό πλαίσιο της συγκεκριμένης επιστήμης. Μία τέτοια διερευνητική διαδικασία δεν είναι απαραίτητο να είναι ισόμορφα αντίστοιχη ή και απλώς αντίστοιχη μιας πειραματικής διαδικασίας, στο πλαίσιο ενός καλά οργανωμένου εργαστηρίου, και αυτό για δύο, τουλάχιστον, λόγους: Πρώτον, διότι στην περίπτωση των επιστημών της φύσης (όπως, π.χ., της φυσικής) σε ένα νοητικό πείραμα εμπλέκονται ιδιανικοποίησεις συνθηκών οι οποίες δεν έχουν το αντίστοιχο τους στις συνθήκες εργαστηριακού πειράματος. Ένα στοιχειώδες παράδειγμα στο πλαίσιο της νευτώνειας φυσικής θα μπορούσε να είναι αυτό της ελαστικής κρούσης. Κανένα νοητικό πείραμα ελαστικής κρούσης δεν μπορεί να έχει το ακριβές αντίστοιχο του στο πλαίσιο ενός εργαστηρίου μηχανικής. Δεύτερον, διότι στην περίπτωση των μαθηματικών η έννοια του πειράματος είναι προβληματική. Καταχρηστικώς και μόνο θα μπορούσε να λεχθεί ότι, αν στην περιοχή των μαθηματικών δεχθεί κανείς την ύπαρξη πειραμάτων, αυτά θα ήταν μόνον νοητικά και όχι εργαστηριακά.

2) Στην δεύτερη κατηγορία εντάσσονται τα προβλήματα τα οποία σχετίζονται με την επανεξέταση και λεπτομερέστερη ταξινόμηση των συλλεγέντων αρχικώς παραδειγμάτων. Η διαδικασία μίας λεπτομερέστερης ταξινόμησης είναι εξόχως σημαντική, δεδομένου ότι στο πλαίσιο της θα ήταν δυνατόν να καθορισθούν ομοιότητες και διαφορές, οι οποίες θα οδηγούσαν, πιθανώς, σε χρήσιμες ομαδοποιήσεις και ιεραρχήσεις στο εσωτερικό του συλλεγέντος υλικού, το οποίο εντάσσεται στο πλαίσιο της συγκεκριμένης επιστήμης. Μία τέτοια λεπτομερέστερη ταξινόμηση είναι δυνατόν να γίνει χωρίς θεωρητικές προκαταλήψεις ή, τουλάχιστον, με τις θεωρητικές μας προκαταλήψεις ελαχιστοποιημένες. Η παραπάνω διευκρίνιση είναι απαραίτητη δεδομένου ότι είναι, σχεδόν, βέβαιο πως καμία ταξινομική διαδικασία δεν είναι απαλλαγμένη, μη ευχόλως συνεδρητοποιημένων, αποτιμήσεων του συλλεγέντος υλικού. Τέτοιες αποτιμήσεις είναι θεωρητικά βεβαρυμένες και, επομένως, θεωρητικά μονομερείς. Παρά ταύτα, στο πλαίσιο της παραπάνω επανεξέτασης και λεπτομερέστερης ταξινό-

μησης, και εφόσον συνειδητά κρατηθούν σε ελεγχόμενα επίπεδα ελαχιστοποίησης τα θεωρητικά δάνεια, είναι δυνατόν να αρχίσει μία διαδικασία οριοθέτησης της έννοιας του «νοητικού πειράματος», όπως αυτό λειτουργεί στον αντίστοιχο συγκεκριμένο χώρο. Μία τέτοια διαδικασία είναι μεθοδολογικά ορθή διότι συνεπάγεται ότι ενεργούμε ή οφείλουμε να ενεργήσουμε ως ακολούθως. Αρχίζοντας από το συλλεγέν υλικό και οδηγούμενοι συνειδητά από αυτό σε γενικά ταξινομικά σχήματα και από εκεί σε εννοιολογικές οριοθετήσεις, προσπαθούμε, τουλάχιστον, να ακολουθήσουμε την οδό του εμπειρικού, αποφεύγοντας υπερβεβαρυμένες ρασιοναλιστικές τάσεις, οι οποίες, χωρίς να είναι απολύτως υπεύθυνες για αυτό, είναι δυνατόν να μας οδηγήσουν σε σοβαρά σφάλματα, ελλοχεύοντα σε κάθε διαδικασία μετάβασης από το γενικό στο ειδικό.

3) Η τρίτη κατηγορία περιλαμβάνει προβλήματα καθορισμού ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ των συλλεγέντων νοητικών πειραμάτων, καθώς αυτά λειτουργούν στο θεωρητικό πλαίσιο της αντίστοιχης επιστήμης ή επιστημονικής περιοχής. Τα προβλήματα αυτά θα ήταν δυνατόν να καθορισθούν είτε εκ των προτέρων, με οριστό τον κίνδυνο παρεισφρήσεων ρασιοναλιστικών προκαταλήψεων και επομένως λαθών, είτε εν πορείᾳ και, εν πάσῃ περίπτωσε, εκ των υστέρων, με το συλλεγέν υλικό να επηρεάζει τον καθορισμό τους και συνολικώς και κατά περίπτωση. Είναι προφανές ότι μία τέτοια πορεία, όπως η παραπάνω αναφερθείσα ως διαζευκτικώς ύστερη, δεν είναι απαραίτητο να είναι προσδιορίσμη μόνο από το εμπειρικό υλικό. Κάποια, πιθανόν αναθεωρήσιμα, μεταθεωρητικά σχήματα⁶ είναι δυνατόν να παίζουν τον ρόλο γενικού οδηγού στην ταξινόμηση και επεξεργασία αυτών των προβλημάτων. Σε οποιαδήποτε περίπτωση, πάντως, μία τέτοια ταξινόμηση και επεξεργασία θα μπορούσε να είναι το αποτέλεσμα ενός ερευνητικού προγράμματος,⁷ σχεδιασμένου με σκοπό τον σχηματισμό⁸ μίας γενικής θεωρίας νοητικών πειραμάτων, η οποία θα κάλυπτε την έννοια του «νοητικού πειράματος», καθώς αυτό λειτουργεί συνολικά στις επιστήμες και, πιθανότατα, στην φιλοσοφία.

4) Η τέταρτη κατηγορία προβλημάτων αναφέρεται σε ζητήματα προκύπτοντα από την ύπαρξη περιορισμών γνωσιακού χαρακτήρα, οι οποίοι εξαρτώνται

6. Εδώ εννοούμε σχήματα τα οποία ανήκουν σε περιοχές σχεδιασμού θεωριών και επομένως σε περιοχές μετα-θεωρητικές. Τέτοιες περιοχές είναι γνωσιακά δευτέρας τάξεως δεδομένου ότι απαιτούν ποσοδείξεις επί θεωριών.

7. Ο όρος «ερευνητικό πρόγραμμα» χρησιμοποιείται εδώ με έννοια παρεμφερή προς αυτήν που καθόρισε ο Imre Lakatos.

8. Ένας τέτοιος σχηματισμός ίσως να είναι ανέφικτος. Κάτιο τέτοιο, βεβαίως, δεν αποκλείει, εκ των προτέρων, την προσπάθεια για σχεδιασμό μίας γενικής θεωρίας νοητικών πειραμάτων.

και από το ερευνώμενο γνωσιακό υλικό και από την ιδιαίτερη γνωσιακή φύση του φορέα του, δηλαδή του ελλόγου όντος. Οι περιορισμοί αυτοί θα μπορούσαν να κληθούν «κατανοησιακοί περιορισμοί». Δεν θα επιχειρήσουμε να διατυπώσουμε έναν γενικό ορισμό του εισαχθέντος όρου. Κάτι τέτοιο είναι ανέφικτο. Πάντως, το σημασιολογικό φάσμα του για την περιοχή των μαθηματικών και των νοητικών πειραμάτων σε αυτά θα γίνει αρκετά σαφές προς το τέλος του παρόντος άρθρου. Αυτό που θα μπορούσε, ωστόσο, να λεχθεί είναι το εξής: Περιορισμοί τέτοιου είδους έχουν, τουλάχιστον, δύο ενδιαφέρουσες πλευρές. Η μία αφορά τον ρόλο τους στις περιπτώσεις κατά τις οποίες το έλλογο ον καλείται να επιλέξει μεταξύ εναλλακτικών ακολουθητών οδών κατά την διαδικασία του νοητικού πειράματος. Η δεύτερη σχετίζεται με την απάντηση σε ερωτήματα τα οποία αναφέρονται στο γιατί της επιλογής ενός θεωρητικού πλαισίου μεταξύ άλλων πιθανώς ισοδυνάμων του. Η ανάγκη για την επιλογή ή την κατασκευή ενός θεωρητικού πλαισίου σχετίζεται με την επιθυμία εξήγησης⁹ των φαινομένων, που μας αποκαλύπτονται μέσα από την εμπειρική παρατήρηση ή την λογική σύνδεση. Η ίδια η επιλογή, όμως, τις πιο πολλές φορές καθορίζεται από την φύση των κατανοησιακών περιορισμών στις οποίους υπόκειται το έλλογο ον.

Ο βασικός σκοπός του παρόντος άρθρου είναι να εξετασθούν ορισμένα ζητήματα τα οποία ανεπτύχθησαν παραπάνω στην περίπτωση των νοητικών πειραμάτων στην επιστημονική περιοχή των μαθηματικών. Είναι προφανές ότι τέτοιες ταξινομίες, αφενός, θα πρέπει να θεωρούνται ως πρώτες προσεγγίσεις για έναν, ίσως ανέφικτο, τελικό καθορισμό της έννοιας του «νοητικού πειράματος» στα μαθηματικά και, αφετέρου, θα πρέπει να θεωρούνται ότι οδηγούν σε μεθοδολογικής υφής ολικές θεάσεις και της μαθηματικής δραστηριότητας και του προϊόντος της. Η ανοικτή σε προσθήκες ή ακόμη και σε αναθεώρηση ταξινομία νοητικών πειραμάτων, την οποίαν προτείνουμε, έχει ως εξής:

α. Η πρώτη ομάδα τέτοιων πειραμάτων είναι αυτή η οποία περιλαμβάνει εκείνα που συνήθως λαμβάνουν χώρα μέσα σε ένα εννοιολογικό πλαίσιο ακόμη ρευστά, δηλαδή μέσα σε ένα πλαίσιο το οποίο δεν έχει μετασχηματισθεί οριστικά σε σταθερό θεωρητικό πλαίσιο, εξηγητικό της συγκεκριμένης πειραματικής δραστηριότητας. Τα πειράματα που περιλαμβάνονται στην πρώτη αυτή ομάδα συνήθως σχετίζονται με την προσπάθεια κάποιου ή κάποιων ατόμων (τα οποία είναι δυνατόν είτε να ανήκουν στην ίδια γενιά μαθηματικών είτε όχι) να απαντήσουν σε ερωτήματα σχετικά με το αν μία συγκεκριμένη μαθηματική πρόταση ισχύει ή όχι. Προτάσεις τέτοιου είδους εμφανίζονται υπό την μορφή εικασιών.

9. Η έννοια της «εξήγησης» χρησιμοποιείται εδώ με την καθαρά τεχνική της σημασία, όπως έχει καθορισθεί στο πλαίσιο της αγγλοσαξονικής φιλοσοφίας.

Το σημαντικό στην προκείμενη περίπτωση είναι ότι, κατά την πειραματική διαδικασία αναζήτησης απάντησης-λύσης στο τεθέν ερώτημα, διάφοροι μετασχηματισμοί της αρχικής εικασίας μπορεί να επισυμβούν. Οι μετασχηματισμοί αυτοί συνδέονται με κατάλληλους μετασχηματισμούς στο αντίστοιχο εννοιολογικό πλαίσιο προς την κατεύθυνση της μεγαλύτερης ευκρίνειας και σαφήνειας του πλαισίου αυτού. Το προκύπτον νέο πλαίσιο είναι, συνήθως, καλύτερο του προηγουμένου του, υπό την έννοια ότι ως εννοιολογικό δίκτυο διαθέτει σαφώς λιγότερο συγκεχυμένες αρθρώσεις και συνδέσεις και περισσότερο καλά καθορισμένα όρια. Το παιχνίδι των αλληλεπιδράσεων, προς την κατεύθυνση της εννοιολογικής βελτίωσης τεθέντος ερωτήματος και πλαισίου κατά την διάρκεια επιχειρουμένων πειραματικών προσεγγιστικών λύσεων, έχει προφανώς αμφίδρομο χαρακτήρα. Το γεγονός ότι το εννοιολογικό πλαίσιο δεν έχει ακόμη θεωρητικά σταθεροποιηθεί καθιστά την ιστορία των μετασχηματισμών της αρχικής εικασίας ή του αρχικού ερωτήματος εξαιρετικά ενδιαφέρουσα, γιατί συνδέεται με την ιστορία των επάλληλων μετασχηματισμών του αρχικού συγκεχυμένου εννοιολογικού πλαισίου προς την κατεύθυνση μιας κατά το μάλλον ή ήττον ιδιαίτερης θεωρητικής σταθεροποίησής του. Μια καλή γνώση της ιστορίας τέτοιων μετασχηματισμών μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε την φύση της μαθηματικής δραστηριότητας, ως δραστηριότητας κατά βάση εικονοπλαστικής, της οποίας η αξιωματική εδραίωση αποτελεί θέμα στάδιο της ιστορικής εξέλιξης των μαθηματικών ιδεών και μεθόδων.

Μία εκτεταμένη χρήση νοητικών πειραμάτων συναντά κανείς στο έργο του Imre Lakatos *Proofs and Refutations*.¹⁰ Το στοιχείο του νοητικού πειραματισμού χρησιμοποιείται εκεί κατά τρόπο πρωταγωνιστικό, στην προσπάθεια να ανακατασκευασθεί ορθολογικά ένα περιληπτικό ιστορικό ομοίωμα των προσπαθειών της μαθηματικής κοινότητας για απόδειξη του αρκετά γνωστού τύπου συσχέτισης των αριθμών των ακμών, κορυφών και εδρών ενός κανονικού πολυέδρου. Σύμφωνα με τον Lakatos, η περιγραφόμενη εκεί διαδικασία μπορεί να γενικευθεί, με την έννοια ότι θα ήταν δυνατόν να αποτελέσει το πρότυπο για αναπαραγωγή ιστορικών μεταβάσεων αποδεικτικής υφής από μια αρχική εικασία στην τελική επίλυση του προβλήματος, που ανακύπτει από αυτήν, μέσω νοητικών πειραμάτων σχετιζόμενων με την επιλογή εναλλακτικών διαδρομών συνδεδεμένων με κάθε τέτοια μετάβαση. Κατά την διάρκεια της ανάλυσης τέτοιου τύπου μεταβάσεων θα μπορούσε κανείς να οδηγηθεί σε συμπεράσματα σχετικά με το αμφίδρομο των μετασχηματισμών αρχικής εικασίας και αντίστοιχου εννοιολογικού πλαισίου καθώς και διευθετήσεων ορι-

10. I. Lakatos, «Proofs and Refutations», *The British Journal for the Philosophy of Science* 14/55 (Νοέμ. 1963), 221-245.

σημικού χαρακτήρα,¹¹ προς την κατεύθυνση της νοηματικής βελτίωσης και των δύο. Είναι, βεβαίως, προφανές ότι η λύση του προβλήματος που τίθεται με την αρχική εικασία δεν είναι αναγκαίως πάντοτε θετική. Η βελτίωση του εννοιολογικού πλαισίου και της αρχικής εικασίας, προς την κατεύθυνση μίας τελικής ολοκληρωμένης μορφής των, είναι δυνατόν να οδηγήσει σε απόρριψη της εικασίας. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε, παραδείγματος χάριν, να γίνει είτε μέσω της κατασκευής αντιπαραδείγματος, αν η εικασία εκφράζεται με μία καθολική πρόταση, είτε μέσω μίας αποδεικτικής απαγωγής εις ἀπόπον, αν η εικασία εκφράζεται με μία υπαρκτική πρόταση.¹²

β. Η δεύτερη ομάδα νοητικών πειραμάτων στα μαθηματικά είναι αυτή των πειραμάτων τα οποία λαμβάνουν χώρα στο πλαίσιο ενός παγιωμένου αξιωματικού συστήματος. Οι ερωτήσεις οι οποίες τίθενται για να απαντηθούν και οι αντίστοιχες εικασίες οι οποίες προτείνονται για εξέταση είναι καλά διατυπωμένες στο γλωσσικό πλαίσιο του συγκεκριμένου συστήματος και η αμφίδρομη διαδικασία επηρεασμού των ερωτήσεων από τις επιχειρούμενες απαντήσεις, και αντιστρόφως, δεν επηρεάζει ούτε οδηγεί σε ουσιώδεις τροποποιήσεις των ερωτήσεων αυτών. Επίσης, η μόνη διαδικασία αλλαγής των ερωτήσεων, η οποία συναντάται στο πλαίσιο αυτό, είναι της υποδιάρεσής των σε σημασιολογικά στενότερές τους. Δεν αποκλείται, βεβαίως, η δημιουργία και εμφάνιση νέων ερωτήσεων και νέων εικασιών, οι οποίες συνδέονται με την αρχική ή τις αρχικές, κατά την χρονική περίοδο, ή και αργότερα, στην διάρκεια της οποίας επιχειρείται να απαντηθεί η αρχική ή να απαντηθούν οι αρχικές ερωτήσεις και να επιβεβαιωθούν ή όχι οι αρχικές εικασίες.

Είναι δυνατόν μία καλά διατυπωμένη ερώτηση στο πλαίσιο μιας παγιωμένης αξιωματικής θεωρίας να μην επιδέχεται θετική ή αρνητική απάντηση. Τέτοια παραδείγματα ερωτήσεων υπάρχουν αρκετά. Κάθε μη αποκρίσμα τύπος,¹³ στο πλαίσιο της γλώσσας μιας πρωτοβάθμιας αξιωματικής θεωρίας, μετασχηματισμένος στην κατάλληλη αντίστοιχη ερώτηση, δεν μπορεί να οδηγήσει σε θετική ή αρνητική απάντηση. Μια τέτοια απάντηση θα μπορούσε να προκύψει μόνον από κατάλληλη αλλαγή της αξιωματικής θεωρίας, η οποία όμως αλλα-

11. Με τον όρο «διευθετήσεις ορισμικού χαρακτήρα» εννοούμε τις διευθετήσεις εκείνες που σχετίζονται με κατάλληλες τροποποιήσεις ή προσθήκες ορισμάν παλαιών ή νέων όρων στο πλαίσιο του συνεχώς βελτιωμένου εννοιολογικού πλαισίου.

12. Με τον όρο «καθολική πρόταση» εννοούμε κάθε πρόταση που αρχίζει με τον ποσοδεικτή «για κάθε», ενώ με τον όρο «υπαρκτική πρόταση» εννοούμε κάθε πρόταση που αρχίζει με τον ποσοδεικτή «υπάρχει».

13. Με τον όρο «μη αποκρισμότητα» εννοούμε την αδυναμία, που συχνά εμφανίζεται στο πλαίσιο μιας εκάστοτε συγκεκριμένης αξιωματικής μαθηματικής θεωρίας, να υπάρχει απόδειξη μιας υπό εξέταση μαθηματικής πρότασης (καθώς και της άρνησής της).

γή έχει, πολλές φορές, προφανή ad hoc χαρακτήρα. Το Αξίωμα Επιλογής, επί παραδείγματι, είναι ένας μη αποκρίσμα τύπος στο πλαίσιο της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων.¹⁴ Δεν θα πρέπει, βεβαίως, να θεωρηθεί ότι σε αυτές τις περιπτώσεις η μη ύπαρξη θετικής ή αρνητικής απάντησης είναι ταυτόσημη με την μη ύπαρξη απάντησης γενικών. Κάτι τέτοιο θα ήταν εντελώς λανθασμένο, δεδομένου ότι η διαπίστωση της μη αποκρισμότητας του συγκεκριμένου τύπου, δηλαδή η διαπίστωση της αδυναμίας να απαντηθεί με ένα «ναι» ή με ένα «όχι» η ερώτηση «Ισχύει ο τύπος αυτός?», αποτελεί ήδη μία απάντηση στην ερώτηση, έστω και αν η απάντηση αυτή είναι μεταμαθηματικού χαρακτήρα.¹⁵

Κοντολογίς, αντιμέτωποι με μία ερώτηση ή εικασία στο πλαίσιο μίας παγιωμένης μαθηματικής θεωρίας, είμαστε υποχρεωμένοι να εξερευνήσουμε, πειραματίζόμενοι νοητικά, τις εναλλακτικές οδούς οι οποίες θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε κάποιο από τα παρακάτω αποκλειστικά και αμοιβαίως αποκλειόμενα αποτελέσματα:

1) Μία θετική απάντηση, με την έννοια της παραγωγής μίας απόδειξης της ισχύος του εικαζόμενου ως ισχύοντος τύπου.

2) Μία αρνητική απάντηση, με την έννοια της παραγωγής μίας απόδειξης της ισχύος της άρνησης του εικαζόμενου ως ισχύοντος τύπου.

3) Μια απάντηση ούτε θετική ούτε αρνητική, σύμφωνα με την οποία ο συγκεκριμένος τύπος θα χαρακτηρίζεται ως «μη αποκρίσμα» στο πλαίσιο της δεδομένης αξιωματικής θεωρίας. Όπως ήδη ελέχθη, η απάντηση αυτή δεν μπορεί παρά να προκύπτει από μία απόδειξη μεταμαθηματικού χαρακτήρα, η οποία θα μας βεβαιώνει ότι είναι ανώφελο να φάγουμε για θετική ή αρνητική απάντηση στην τεθείσα ερώτηση ή στην διατυπωθείσα εικασία.

Κάποιες σημασιολογικές διευκρινίσεις απαιτούνται στο σημείο αυτό. Όπως ήδη διευκρινίστηκε στην υποσημείωση 13, καλούμε έναν τύπο, στο πλαίσιο της γλώσσας μίας πρωτοβάθμιας αξιωματικής θεωρίας, «μη αποκρίσμα» αν η αποδεικτικά κατοχυρωμένη ισχύς του ίδιου, καθώς και της άρνησής του, δεν είναι εφικτή στο εσωτερικό της συγκεκριμένης θεωρίας. Η μη αποκρισμότητά του αποδεικνύεται συνήθως μεταθεωρητικά, όταν επιτυγχάνεται η κατασκευή ενός μοντέλου της θεωρίας που ικανοποιεί τον συγκεκριμένο τύπο, και ενός

14. Για σχετικές λεπτομέρειες, βλ., Αναπολιτάνος, *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*. Enderton, *Elements of Set Theory*. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*.

15. Μεταμαθηματικού χαρακτήρα, με την έννοια ότι αποτελεί απάντηση όχι στο πλαίσιο της γλώσσας της συγκεκριμένης μαθηματικής αξιωματικής θεωρίας αλλά στο πλαίσιο της μεταγλώσσας της θεωρίας αυτής, δηλαδή στο πλαίσιο της γλώσσας εκείνης η οποία χρησιμοποιείται για να εξετασθεί η συγκεκριμένη θεωρία ως επί μέρους αντικείμενο.

μοντέλου, επίσης της συγκεκριμένης θεωρίας, που ικανοποιεί την άρνησή του. Η δραστηριότητα που περιεγράφει αμέσως παραπάνω είναι μια δραστηριότητα μεταμαθηματικού χαρακτήρα, είναι, δηλαδή, μία δραστηριότητα η οποία λαμβάνει χώρα όχι στο πλαίσιο της γλώσσας της συγκεκριμένης μαθηματικής αξιωματικής θεωρίας, αλλά στο πλαίσιο της γλώσσας εκείνης η οποία χρησιμοποιείται για να εξετασθεί η συγκεκριμένη θεωρία ως επί μέρους αντικείμενο.

γ) Η τρίτη ομάδα νοητικών πειραμάτων στα μαθηματικά είναι αυτή η οποία περιλαμβάνει εκείνα τα πειράματα τα οποία λαμβάνουν χώρα υπό καθεστώς φρενίτιδος κατά την διάρκεια που ακολουθεί την εμφάνιση κρίσιμων ρηγμάτων στα θεμέλια μιας μαθηματικής θεωρίας ειδικότερα, ή στα θεμέλια των μαθηματικών γενικότερα. Η όλη προσπάθεια και δραστηριότητα καθορίζεται, κατά βάση, από την ανάγκη κατασκευής ενός νέου εννοιολογικού πλαισίου, εντός του οποίου υπάρχει η ελπίδα ότι η κρίση θα ελεγχθεί. Συνήθως, η επίτευξη του ελέγχου της κρίσης έχει, ως παραπροϊόν της, τον μετασχηματισμό της πηγής της κρίσης σε εξαιρετική πηγή εννοιολογικού εμπλουτισμού και δημιουργικής μεταμόρφωσης της όλης περιοχής και σε τεχνικό και σε μεθοδολογικό επίπεδο. Το βασικό χαρακτηριστικό στις περιπτώσεις αυτές των αντιστοίχων νοητικών πειραμάτων είναι ότι αυτά δεν προκαλούνται από την ανάγκη απάντησης σε τεθείσα ερώτηση ή διατυπωθείσα εικασία. Προκαλούνται, μάλλον, από την εμφάνιση παθογόνων αντιπαραδειγμάτων, τα οποία παρουσιάζονται ως παραδοξότητες οδηγούσες σε αντιφάσεις στο πλαίσιο του δεδομένου εννοιολογικού συστήματος. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, νέα εναλλακτικά εννοιολογικά συστήματα προτείνονται, τα οποία κρυσταλλώνονται σε συγκεκριμένες αξιωματικοποιήσεις. Οι αξιωματικοποιήσεις αυτές έχουν ως βασικό τους στόχο τον εξορθολογισμό των παραδοξότητων και την θεραπεία της πληγείσης περιοχής. Ποια από αυτές τις αξιωματικοποιήσεις θα υπερισχύσει στην συνέχεια και θα γίνει η κυριαρχούσα για την περαιτέρω έρευνα; Το ερώτημα αυτό δεν είναι δυνατόν να απαντηθεί από την αρχή. Κριτήρια τεχνικά και μεθοδολογικά, τα οποία, πιθανώς, να μην έχουν άμεση σχέση με την επιτευχθείσα θεραπεία των πληγέντων θεμελίων των μαθηματικών, παίζουν κυρίαρχο ρόλο σε τέτοιες μακράς διάρκειας επιλογές.

Η έντονη δραστηριότητα η οποία λαμβάνει χώρα κατά την διάρκεια και αμέσως μετά την εμφάνιση μίας κρίσης στα θεμέλια των μαθηματικών έχει ως βασικό της χαρακτηριστικό τον νοητικό πειραματισμό στο εννοιολογικό επίπεδο. Δεν πειραματίζεται κανέις σε επίπεδο αποδεικτικών εναλλακτικών εκδοχών, αλλά σε επίπεδο εναλλακτικών εννοιολογικών λύσεων. Αναζητά κατάλληλες έννοιες ή κατάλληλες συζεύξεις και τροποποιήσεις εννοιών και επιχειρεί εννοιολογικές διαπλοκές και χαρτογραφήσεις, με τελικό στόχο την κατασκευή ενός νέου αξιωματικού θεωρητικού πλαισίου, απαλλαγμένου από τις παρενέ-

γεις του παρατηρηθέντος παθογόνου αντιπαραδείγματος. Η αναζήτηση αυτή καθώς και η όλη διαδικασία η οποία οδηγεί στην κατασκευή εναλλακτικών αξιωματικών θεωρητικών πλαισίων έχουν χαρακτήρα εντόνως πειραματικό και αναδύονται κρυσταλλούμενες ως συγκεκριμένα αποτελέσματα δημιουργικής δραστηριότητας όχι μόνον της μαθηματικής αλλά και της φιλοσοφικής κοινότητας.

Η φιλοσοφική κοινότητα και ιδιαιτέρως τα μέλη της, που συμβαίνει να έχουν και γνώση μαθηματικών και επιθυμία διερεύνησης των θεμελίων της μαθηματικής δραστηριότητας, ενδιαφέρονται σφόδρα για διάστημα μέσα στα σημασιολογικά όρια της δραστηριότητας αυτής. Οι επιτυχέστεροι εκπρόσωποι αυτής της ιδιαιτέρης περιοχής της φιλοσοφικής κοινότητας διαβέτουν συνήθως και μαθηματικές και φιλοσοφικές δεξιότητες. Κορυφαία παραδείγματα, αυτά των Gottfried W. Leibniz και Gödel.

δ) Η τέταρτη σημαντική ομάδα νοητικών πειραμάτων στα μαθηματικά είναι αυτή η οποία περιέχει εκείνα τα πειράματα που προεκλήθησαν ή προκαλούνται από κάποια εσωτερική θεωρητική αδυναμία να αποδειχθούν, στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος, ως ισχύουσες ή ως μη ισχύουσες βασικές προτάσεις – αιτήματα (ή ακόμη και εικασίες), τις οποίες οι μαθηματικοί, κάτω από συγκεκριμένες επιστημολογικές συνθήκες, έφθασαν να θεωρούν ως θεμελιώδεις. Ένα καλό παράδειγμα αυτού του είδους πειραματισμού μπορεί να αναζητήσει κανέις στην σχετικά πρόσφατη ανάπτυξη της έρευνας γύρω από τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων στο πλαίσιο της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων. Ένα άλλο όμορφο παράδειγμα είναι δυνατόν να αναζητήσει κανέις στην ιστορία του ευκλείδεου αιτήματος των παραλλήλων. Για σχεδόν 2.000 χρόνια οι μαθηματικοί προσπάθησαν να αποδείξουν ότι το συγκεκριμένο αίτημα δεν άξει να τοποθετείται στην κορυφή της ευκλείδειας αξιωματικής πυραμίδας ως ανεξάρτητο των υπόλοιπων αξιώματων της ευκλείδειας γεωμετρίας. Προσπάθησαν, δηλαδή, εντελώς μάταια όπως απεδείχθη εκ των υστέρων, να αποδείξουν ότι το εν λόγω αίτημα προκύπτει, ως θεώρημα, από τα υπόλοιπα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας.

Οι αιώνες πέρασαν, οι καιροί ωρίμασαν και ο 19ος αιώνας στις αρχές του μας επεφύλασσε μία έκπληξη. Σχεδόν ταυτόχρονα και μέσα σε μία διάρκεια περίπου 30 ετών, οι János Bolyai, Carl F. Gauss και Nikolai Lobachevsky, εγκαταλείποντας το σκάφος της προσπάθειας απόδειξης του αιτήματος των παραλλήλων από τα υπόλοιπα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας, προχώρησαν στην υιοθέτηση εκδοχών άρνησης του αιτήματος και δημιουργίας, με αυτόν τον τρόπο, των πρώτων μη ευκλείδειων γεωμετριών.¹ Όπως οι Felix Klein και Henri Poincaré, οι νέες αυτές γεωμετρίες δεν ήταν δυνατόν να οδηγήσουν σε αντιφά-

σεις αν υπέθετε κανείς ότι η αρχική ευκλείδεια γεωμετρία ήταν μη αντιφατική (δηλαδή συνεπής) θεωρία. Έτσι ο χώρος των γεωμετρικών θεωριών εμπλουτίσθηκε ουσιαστικά. Έπαυσε η ευκλείδεια γεωμετρία να αποτελεί την μοναδική κοιτίδα προέλευσης γεωμετρικών αληθειών. Περιττό να λεχθεί ότι η άνθηση της γεωμετρίας κατά τον 19ο, τον 20ό αιώνα και τις αρχές του 21ού αιώνα υπήρξε πρωτοφανής και η αντίστοιχη γνωσιακή πρόοδος αλματώδης, επηρεάζοντας ουσιωδώς την ανάπτυξη και συγγενών προς τα μαθηματικά περιοχών, όπως αυτήν της φυσικής.

Η υιοθέτηση εκδοχών άρνησης του αιτήματος των παραλλήλων από τους Bolyai, Gauss και Lobachevsky δεν αποτελεί μοναδικό παράδειγμα, στην ιστορία των μαθηματικών, υιοθέτησης προτάσεων που αποτελούν αρνήσεις κατεστημένων προτάσεων – αξιωμάτων. Ένα άλλο παράδειγμα προς αυτήν την κατεύθυνση είναι της υιοθέτησης της άρνησης του Αξιωματος Επιλογής ή της άρνησης της Υπόθεσης του Συνεχούς. Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις θα έπρεπε να τονισθεί ότι η επιτυχία ή όχι του εγχειρήματος εξαρτάται από την ιδιότητα της μη αποκρισμότητας (στο πλαίσιο της εκάστοτε συγκεκριμένης αξιωματικής μαθηματικής θεωρίας), που πρέπει να διαθέτουν οι προτάσεις των οποίων οι αρνήσεις επιτυχώς υιοθετούνται.

ε) Οι προηγούμενες ομάδες νοητικών πειραμάτων δεν αποτελούσαν περιπτώσεις πειραματισμού οφειλόμενου σε καθαρώς φιλοσοφικές θεωρήσεις της μαθηματικής δραστηριότητας και των αρχικώς προς ανακάλυψη αποτελεσμάτων της. Υπάρχουν, λοιπόν, (όσο και αν κάτι τέτοιο προκαλεί την απορία και την έκπληξη) περιπτώσεις νοητικών πειραμάτων στα μαθηματικά που έχουν προκληθεί, κατά κύριο λόγο, από φιλοσοφικές εναλλακτικές θεωρήσεις της μαθηματικής δραστηριότητας. Αυτό δεν σημαίνει ότι σε όλες τις περιπτώσεις που κάτι τέτοιο διαπιστώνεται ο μόνος λόγος για την πραγματοποίηση του εκάστοτε συγκεκριμένου πειραματισμού είναι η νέα ή, απλώς, εναλλακτική φιλοσοφική θεώρηση της μαθηματικής δραστηριότητας. Υπάρχουν περιπτώσεις που το εκάστοτε συγκεκριμένο νοητικό πείραμα έχει προκληθεί και από λόγους καθαρώς μαθηματικού περιεχομένου και από λόγους νέας φιλοσοφικής προσέγγισης του φαινομένου της ανακάλυψης νέων μαθηματικών αντικειμένων και της διαπίστωσης της ύπαρξης καλά κρυμμένων, μέχρι τότε, νέων μαθηματικών αληθειών. Σε όλες, όμως, αυτές τις περιπτώσεις η φιλοσοφική θεώρηση παίζει πρωτεύοντα ρόλο στην ανάληψη των συγκεκριμένων πρωτοβουλιών. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονισθεί ότι πρωτεργάτες, κατά την διαδικασία ανάληψης τέτοιων πρωτοβουλιών, είναι μαθηματικοί με φιλοσοφικές ανησυχίες ή φιλόσοφοι με καλή έως ισχυρή γνώση μαθηματικών.

Τα νοητικά πειράματα στα μαθηματικά που οφείλονται σε ή προκαλούνται, κατά κύριο λόγο, από φιλοσοφικές θεωρήσεις είναι δυνατόν να ταξινο-

μηθούν σε δύο βασικές υποκατηγορίες. Στην πρώτη υποκατηγορία ανήκουν εκείνα τα νοητικά πειράματα που λαμβάνουν χώρα κατά την περίοδο χρίσεων στα θεμέλια των μαθηματικών και τα οποία οδηγούν στην κατασκευή ή, μάλλον, στην ανακάλυψη νέων θεωρητικών πλαισίων με ιδιάζοντα χαρακτηριστικά, που, συνήθως, δεν ανήκουν στην εκάστοτε, τρέχουσα μαθηματική πρακτική. Στην δεύτερη ανήκουν τα νοητικά πειράματα που, ενώ είναι δυνατόν να λάβουν χώρα σε περιόδους σταθερότητας και θεμελιακής ηρεμίας, διακρίνονται για την εισαγωγή νέων εννοιολογικών μορφωμάτων σε μία παραδοσιακά σταθερή περιοχή, στο πλαίσιο της οποίας δεν φαίνεται να χυφοφείται το ρηξικέλευθα νέο. Δεν φαίνεται να χυφοφείται το ρηξικέλευθα νέο μεν, είναι πιθανόν, όμως, να αιωρούνται ιδέες, που εμφανίσθηκαν πρώιμα στο παρελθόν και δεν κατέστη δυνατόν διά αυτών να αλλάξει το εννοιολογικό πλαίσιο τότε, αλλά τώρα οι εποχές είναι πιθανώς ώριμες, ώστε οι συγκεκριμένες ιδέες να αποκτήσουν την αποτελεσματικότητα που δεν διέθεταν κατά την περίοδο της αρχικής εμφάνισής τους.

Η πρώτη υποκατηγορία νοητικών πειραμάτων στα μαθηματικά (τα οποία είναι δυνατόν να εμφανιστούν σε περιόδους χρίσεων στα θεμέλια τους και να προκληθούν από συγκεκριμένους φιλοσοφικούς προβληματισμούς και υφέρπουσες ανησυχίες) περιέχει παραδείγματα εμφάνισης εναλλακτικών τρόπων αντιμετώπισης της μαθηματικής δραστηριότητας, που είναι δυνατόν να αναφέρονται ακόμη και στην αναθεώρηση των ορίων της χρησιμοποιούμενης λογικής. Ένα τέτοιο κορυφαίο παράδειγμα εναλλακτικού τρόπου αντιμετώπισης της μαθηματικής δραστηριότητας αποτελεί ο *Ιντουισιονισμός*.

Ο Ιντουισιονισμός δεν υπήρξε, απλώς, ένα εναλλακτικό φιλοσοφικό πλαίσιο νέας θέασης της υπάρχουσας μαθηματικής δραστηριότητας. Οι εκφραστές, θεμελιώτες και θιασώτες του ευαγγελίσθηκαν τον επανακαθορισμό του χώρου των μαθηματικών, θεωρώντας ότι είναι ώρα για την κάθαρση του χώρου αυτού από δάνεια αιμφίβολης μεταφυσικής καθαρότητας. Προχώρησαν στην αμφισβήτηση και, τελικώς, αποκοπή από το σώμα των μαθηματικών, τμημάτων τους που, κατά την άποψή τους, κακώς εμπεριείχοντο στο σώμα αυτό.

Το βασικό φιλοσοφικό δόγμα στο οποίο στηρίχτηκαν οι ιντουισιονιστές είχε να κάνει με την άποψη πως η μαθηματική δραστηριότητα ήταν θεμελιωδώς προγλωσσική και, επομένως, προλογική. Με αυτό εννοούσαν ότι τα μαθηματικά όχι μόνο δεν ήσαν αναγώγιμα στην λογική, αλλά, κατά τρόπο θεμελιώδη, προηγούντο οποιασδήποτε λογικής επεξεργασίας των στοιχειωδών δομών τους, όπως αυτής των φυσικών αριθμών. Στήριζαν την άποψή τους αυτή στην προλογική δυνατότητα του έλλογου όντος να διαχωρίζει τρόπο ταυτό από το έτερο, και το πριν από το μετά. Η μνήμη αποτελούσε για τους ιντουισιονιστές την μήτρα ανακάλυψης των φυσικών αριθμών, με την έννοια της, διά αυτής,

πρόσβασης του έλλογου όντος στην έννοια της διατεταγμένης δυάδας και, ως εκ τούτου; στην αυτοματοποιέμένη πράξη της μετάβασης από τον οποιονδήποτε φυσικό αριθμό στον επόμενό του. Η προγλωσσική αυτή δυνατότητα του έλλογου όντος αποτελούσε στοιχείο της μαθηματικής εποπτείας, η οποία συνδειε την ύπαρξή του. Ο νεαρός μαθηματικός δεν μαθαίνει να αριθμεί. Διαθέτει αυτή την ικανότητα από την ίδια την φύση, διότι αν δεν την δέθετε δεν θα μπορούσε να υπάρξει ως συνεδρηση, με την έννοια της γνωσιακής αδυναμίας διαχωρισμού του από το διάδηπτο τον περιβάλλει. Αν δεν μπορούσε να διακρίνει το άλλο δεν θα μπορούσε να ταυτοποιήσει εαυτόν. Ας προστεθεί ότι η κατά τους ιντουισιονιστές θεμελιώδης μαθηματική εποπτεία, που στηρίζεται στην χρονική εποπτεία, στην μνημονική, δηλαδή, δυνατότητα του διαχωρισμού του πριν από το εκάστοτε μετά, ανεξάρτητα από το συγκεκριμένο εμπειρικό τους περιεχόμενο, είναι φιλοσοφικό δάνειο καντιανής προέλευσης.

Η βασική αυτή θέση των ιντουισιονιστών περί μαθηματικής εποπτείας και ο, περίπου, κατασκευαστικός χαρακτήρας της μετάβασης από το ταυτό στο έτερο τους οδήγησε σε μία άποψη για τα μαθηματικά αντικείμενα και τις αποδείξεις των αληθειών, που διέπουν τα ίδια και τις πιθανές δομές τους, κατασκευαστικού χαρακτήρα. Ένα μαθηματικό αντικείμενο υπάρχει μόνον αν είναι κατασκευάσιμο και μάλιστα αν αποτελεί προϊόν παραχθέν με διακριτά και πεπερασμένα, ως προς το πλήθος τους, βήματα. Δεν υπάρχουν για αυτούς άπειρα αντικείμενα, με την έννοια της μη πεπερασμένης απαρίθμησης των στοιχείων τους. Έτσι, υπάρχουν οι φυσικοί αριθμοί (αν και, ίσως, δεν πρέπει να είναι πάρα πολύ μεγάλοι), δεν υπάρχει όμως το σύνολο των φυσικών αριθμών ως ενιαίο αντικείμενο.

Η από τους ιντουισιονιστές αμφισβήτηση τμήματος της κλασικής μαθηματικής δραστηριότητας προήλθε και από την προσκόλλησή τους στην κατασκευασιμότητα των αντικειμένων της μαθηματικής δραστηριότητας. Εποι, συγκεκριμένες υπαρκτικές προτάσεις, που στα κλασικά μαθηματικά αποδεικνύονται διά της εις άτοπον απαγωγής, απορρίφθηκαν, και τα, διά αυτών, αποδειχθέντα ως υπαρκτά, μαθηματικά αντικείμενα εξοβελίσθηκαν από τον χώρο των ιντουισιονιστικά αποδεκτών μαθηματικών αντικειμένων. Βεβαίως, αυτό ίσχυσε με την προϋπόθεση ότι δεν βρέθηκε ή δεν μπορούσε να βρεθεί κατασκευαστική απόδειξη της συγκεκριμένης υπαρκτικής πρότασης ως εναλλακτική εκδοχή της αντίστοιχης κλασικής απόδειξης. Μία κατασκευαστική απόδειξη υπαρκτικής πρότασης θα περιείχε, προφανώς, έναν κατασκευαστικό πεπερασμένο αλγόριθμο παραγωγής του συγκεκριμένου αντικειμένου, που η συγκεκριμένη υπαρκτική πρόταση θα περιέγραφε ως υπαρκτό.

Ο εξοβελισμός κλασικών αποδείξεων υπαρκτικών προτάσεων, όπως αυτές στις οποίες χρησιμοποιείται η εις άτοπον απαγωγή, εκ μέρους των ιντουισ-

νιστών δεν ήταν η μοναδική τους δραστική ενέργεια περιορισμού του χώρου των κλασικών μαθηματικών. Σειρά ταυτολογιών¹⁶ και λογικά έγκυρων τύπων απερρίφθησαν ως εκφράζοντα μη κατασκευαστικού τύπου αλήθειες, όπως αυτή που εκπροσωπεί την αρχή αποκλείσεως του τρίτου και στην οποία στηρίζονται όλες οι αποδείξεις που λαμβάνουν χώρα με χρήση της εις άτοπον απαγωγής. Η ιντουισιονιστική λογική, που, έτσι, αντικατέστησε την κλασική λογική, ήταν μία λογική ιντουισιονιστικά κατασκευαστικού χαρακτήρα και ως τέτοια άκρως περιοριστική της κλασικής.¹⁷ Παρά ταύτα, μετά την εισαγωγή της ιντουισιονιστικής άποψης, σημαντική έρευνα έλαβε χώρα, ιδιαίτερα στην Ολλανδία, με αντικειμενικό στόχο την ανίχνευση των αποδεικτικών ορίων των ιντουισιονιστικών μαθηματικών, σε συνδυασμό με συνεχείς, έστω και οριακές, διευρύνσεις των φιλοσοφικών ορίων του χώρου αυτού προς την κατεύθυνση αποδοχής εκδοχών αποδεικμούτητας, που θα μπορούσαν καταχρηστικώς να θεωρηθούν ως κατασκευαστικού χαρακτήρα.

Για να ολοκληρώσουμε την, έστω, σύντομη περιγραφή του φαινομένου της εμφάνισης των ιντουισιονιστικών μαθηματικών, θα πρέπει να τονίσουμε ότι αυτά αναδύθηκαν ακριβώς μετά την κρίση στα θεμέλια των μαθηματικών του τέλους του 19ου αιώνα και των αρχών του 20ού, που ξέσπασε εξαιτίας της εννοιολογικά ανεξέλεγκτης εισαγωγής της ιδέας του συνόλου από τον Georg Cantor και της αντίστοιχης εμφάνισης των συνολοθεωρητικών παραδόξων, με κορυφαίο αυτό του Bertrand Russell. Συγχρόνως, όπως είναι μάλλον γνωστό, εμφανίσθηκαν ακόμη δύο σχολές φιλοσοφίας των μαθηματικών, αυτή των φορμαλιστών του David Hilbert και αυτή των λογικιστών των Gottlob Frege και Russell, που όμως δεν οδήγησαν σε εμφανή μαθηματική δραστηριότητα, ουσιώδως διαφορετική από την κλασική.

Η δεύτερη υποκατηγορία νοητικών πειραμάτων στα μαθηματικά περιέχει παραδείγματα επανεννοιολόγησης μιας δεδομένης περιοχής της μαθηματικής δραστηριότητας σε δεδομένο χρόνο, χωρίς κάτι ουσιωδώς νέο να προμήνυε την εμφάνιση ενός τέτοιου, εκάστοτε, συγκεκριμένου συμβάντος πλαισιακής επανεννοιολόγησης. Σε κάθε, όμως, περίπτωση, το μη εμφανώς κυριοφορούμενο και

16. «Ταυτολογία», στο πλαίσιο του προτασιακού λογισμού, λέγεται κάθε προτασιακός τύπος που καθίσταται αληθής για κάθε συνδυασμό αληθοτιμών των προτασιακών μεταβλητών που περιέχει.

17. Βλ., για παράδειγμα: A. Heyting, *Intuitionism. An Introduction*, North-Holland, Αμστερνταμ 1956· L. E. J. Brouwer, «Consciousness, Philosophy and Mathematics», στο E. W. Beth κ.ά. (επιμ.), *Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy, Amsterdam, August 11-18, 1948*, North-Holland Publishing Company, Αμστερνταμ 1949, σ. 1235-1249.

τελικώς εμφανιζόμενο φαίνεται να οφείλεται και στην συγκεκριμένη πνευματική ιδιοσυντασία του αρχικώς εισηγηθέντος ή των αρχικώς εισηγηθέντων την νέα επανεννοιολόγηση. Ένα τέτοιο εξαιρετικό παράδειγμα νοητικού πειράματος επανεννοιολόγησης είναι αυτό που οφείλεται στον Abraham Robinson,¹⁸ όταν αυτός εισήγαγε επιτυχώς μία τεχνικώς όρτια και ρηξικέλευθια νέα προσέγγιση στο κλασικό αντικείμενο της μαθηματικής ανάλυσης. Η νέα προσέγγιση με καθαρά φιλοσοφικές ρίζες στηρίζεται σε μία εντυπωσιακά, τεχνικώς αποκαθαρμένη παλιά ιδέα του Leibniz (στην οποία είχε, δηλητηριωδώς, επιτεθεί o Russell),¹⁹ αυτήν του απειροστού. Ο Leibniz είχε χρησιμοποιήσει μία διαισθητικά ορισμένη έννοια «απειροστού» προκειμένου να θεμελιώσει, έστω με προβλήματα, μια αλγεβρική, σχεδόν, προσέγγιση των εννοιών της «παραγώγου» (ως οριακού ρυθμού μεταβολής) και του «ολοκληρώματος» (ως εμβαδού, προκύπτοντος διά οριακής αθροίσεως στοιχειωδών, απειροστικής τάξεως, εμβαδών). Ο Robinson, με θαυμαστό τρόπο, χρησιμοποίησε την παλιά ιδέα, την έλουσε τεχνικά με νέο φως, την αυστηροποίησε, την απήλλαξε αντιφατικών και αμφιλεγόμενων χαρακτηριστικών και, έτσι, ανεκάλυψε μία νέα ήπειρο, αυτήν της non-standard ανάλυσης, η οποία εμπεριείχε, πλέον, την κλασική ανάλυση ως ειδική υποπερίπτωσή της, επιτρέποντας παλαιές αποδείξεις της κλασικής ανάλυσης να αντιμετωπισθούν με νέον τρόπο και νέες αποδείξεις της κλασικής ανάλυσης να είναι δυνατόν να μεταφρασθούν από το νέο στο παλιό μαθηματικό λεξιλόγιο.

στ) Η τελευταία ομάδα νοητικών πειραμάτων στα μαθηματικά που θα εξετάσουμε είναι αυτή η οποία περιλαμβάνει πειράματα που αποσκοπούν στην ικανοποίηση της ανάγκης για δημιουργία νέων εννοιολογικών πλαισίων για δεδομένες περιοχές της μαθηματικής δραστηριότητας, έτσι ώστε να επιτρέπουν την ευκολότερη ανάλυσή τους. Αυτού του είδους ο νοητικός πειραματισμός χαρακτηρίζεται από το γεγονός της προσπάθειας εισαγωγής ισχυρότερων αξιωμάτων και περισσότερο κατάλληλων εργαλείων για την διερεύνηση μίας δεδομένης μαθηματικής περιοχής. Παραδείγματα υιοθεσίας τέτοιων αξιωμάτων και εργαλείων συνδέονται άμεσα με την σχετικά πρόσφατη άνθηση περιοχών όπως αυτή της απειροσυνδυαστικής ανάλυσης, που οφείλεται στην εισαγωγή νέων απειροσυνδυαστικών μεθόδων αντιμετώπισης παλιών και νέων προβλημάτων της κλασικής ανάλυσης καθώς και στην αντίστοιχη χρησιμοποίηση φιλοσοφικώς αμφιλεγόμενων ισχυρών αξιωμάτων ύπαρξης μεγάλων πληθα-

18. Για περισσότερες λεπτομέρειες, βλ. A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, Άμστερνταμ 1951.

19. Βλ., B. Russell, *A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*, G. Allen and Unwin Ltd., Λονδίνο 1975.

ρίθμων, του αξιώματος του Martin κτλ. Η άνθηση αυτή οδήγησε σε αρκετά γνώμη έρευνα σε ποικίλες κλασικές περιοχές των μαθηματικών, όπως της τοπολογίας, της περιγραφικής συνολοθεωρίας και της συναρτησιακής ανάλυσης.

Ο λειτουργικός ρόλος της εικασίας στην διαδικασία της μαθηματικής ανάλυσης και ο ευρετικός χαρακτήρας του νοητικού πειράματος κατά την εκδίπλωση της ερευνητικής μαθηματικής δραστηριότητας συνδέονται άμεσα με τους κατανοησιακούς περιορισμούς και τις αντίστοιχες συνθήκες κατανοησιμότητας που αυτός μας επιβάλλουν. Όπως έχει ήδη λεχθεί, περιορισμοί τέτοιου είδους έχουν, τουλάχιστον, δύο ενδιαφέρουσες πλευρές. Σύμφωνα με την πρώτη, τέτοιοι περιορισμοί παίζουν ουσιώδη ρόλο κατά την διαδικασία επιλογής μεταξύ ισοδύναμων (ή και, ίσως, μη ακριβώς ισοδύναμων) εναλλακτικών ακολουθήσιων οδών κατά την μελέτη των εικασιών και την ελεύθερη (αλλά και πειθαρχημένη) άσκηση του ερευνητικού δικαιώματος του νοητικού πειραματισμού. Σύμφωνα με την δεύτερη, εξηγητικές επιθυμίες που αφορούν στην επιλογή και περαιτέρω θεωρητική στερέωση ενός αξιωματικού πλαισίου καθορίζουν ατομικές στάσεις, που σχετίζονται με συγκεκριμένα «τι», «πώς» και «γιατί», τα οποία, χωρίς να χάνουν τον σχετικό αντικειμενικό τους χαρακτήρα, διακρίνονται και διαφοροποιούνται εξαιτίας της έντονης ιδιοσυγκρασιακότητας του διενεργούντος την μαθηματική έρευνα. Η μαθηματική έρευνα, με εργαλεία της την εικασία και τον νοητικό πειραματισμό, δεν ασκείται από μηχανιστικώς ενεργούντα λογικά αυτόματα, αλλά από συγκεκριμένα έλλογα άτομα που, πέραν κοινών στοιχείων, τα οποία διαθέτουν, είναι προικοδοτημένα και με ιδιότητες κατανοησιμότητας που έχουν και προσιδιάζοντα χαρακτήρα.