

### 3.3. Ιντουισιονισμός

‘Ο Ιντουισιονισμός ως σχολή φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν εἶναι ἐντόνα πρωτότυπος καί διαφορετικός ἀπό τίς δύο προηγούμενες σχολές πού ἔξετάσαμε. Ἐμφανίστηκε στίς ἀρχές του 20οῦ αἰώνα καί ἰδρυτής του ἦταν δὲ Ολλανδός μαθηματικός L.E.J. Brouwer, πού προσπάθησε νά δώσει τή δική του λύση στήν κρίση στά θεμέλια τῶν μαθηματικῶν, θεσμοθετώντας μιά ἴδιαίτερη ἔννοια κατασκευαστικότητας καί εἰσάγοντας κυριολεκτικά ρηξικέλευθες ἰδέες γύρω ἀπό τήν ἐπιτρεπτή μαθηματική πρακτική. Ἐδῶ θά πρέπει νά εἰπωθεῖ πώς ή σχολή τῶν Ιντουισιονιστῶν δέν ἀποτέλεσε μιά σχολή φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν πού προσπάθησε νά στηρίξει τήν ὑπάρχουσα μαθηματική πρακτική, ἀλλά, τουναντίον, τήν ἀμφισβήτησε καί θεσμοθέτησε τήν ἀνάγκη ξεκαθαρίσματος τῆς πρακτικῆς αὐτῆς, ἀπορρίπτοντας ἔτσι μεγάλα κομμάτια τῶν κλασικῶν μαθηματικῶν. Ἀπ’ αὐτή τήν ἀποψη ἦταν καί ή μόνη ἀπό τίς τρεῖς βασικές σχολές φιλοσοφίας τῶν μαθηματικῶν τοῦ 20οῦ αἰώνα πού συνέτεινε στή δημιουργία μαθηματικῶν διαφορετικῶν ἀπό τά κλασικά γνωστῶν κάτω ἀπό τό γενικό τίτλο «Ιντουισιονιστικά Μαθηματικά».

Τό βασικό σημεῖο στό δποϊο ἐπικεντρώθηκε τό ἐνδιαφέρον τοῦ Brouwer ἷταν ή ἔξέταση τῆς φύσης τῶν νοητῶν μαθηματικῶν κατασκευῶν. ‘Ως συνέπεια αὐτοῦ τοῦ προσανατολισμοῦ προκύπτει ή ὑποβάθμιση τοῦ ἐρωτήματος τῆς φύσης τῶν νοητῶν ἀντικειμένων πού παράγονται μέ κατασκευαστικές διαδικασίες καί ή τοποθέτησή του στήν περιοχή τῶν δευτερεύουσας σημασίας φιλοσοφικῶν προβλημάτων<sup>18</sup>. Τό αἴτημα πού ἀναδύθηκε ἷταν πώς κριτήριο τῆς δ-

παρξῆς τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων θά πρέπει νά εἶναι ή νοητή παραγωγή τους μέ διαδικασίες κατασκευαστικά ἐλεγχόμενες. Αὐτή ή ἐμμονή στήν κατασκευαστικότητα δόδήγησε, ἀν δχι στόν ἄμεσο καθορισμό τῆς ἴδιας τῆς ἔννοιας, τουλάχιστον στήν περιχαράκωσή της μέ τρόπους πού ἀποδείχτηκαν ἵκανοι νά στηρίξουν μιά συνεπή νέα μαθηματική πρακτική, στά πλαίσια τῆς δποίας ἀνθισε καί ως ἔνα βαθύμο συνεχίζει νά ἀνθεῖ ή καθαρή μαθηματική ἔρευνα καί δ φιλοσοφικός στοχασμός. Η περιχαράκωσή αὐτή στηρίχθηκε σέ μιά φιλοσοφική θέση καντιανῆς προέλευσης καί σέ μιά πρωτότυπη ἀντιμετώπιση τοῦ ἔννοιολογικοῦ διπόλου ἀποδεξιμότητα-έπαληθευσμότητα πού θά ἔξετάσουμε παρακάτω. Η βασική αὐτή φιλοσοφική θέση σχετίζεται μέ τή φύση τῆς μαθηματικῆς ἐποπτείας (ἐνόρασης)<sup>19</sup>.

#### 3.3.1. Στοιχεῖα τῆς φιλοσοφίας τῶν Ιντουισιονιστῶν

Γιά νά μπορέσει κανένας νά πάρει μιά ἴδεα τοῦ τί εἶναι τά Ιντουισιονιστικά μαθήματα, θά πρέπει νά περάσει μέσα ἀπό συγκεκριμένα νοητικά μονοπάτια πού φέρουν ἐντόνα τή σφραγίδα τοῦ δύσκολου γιά τόν ἀμύητο καί τοῦ σχετικά εὔκολου γιά τόν μυημένο στό συγκεκριμένο σύστημα τῶν ἰδεῶν πού κρύβεται πίσω τους. Τό σύστημα αὐτό ἰδεῶν ἀποτελεῖ καί τό καθαρά φιλοσοφικό σῶμα τῆς σχολῆς.

Μιά ἀπό τίς βασικές θέσεις τῶν Ιντουισιονιστῶν σχετίζεται μέ τήν αὐτονομία τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας καί τήν ἀνεξαρτησία της ἀπό συγκεκριμένα γλωσσικά συστήματα καί ἀπό τήν τυπική λογική πού αὐτά συνεπάγονται. Σέ ἀπόλυτη ἀντίθεση μέ τούς Λογικιστές, θεωροῦν πώς ή θεμελιώδης μαθηματική δραστηριότητα εἶναι προγλωσσική καί προλογική, μέ τήν ἔννοια πώς ή φύση της δέν ἔχαρταται ἀπό καί οὗτε ἀνάγεται σέ κάποιο λογικό ὑπόβαθρο συνδεδεμένο μέ κάποιο συγκεκριμένο σύστημα σήμανσης. Η μαθη-

18. Σύμφωνα μέ τόν Heyting, τό πρόγραμμα τοῦ Brouwer ἀφοροῦσε στήν: ἔξέταση τῶν νοητῶν μαθηματικῶν κατασκευῶν καθ’ ἐαυτῶν, χωρίς ἀναφορά σέ ἐρωτήματα πού ἀφοροῦν στή φύση τῶν κατασκευαζόμενων ἀντικειμένων, δπως, γιά παράδειγμα, ἀν αὐτά τά ἀντικειμένα ὑπάρχουν ἀνεξάρτητα ἀπό τή γνώση μας γι’ αὐτά.

B.L. A. Heyting. *Intuitionism: An Introduction*, North Holland, Amsterdam, 1971, σ. 1.

19. Η χρησιμοποίηση καί τῶν δύο λέξεων «ἐποπτεία» «ἐνόραση» γιά τήν ἀπόδοση τοῦ δρου «intuition», δφείλεται στήν ἀδυναμία μας νά ἐπιλέξουμε ἀνάμεσα στής δύο.

ματική δραστηριότητα γι' αυτούς δέν είναι άλογη, δμως προηγεῖται στόν καθορισμό τῶν κανόνων τοῦ παιχνιδιοῦ. Ἐτοι, οἱ συγκεκριμένοι λογικοί κανόνες πού θά προκύψουν θά πρέπει νά είναι τό δριμό προϊόν αυτῆς τῆς δραστηριότητας, ή ἐξέταση τῆς φύσης τῆς δοπίας θά πρέπει καὶ νά καθορίσει τά δρια δράσης αυτῶν τῶν κανόνων. Είναι ἀπαράδεκτο, γι' αυτούς, λογικές ἀρχές, δπως ή ἀρχή τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου, γιά παράδειγμα, πού προκύπτουν ἀπό τή σπουδή πεπερασμένων δλοτήτων, νά ἐπεκτείνονται σέ ἀπειρες δλοτήτες οἱ ὁποῖες είναι προβληματικές ἀπό τήν ίδια τους τή φύση. Ἡ ἀποδοχή ὑπαρξῆς τέτοιων δλοτήτων προϋποθέτει τό νοητικό ἀλμα τῆς ἀντικειμενοποίησης τοῦ ἀπείρου χωρίς τή δυνατότητα μίας βῆμα μέ βῆμα κατασκευῆς ή ἐλέγχου του.

Ἡ προτερότητα τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας σέ σχέση μέ τή γενικότερη γλωσσική καὶ λογική δραστηριότητα δφείλεται σύμφωνα μέ τόν Brouwer στήν προτερότητα τῆς θεμελιώδους καὶ διακριτῆς χρονικῆς ἐποπτείας (ἐνόρασης). ቩ βασική αυτή θέση είναι καντιανῆς προέλευσης καὶ σάν τέτοια ἀδιαφορεῖ γιά τήν φύση των καθ' ἔαυτά πραγμάτων. Σέ τελευταῖα ἀνάλυση, αυτό πού μετράει στό ἐπίπεδο τῆς γνώσης είναι ὁ τρόπος πού τά πράγματα καθ' ἔαυτά – ἄν υπάρχουν – είκονίζονται μέσα μας. ቩ θεμελιώδης διακριτή χρονική ἐποπτεία (ἐνόραση) ἀποτελεῖ ἐσωτερικό στοιχεῖο τοῦ νοῦ καὶ θά υπῆρχε ἀκόμη καὶ ἄν υποθέταμε πώς ὁ γνωστικός υποδοχέας ήταν ἀπόλυτα ἀποκλεισμένος ἀπό τήν δποιαδήποτε υπαρκτή ή μή ἐξωτερική πραγματικότητα. ቩ μετάπτωση ἀπό κάποια ἀτομική - μή περαιτέρω δηλαδή ἀναλύσιμη – γοητική πράξη αυτοσυνείδησης στήν ἐπόμενη τῆς είναι ἀρκετή γιά τήν ἐσωτερική ἐποπτεία τῆς δυαδικότητας, μέ τήν έννοια πώς ή τελευταία πράξη θά ἐμπεριείχε σάν στοιχεῖο τῆς τήν μνήμη τῆς προηγουμένης τῆς. Μιά τέτοια μετάπτωση μπορεῖ νά συμβαίνει μόνο διακριτά – δηλαδή βῆμα μέ βῆμα – καὶ δχι συνεχιστικά.

Σύμφωνα μέ τόν Brouwer οἱ ἀρχές τῆς κλασσικῆς τυπικῆς λογικῆς είναι γλωσσικές γενικεύσεις καὶ σάν τέτοιες μπορεῖ νά δηγοῦν σέ μή ἀντιφατικά ἀποτελέσματα πού, δμως, πολλές φορές δέν δικαιολογοῦνται, οὗτε στηρίζονται σέ διαδικασίες αὐστηρά καθορισμένες ἀπό τήν πεπερασμένης καὶ διακριτῆς ψήση τῶν γνω-

στικῶν μας ἀ-γλωσσικῶν καὶ προ-λογικῶν ἐργαλείων. Τά ἐργαλεῖα αυτά πρέπει νά ἔχουν ώς βάση τους τή θεμελιώδη πεπερασμένη καὶ διακριτή χρονική ἐποπτεία (ἐνόραση), πρέπει ἐπομένως νά μήν ἐπιτρέπουν τήν ἀποδοχή τῆς υπαρξῆς ἀντικειμενοποιημένων ἀπειρων δλοτήτων. ቩ κόμη καὶ οἱ φυσικοί ἀριθμοί, ώς ἀντικειμενοποιημένη καὶ τελειωμένη δλοτήτηα, δέν είναι ἀποδεκτοί, μέ τήν έννοια πώς υπάρχει πεπερασμένα ἐλέγχιμος ἀλγόριθμος γιά τήν κατασκευή κάθε φυσικού ἀριθμού, χωρίς νά υπάρχει ἀντίστοιχος ἀλγόριθμος κατασκευῆς τῆς δλοτήτηας τους σάν ίδιαίτερου καὶ ξεχωριστοῦ ἀντικειμένου. ቩσι, ή κλασσική καντοριανή συνολοθεωρητική ἀντίληψη – ἀντίληψη κατά βάση ἐκτατικοῦ χαρακτήρα – πρέπει νά είναι, καὶ είναι γιά τούς Ἰντουισιονιστές, ἐξοβελιστέα. Πᾶς θά μποροῦσαν ἀλλωστε νά δεχθοῦν τήν υπαρξη δντοτήτων, πού δέν μποροῦν νά κατασκευασθοῦν; Τό ἐρώτημα τῆς υπαρξῆς τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων γιά τούς Ἰντουισιονιστές ἔρχεται σέ δεύτερη μοίρα, μέ τήν έννοια πώς τούς είναι σχετικά ἀδιάφορη ή δντολογική μεταφυσική του διάσταση. ቩπό τήν ἀλλη μεριά δμως, στό καθαρά ἐπιστημολογικό ἐπίπεδο, δρίζουν τήν υπαρξη ώς συνώνυμη τῆς Ἰντουισιονιστικῆς κατασκευαστικότητάς τους. Παραμένει, βέβαια, τό ἐρώτημα πῶς καθορίζεται αυτή ή περίφημη κατασκευαστικότητα. ቩ ἀπάντηση σ' αυτό θά πρέπει νά ἀναβληθεῖ, ώς δτου δοῦμε πῶς λειτουργοῦν οἱ κλασσικοί λογικοί σύνδεσμοι στό Ἰντουισιονιστικό σύστημα.

Σύμφωνα μέ τόν Brouwer δύο βασικές ἀρχές - πράξεις συγκροτοῦν τό φιλοσοφικό υπόβαθμο τῶν Ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν. ቩ ἀναφορά καὶ συζήτηση τῆς δεύτερης ἀρχῆς-πράξης θά γίνει στό σημεῖο πού θά ἀσχοληθοῦμε μέ τόν δρισμό τῆς ἀκολουθίας ἥδη κατασκευασμένων μαθηματικῶν ἀντικειμένων. ቩ πρώτη ἀρχή-πράξη σχετίζεται μέ τήν περιγραφή καὶ τόν δρισμό τῆς διακριτῆς χρονικῆς ἐποπτείας (ἐνόρασης) καὶ ἀποτελεῖ τό θεμελιώδες μανιφέστο τῆς Ἰντουισιονιστικῆς σχολῆς. ቩς ἀκούσουμε δμως, τόν ίδιο τόν Brouwer νά τήν διατυπώνει:

Ἡ πρώτη πράξη τοῦ Ἰντουισιονισμοῦ διαχωρίζει τά μαθηματικά ἀπό τή γλώσσα τῶν μαθηματικῶν, ίδιαίτερα ἀπό τά φαινόμενα τῆς γλώσσας πού περιγράφονται ἀπό τή θεωρητική λογική, καὶ ἀναγνωρί-

ζει πώς τά ίντουισιονιστικά μαθηματικά είναι μιά θεμελιωδώς διγλωσσική δραστηριότητα τοῦ νοῦ πού έχει τίς ρίζες της στήν άντιληψη μιᾶς κίνησης τοῦ χρόνου, δηλαδή τῆς διάλυσης μιᾶς στιγμῆς τῆς ζωῆς σέ δύο διακριτά πράγματα, πού τό ξνα δίνει τή θέση του στό δόλλο διατηρούμενο δμως στήν μνήμη. "Αν αὐτή ή ἔτσι γεννημένη δυάδα ἀπογυμνωθεῖ ἀπό κάθε ποιότητα, παραμένει ή ἄδεια μορφή τοῦ υποβάθρου δλῶν τῶν δυάδων. Αυτό ἀκριβῶς τό υπόβαθρο, αὐτή ή ἄδεια μορφή, εἶναι ή βασική ἐποπτεία [ένόραση] τῶν μαθηματικῶν.<sup>20</sup>

"Ετσι, ή βασική ἐποπτεία (ένόραση) τῶν μαθηματικῶν συνδέεται μέ τήν χρονική ἐπαλληλία διακριτῶν νοητικῶν πράξεων καὶ ἀποτελεῖ τήν βάση τῆς ἐμφυτησίας μας μέ τούς φυσικούς ἀριθμούς. Στό σημεῖο αὐτό, συστηματοποιῶντας τίς παρατηρήσεις μας, θά μπορούσαμε νά ταξινομήσουμε τά θεμελιώδη χαρακτηριστικά αὐτῆς τῆς ἐποπτείας ως ἔξῆς:

α) Εἶναι κατά τρόπο θεμελιακό μιά δραστηριότητα σκεπτικού χαρακτήρα (thinking activity).

β) 'Ως κριτήριο ἀλήθειας έχει ξναν a priori χαρακτήρα. "Αν δηλαδή κάτι εἶναι ἀληθές σ' αὐτή τήν πρωτογενῆ σφαίρα τῆς ένόρασής μας, εἶναι ἀληθές ἐπειδή ἀκριβῶς συμβαίνει νά εἶναι αὐτό ἀκριβῶς πού εἶναι.

γ) Εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό δποιαδήποτε γλῶσσα. "Εδῶ λέγοντας γλώσσα ξννοοῦμε δποιαδήποτε δργανωμένο σύστημα σήμανσης. Οι ίντουισιονιστές πιστεύουν πώς ή ένόραση έχει προγλωσσικό χαρακτήρα. "Η ξννοια τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, γιά παράδειγμα, προηγεῖται δποιαδήποτε γλωσσικῆς διαδικασίας, δντας σύμφυτη μέ τήν διακριτή χρονική ἐπαλληλία (temporal succession) τῶν πνευματικῶν πράξεων. "Εδῶ πρέπει νά τονίσουμε πώς δ Brouwer δεχόταν τό παραπάνω ἐπηρεασμένος ἀπό τόν Kant, χωρίς δμως νά δέχεται ἀναγκαστικά καὶ τόν a priori χαρακτήρα τῆς χωρικῆς ἐπαλληλίας (spatial succession).

δ) Έχει ἀντικειμενικό χαρακτήρα, μέ τήν ξννοια δτι εἶναι ή ίδια γιά δλα τά σκεπτόμενα δντα. "Εδῶ θά πρέπει νά πούμε πώς μ' αὐτή τήν βασική παραδοχή οι ίντουισιονιστές ξεπερνοῦν τό πρό-

20. Βλ. A. Heyting (Ed.) L. E. J. Brouwer: *Collected Works*. Τόμ. 1, North-Holland, Amsterdam, 1975, σσ. 509-510.

βλημα τῆς συνεννόησης καὶ ἐπικοινωνίας πού εἶναι ίδιαίτερα δξύ σέ κάθε φιλοσοφική θεωρία πού μεταφέρει τό κέντρο τῆς προσοχῆς ἀπό τό ἀντικείμενο στό υποκείμενο τῆς γνώσης.

"Ἐχοντας λίγο ή πολύ καθορίσει τήν ξννοια τῆς ένόρασης, ἐρχόμαστε νά πούμε δύο λόγια γιά τήν μή ἀποδοχή ἀπό τούς ίντουισιονιστές τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου. Βέβαια, ή μή ἀποδοχή τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου ἔρχεται σάν ἀμεση συνέπεια τοῦ τρόπου μέ τόν δποιο βλέπουν τήν κατασκευαστικότητα στά μαθηματικά. "Ομως, πίσω ἀπ' αὐτό κρύβεται ή βασική τους ἀντίληψη πώς κακῶς ἐπεκτείνουμε ἀρχές πού εἶναι εδλογες γιά νοητικές διαδικασίες πού ἀπαιτοῦν πεπερασμένα (δς πρός τό πλῆθος τους) βήματα, σέ διαδικασίες πού ἀπό τήν ίδια τους τή φύση ἀπαιτοῦν δπειρα βήματα. Γι' αὐτούς μιά φράση σάν τήν παρακάτω, δέν εἶναι ούτε ἀληθής ούτε ψευδής· δέν έχει ἀπλῶς νόημα:

"Κάθε ἀνθρωπος εἶναι θνητός ή υπάρχει ξνας ἀνθρωπος πού εἶναι ἀθάνατος"

"Ἐλεγχος τῆς ἀλήθειας ή τοῦ ψευδοῦς τῆς πρότασης αὐτῆς θά σήμαινε γιά τους ίντουισιονιστές ἐλεγχο τῆς ἀλήθειας ή τοῦ ψεύδους κάθε μιᾶς ἀπό τίς ἐπί μέρους προτάσεις, πού συνδέονται μέ τόν διαξευκτικό σύνδεσμο «ή». Πιό συγκεκριμένα, ἔξετάζοντας τήν πρώτη ἐπί μέρους πρόταση «κάθε ἀνθρωπος εἶναι θνητός» διαπιστώνουμε πώς γιά τήν πιστοποίηση τῆς ἀλήθειας της, καί μέ τήν υπόθεση πώς τό ἀνθρώπινο γένος θά συνεχίσει νά υπάρχει ἐπ' ἀπειρον, ἀπαιτεῖται ἀπειρος χρόνος καὶ ἐπομένως εἶναι ἀδύνατη ή υπαρξη ἀλοριθμικοῦ ἐλέγχου της. "Αντίστοιχα γιά τήν πιστοποίηση τοῦ ψεύδους της ἀπαιτεῖται ἐπίσης ἀπειρος χρόνος, λόγω τῆς ἀναγκαίας ἀπειρης διάρκειας τῆς ζωῆς τοῦ τυχεροῦ ή τῶν τυχερῶν ἀθανάτων. "Ο ἐλεγχος τῆς δεύτερης ἐπί μέρους πρότασης ἐμφανίζει ἀκριβῶς τίς ίδιες δυσκολίες λόγω τῆς σχέσης ἀντιστροφῆς-δρνησης πού έχει μέ τήν πρώτη. Στό δύσπιστο ἀναγνώστη, πού θά ἀντιτάξει τό ἐπιχείρημα τῆς ίδιοτυπίας τοῦ παραδείγματος ἐξ αἰτίας τῆς παρεμβολῆς τῆς διάστασης πεπερασμένο-ἀπειρο στό ἐπίπεδο τῆς ίδιότητας «διάρκεια ἀνθρώπινης ζωῆς», εἶναι ἀρκετό νά είπωθει πώς παρεμφερεῖς, ἀν καὶ μικρότερης ξντασης, ἀξεπέραστες δυσκολίες υπάρχουν καὶ στό ἐπίπεδο περισσότερο καθημερινῶν τέτοιων προτάσεων, ἀρ-

κεῖ τό υπό ἔξέταση σύνολο ἀντικειμένων νά είναι ἀπειρο, χωρίς νά υπάρχει ἐμφανῆς ἀλγόριθμος ἔξέτασης δλων τῶν ἀντικειμένων του. Βέβαια δι κάποιος τυχαῖα διαπιστώσει τήν υπαρξη ἐνός ἀντιπαραδείγματος, πού νά διαιψεύδει μιά τυχοῦσα πρόταση τῆς μορφῆς  $\forall x(\phi(x))$ , τά πράγματα τελειώνουν ἐκεῖ. Ἐν δωμας ἔνα τέτοιο ἀντιπαράδειγμα δέν υπάρχει, η δέν μπορεῖ νά υπάρξει, η διαπίστωση τῆς ἀλήθειας μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς  $\forall x(\phi(x)) \vee \neg \forall x(\phi(x))$  είναι κυριολεκτικά ἀδύνατη.

Γιά τούς Ἰντουισιονιστές δέν υπάρχει ἔννοια ἀλήθειας δρισμένη σέ κάποιο μεταγλωσσικό ἐπίπεδο ἀνεξάρτητα ἀπό δποιαδή-ποτε ἔννοια ἀπόδειξης. Σύμφωνα μέ τό σύστημά τους, οι ἔννοιες ἀ-πόδειξης και ἀλήθειας συμφύρονται και συμπλέκονται ἀξεδιάλυτα. Ἡ ἀπόρριψη δλων τῶν συστημάτων σήμανσης σημαίνει ταύτιση τῆς ἔννοιας τῆς ἀλήθειας μέ τήν ἔννοια τῆς ἀπόδειξιμότητας. 'Υπαρκτό γι' αὐτούς σημαίνει κατασκευαστικά υπαρκτό. ቙ μή ἀποδοχή τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου ἔχει σάν συνέπεια τή μή ἀποδοχή δλων τῶν ἀπόδειξεων πού χρησιμοποιοῦν ἀπαγωγή σέ ἀ-τοπο καί, ἐπομένως, κάθε θεώρημα υπαρξης πού στήν ἀπόδειξη του χρησιμοποιεῖται κάτι τέτοιο δέν είναι θεώρημα, ἐκτός ἀν υποκατασταθεῖ η προηγούμενη ἀπόδειξη του μέ μιά ἀπόδειξη καθαρά κατασκευαστική. Γι' αὐτήν τήν ἴδιαίτερη ἔννοια κατασκευαστικότητας θά μιλήσουμε στήν ἐπόμενη παράγραφο. Στό μεταξύ θά δώσουμε μιά κλασσική ἀπόδειξη ἐνός ἀπλοῦ θεωρήματος, πού γιά τούς Ἰν-τουισιονιστές δέν είναι ἀπόδεκτή γιατί χρησιμοποιεῖται η ἀρχή ἀπό-κλεισης τοῦ τρίτου.

«Υπάρχουν δύο ἀρρητοί ἀριθμοί a και b, τέτοιοι δστε δ ἀριθμός a<sup>b</sup> νά είναι ρητός».

Ἀπόδειξη: Ἐστω δ ἀριθμός  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ . Ὁ ἀριθμός αὐτός είναι η ρητός η ἀρρητος. Ἐν είναι ρητός τότε τό πρόβλημα ἔχει τελειώσει. Ἐν δέν είναι τότε δ ἀριθμός  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$  είναι ρητός δπότε και πάλι τό πρόβλημα ἔχει τελειώσει.

Ἡ ἀπόδειξη αὐτή είναι, δπως είπαμε, ἀπαράδεκτη ἀπό πλευρᾶς Ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν γιατί χρησιμοποιεῖται σ' αὐτήν η ἀρχή τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου. Μιά παραδεκτή ἀπόδειξη θά μποροῦσε, γιά παράδειγμα, νά δείχνει μέ κατασκευαστικούς τρό-

πους πώς δ  $\sqrt{2}$  και δ  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  είναι ἀρρητοι και στή συνέχεια νά χρησιμοποιεῖ τό τελευταῖο κομμάτι τῆς προηγούμενης ἀπόδειξης.

### 3.3.2. Οι ἔννοιες τῆς κατασκευαστικότητας τῆς ἀπόδειξης και τῆς ἀ-λήθειας στά Ἰντουισιονιστικά μαθηματικά

Γιά νά μπορέσουμε νά καθορίσουμε τήν ἔννοια τῆς ἀπόδειξης στά Ἰντουισιονιστικά μαθηματικά, χρειάζεται νά δοῦμε πῶς λειτουργοῦν τά διάφορα λογικά σύμβολα σέ σχέση μέ τήν παραπάνω ἔννοια. Θά πρέπει δηλαδή νά καθορίσουμε γιά κάθε πρόταση μέσα στήν δποία κάποιο συγκεκριμένο λογικό σύμβολο παίζει τό ρόλο τοῦ βασικότερου τελεστή, τί σημαίνει η φράση «η πρόταση αὐτή είναι ἀποδειξιμή».

Σάν τέτοια λογικά σύμβολα θά θεωρήσουμε τούς γνωστούς μας ἡδη λογικούς συνδέσμους και τούς ποσοδεῖτες:

Σύνδεσμοι:

- ⊤ (ἀρνητη)
- ∨ (διάζευξη)
- ∧ (σύζευξη)
- (συνεπαγωγή)
- ↔ (ἰσοδυναμία)

Ποσοδεῖτες:

- ∃ (ὑπαρκτικός)
- ∀ (καθολικός)

Ἐδῶ θά πρέπει νά τονίσουμε πώς δ δποιοσδήποτε καθορισμός τοῦ ρόλου αὐτῶν τῶν λογικῶν συμβόλων θά πρέπει νά υπακούει στή γενική ἀρχή δτι, δεδομένης μιᾶς δποιασδήποτε κατασκευαστικῆς διαδικασίας, θά είμαστε σέ θέση νά τήν ἀναγνωρίσουμε σάν μιά δυνατή η δχι ἀπόδειξη μιᾶς δποιασδήποτε συγκεκριμένης πρότασης.

Ἐστω λοιπόν η πρόταση (A) ∨ (B). Θά λέμε πώς έχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς η μόνο ἀν έχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς A η μιά ἀπόδειξη τῆς B. Ἐν δηλαδή γιά παράδειγμα έχουμε τήν παρακάτω πρόταση τῆς θεωρίας ἀριθμῶν, «1=1 η

κάθε ἄρτιος μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν ἀθροισμα δύο πρώτων», τότε έχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξή της ἐπειδή μποροῦμε νά έχουμε στά χέρια μας μιά κατασκευαστική ἀπόδειξη τῆς πρότασης «1=1».

Έδω ἀκριβῶς θά πρέπει νά ποῦμε πώς οἱ Ἰντουισιονιστές ἀρνοῦνται τήν καθολικότητα τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου (δηλαδή ἀρνοῦνται τήν καθολική ἰσχύ προτάσεων τῆς μορφῆς  $(A) \vee \neg(A)$ ) γιατί ὑπάρχουν προτάσεις πού οὗτε γιά τίς ἀρνήσεις τους μποροῦμε νά βροῦμε κατασκευαστικά ἀποδεκτές ἀποδείξεις (τουλάχιστον στήν παροῦσα φάση). Ένα τέτοιο παράδειγμα θά μποροῦσε νά είναι ή περίφημη εἰκασία τοῦ Goldbach πού ἀναφέραμε καί προηγουμένως, δηλαδή ή πρόταση «κάθε ἄρτιος ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ σάν ἀθροισμα δύο πρώτων».

Άς θεωρήσουμε τώρα τήν πρόταση  $(A) \wedge (B)$ . Θά λέμε δτι έχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς  $(A) \wedge (B)$ , ἀν καί μόνο ἀν, έχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς  $A$  καί μιά ἀπόδειξη τῆς  $B$ .

Έδω ἀς ἀνοίξουμε μιά παρένθεση. Είναι προφανές πώς οἱ παραπάνω περιπτώσεις ἀντιμετωπίστηκαν δπως ἀκριβῶς θά ἀνέμενε κανείς, ἐπηρεασμένος ἀπό τόν τρόπο πού δροῦν οἱ σύνδεσμοι καί στήν κλασική λογική. Θέλουμε νά ποῦμε μ' αὐτό πώς μέχρι ἐδῶ δέν ὑπάρχει τίποτα παράξενο στόν τρόπο μέ τόν δποῖο ἀντιμετωπίζονται ἀπό τούς Ἰντουισιονιστές οἱ παραπάνω σύνδεσμοι. Τό ίδιο ἰσχύει καί στήν περίπτωση τοῦ ὑπαρκτικοῦ ποσοδείκτη, δπως θά δοῦμε ἀμέσως παρακάτω.

Έστω δτι έχουμε μιά πρόταση τῆς μορφῆς  $\exists x(\phi(x))$ . Γιά μεγαλύτερη εὐκολία ἀς ὑποθέσουμε πώς πρόκειται γιά μιά πρόταση τῆς γλώσσας τῆς θεωρίας τῆς ἀριθμητικῆς τοῦ Peano. Θά λέμε πώς έχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς  $\exists x(\phi(x))$ , ἀν γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό  $n$  έχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης  $\phi(n)$ , δπου με  $\eta$  παριστάνουμε τό γλωσσικό σύμβολο γιά τόν ἀριθμό  $n$ .

Ή δυσκολία ἀρχίζει ἀπό δῶ καί κάτω. Άς υποθέσουμε τώρα, πώς ή πρότασή μας έχει τήν μορφή  $(A) \rightarrow (B)$ . Ἀπόδειξη τῆς  $(A) \rightarrow (B)$  λέμε μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό μιά δποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς  $A$  σέ μιά ἀπόδειξη τῆς  $B$ . Κάθε τέτοια ἀπόδειξη δέν είναι τίποτα ἀλλο παρά μιά πράξη (κατα-

σκευαστικοῦ καί ἀναγνωρίσιμου χαρακτήρα) μετάβασης ἀπό ἀποδείξεις σέ ἀποδείξεις. Έχει λοιπόν ἀναγκαστικά μιά τέτοια πράξη τή σφραγίδα τοῦ πεπερασμένα ἐλέγξιμου, ώς πρός τά συγκεκριμένα βήματα πού κατά περίπτωση τήν ἀποτελοῦν. Πρέπει νά τονίσουμε, πώς δέν είναι σωστό νά παραλείψουμε τή λέξη «ἀναγνωρίσιμη» ἀπό τόν παραπάνω δρισμό, γιατί τότε θά μπορούσαμε ίσως νά έχουμε μιά κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό μιά δποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς  $A$  σε μιά ἀπόδειξη τῆς  $B$  χωρίς αὐτό νά σημαίνει, πώς θά μπορούσαμε μέ πεπερασμένα νοητικά βήματα νά τήν ἀναγνωρίσουμε σάν τέτοια.

Άς δοῦμε τώρα τήν περίπτωση, πού ή πρότασή μας έχει τή μορφή  $\forall x(\phi(x))$ . Ό δρισμός τῆς ἀπόδειξης τῆς  $\forall x(\phi(x))$  ἀκολουθεῖ τά ἵχνη τοῦ δρισμοῦ τῆς ἀπόδειξης γιάτην περίπτωση τῆς συνεπαγωγῆς. Ἀπόδειξη, λοιπόν, τῆς  $\forall x(\phi(x))$  λέμε μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό ἐναν δποιονδήποτε φυσικό ἀριθμό  $n$  σέ μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης  $\phi(n)$ . Γιά τόν παραπάνω δρισμό, ίσχύουν γενικά οἱ παρατηρήσεις πού κάναμε γιά τόν δρισμό τῆς ἀπόδειξης τῆς πρότασης  $(A) \rightarrow (B)$ .

Στούς δρισμούς τῶν ἀπόδειξεων τῶν προτάσεων τῆς μορφῆς  $\exists x(\phi(x))$  καί  $\forall x(\phi(x))$  θεωρήσαμε γιά εὐκολία, πώς τό πεδίο μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς  $x$  ἔταν οἱ φυσικοί ἀριθμοί. Κάτι τέτοιο δέν ίσχύει γενικά. Έτσι, ἀν τό πεδίο μεταβολῆς τῆς μεταβλητῆς  $x$  δέν είναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί, γιά νά έχουμε μιά ἀπόδειξη τῆς  $\exists x(\phi(x))$  πρέπει μαζί μέ τό ἀντικείμενο α καί τήν ἀπόδειξη τῆς  $\phi(a)$ , νά μᾶς δώσουν καί μιά ἀπόδειξη Ἰντουισιονιστικά ἀποδεκτή, πώς τό ἀντικείμενο α ἀνήκει στό συγκεκριμένο πεδίο μεταβολῆς τῆς  $x$ . Όμοια μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης  $\forall x(\phi(x))$  είναι μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό ἐνα δποιοδήποτε ἀντικείμενο α καί ἀπό μιά ἀπόδειξη Ἰντουισιονιστικά ἀποδεκτή πώς τό α ἀνήκει στό δοσμένο πεδίο μεταβολῆς, σέ μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης  $\phi(a)$ .

Άς υποθέσουμε τώρα πώς έχουμε στά χέρια μας μιά πρόταση τῆς μορφῆς  $(A) \leftrightarrow (B)$ . Μιά ἀπόδειξη τῆς ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἀποδείξεις. Ή πρώτη θά ἀφοροῦσε τήν πρόταση  $(A) \rightarrow (B)$  καί ή δεύτερη θά ἀφοροῦσε τήν πρόταση  $(B) \rightarrow (A)$ . Έτσι θά λέγαμε πώς έ-

χονμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς  $(A) \leftrightarrow (B)$  δν και μόνον δν διαθέταμε δύο ἀναγνωρίσιμες κατασκευαστικές διαδικασίες μετάβασης (a) ἀπό μιά δποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς A σέ μιά ἀπόδειξη τῆς B και (b) ἀπό μιά δποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς B σέ μιά ἀπόδειξη τῆς A.

Τελικά μᾶς μένει μιά ἀκόμα περίπτωση. Έστω δτι ή πρόταση μας ἔχει τήν μορφή  $\gamma(A)$ . Μιά ἀπόδειξη τῆς δέν είναι τίποτε ἄλλο παρά μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό μιά δποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς πρότασης A σέ μιά ἀπόδειξη κάποιας ἀντίφασης. Αὐτός, βέβαια, δ δρισμός δέν είναι ἀπόλυτα ικανοποιητικός γιατί μιά ἀντίφαση γίνεται συνήθως ἀντιληπτή σά μιά πρόταση τῆς μορφῆς  $(B) \wedge \gamma(B)$ , πράγμα πού πιθανῶς νά μᾶς κάνει νά νομίσουμε δτι δρίζουμε τήν ἀρνηση συναρτήσει τοῦ ἔαυτοῦ τῆς. Μποροῦμε δμως νά ἀποφύγουμε αὐτή τή δυσκολία μέ τόν ἔξης τρόπο. Μποροῦμε νά διαλέξουμε μιά εδκολα κατασκευαστικά ἀναγνωρίσιμη ἀντιφατική πρόταση, δπως ή  $0 = 1$ , και νά δρίσουμε μιά ἀπόδειξη τῆς  $\gamma(A)$  σάν μιά ἀπόδειξη τῆς  $(A) \rightarrow (0 = 1)$ . Αὐτό θεωρητικά είναι ἀμεμπτο γιατί μποροῦμε εδκολα νά δοῦμε, πώς κάθε ἀντιφατική πρόταση μπορεῖ νά προκύψει κατασκευαστικά ἀπό τήν  $0 = 1$ . Έδω βέβαια, μιλᾶνε γιά προτάσεις τῆς γλώσσας τῆς θεωρίας τῆς κατά Peano ἀριθμητικῆς. Άν δ παραπάνω ίσχυρισμός δέν φαίνεται τελείως προφανής μποροῦμε νά συμφωνήσουμε νά θεωροῦμε κάθε ἀπόδειξη τῆς  $0 = 1$  ταυτόχρονα και σά μιά ἀπόδειξη δποιαδήποτε ἄλλης πρότασης, χωρίς αὐτό νά δημιουργεῖ κινδύνους γιά τό σύστημά μας.

Άπο δσα εἰπώθηκαν μέχρι τώρα προκύπτει, πώς τό Ἰντουιστικό σύστημα δχι μόνο ἀμφισβητεῖ τή δεδομένη μαθηματική πρακτική και τούς κανόνες τῆς, ἄλλα φιλοδοξεῖ νά προτείνει συγκεκριμένες ἐναλλακτικές λύσεις. Οι προτάσεις τῶν Ἰντουισιονιστῶν είναι κυριολεκτικά ρηξικέλευθες και ἀπαιτοῦν μιά συγκριτική ἔξετασή τους κάτω ἀπό τό φῶς τῶν δεδομένων κανόνων μέ τή βοήθεια τῶν δποίων συντελεῖται ή κλασική μαθηματική πράξη. Ή κατασκευαστικότητα, στηριγμένη στήν προφάνεια τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, είναι γι' αὐτούς ένα αίτημα γιά ἔξοβελισμό δλων ἐκείνων τῶν ἀποδείξεων πού στηρίζονται στήν ἀρχή τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου και πού κατ' ἐπέκταση κάνουν χρήση τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο.

Έτσι ένα τεράστιο μέρος κλασικῶν μαθηματικῶν θεωρημάτων πού κατοχυρώνουν τήν δπαρξη κάποιων συγκεκριμένων μαθηματικῶν ἀντικειμένων δφείλουν νά ἀπορριφοῦν γιατί στίς ἀπόδειξεις τους χρησιμοποιεῖται μέ τρόπο θεμελιώδη ή ἀπαγωγή σέ ἄτοπο. Στίς ἀπόδειξεις αὐτές δέν κατασκευάζεται τό συγκεκριμένο μαθηματικό ἀντικείμενο, ἄλλα ἀποδεικνύεται ή δπαρξη του μέ τόν ἔξης τρόπο: 'Η ἀπόδειξη ξεκινάει μέ τήν υπόθεση πώς τό υπό συζήτηση ἀντικείμενο δέν υπάρχει καί, κάτω ἀπό ἐπιτρεπτές γιά τήν κλασική μαθηματική πρακτική ἀποδεικτικές διαδικασίες, περατώνεται μέ τήν τελική συνεπαγωγή κάποιας ἀντίφασης. 'Η κατάληξη σ' αὐτήν τήν ἀντίφαση —μέ τήν υπόθεση πάντα πώς στήν διάρκεια τῆς ἀπόδειξης δέν ᔁχει παρεισφρύσει κάποιο λάθος στήν χρήση τῶν ἐπιτρεπτῶν ἀποδεικτικῶν κανόνων — σημαίνει πώς ή ἀρχική υπόθεση τῆς μή δπαρξης τοῦ υπό συζήτηση ἀντικειμένου ήταν λανθασμένη. Στό σημεῖο αὐτό τό συμπέρασμα ἔρχεται ἀβίαστα γιά τόν κλασικά σκεπτόμενο μαθηματικό. Δεδομένου πώς τό ἀντικείμενο ή υπάρχει ή δέν υπάρχει, και πώς ή υπόθεση τῆς μή δπαρξης του δδηγεῖ σέ ἀντιφάσεις, θεωρεῖ τόν ἔαυτό του υποχρεωμένο νά ἀπαντήσει καταφατικά στό ἔρωτημα πού σχετίζεται μέ τήν δπαρξη του. 'Η θεμελιώδης πίστη τῶν κλασικά σκεπτομένων μαθηματικῶν στήν καθολική ίσχυ τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου τούς ἐπιτρέπει, μ' ἄλλα λόγια, νά ἀποδεικνύουν θεωρήματα δπαρξης, χωρίς νά ἀπαιτεῖται ή κατασκευή τοῦ ἀντικειμένου τοῦ δποίου ή δπαρξη κατοχυρώνεται μέ τόν παραπάνω τρόπο. "Ομως κάτι τέτοιο, σύμφωνα μέ τούς Ἰντουισιονιστές, είναι βαθύτατα λανθασμένο, γιατί ή ἀρχή τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου δέν ᔁχει και δέν μπορεῖ νά ᔁχει καθολική ίσχυ. 'Ως ἀρχή ἀποτελεῖ τό προϊόν ἀνεπίτρεπτης γενίκευσης ἀπό τό ἐπίπεδο πεπερασμένων στό ἐπίπεδο ἀπειρων δλοτήτων, πού γιά τήν δπαρξη τους και γιά τήν ἔλεγχιμότητά τους υπάρχουν ἀνοικτά και ἀναπάντητα ἔρωτήματα.

Οι διαφορές τῶν Ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν ἀπό τά κλασικά είδαμε πώς, μεταξύ ἄλλων, ἐντοπίζονται και στόν τρόπο μέ τόν δποίο φιλοδοξούν τά πρώτα νά περιχαρακώσουν τή λειτουργία τῶν λογικῶν συνδέσμων και τῶν ποσοδεικῶν. Οι περισσότερο προβληματικές περιπτώσεις είναι αὐτές τῆς ἔρμηνείας τοῦ τρόπου

τῆς λειτουργίας τοῦ συμβόλου τῆς συνεπαγωγῆς – καὶ κατ' ἐπέκταση τοῦ συμβόλου τῆς ἰσοδυναμίας –, τοῦ συμβόλου τῆς ἀρνησης καὶ τοῦ συμβόλου  $\forall$  (καθολικός ποσοδείκτης).

Στά πλαίσια τῶν κλασικῶν μαθηματικῶν καὶ σέ ἀντιστοιχία μέτόν τρόπο λειτουργίας τῆς συνεπαγωγῆς στό σημασιολογικό ἐπίπεδο (ἀληθοπίνακες), μιὰ πρόταση τῆς μορφῆς (A) → (B) θεωρεῖται πώς ἔχει ἀπόδειχθεῖ, ἀν ὑπάρχει μιὰ ἀπόδειξη τῆς ἀρνησης τῆς A, ἢ ὑπάρχει μιὰ ἀπόδειξη τῆς B. Στά πλαίσια τῶν Ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν μιὰ ἀπόδειξη μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς (A) → (B) δέν μπορεῖ νά ἔξαντλεῖται στήν ἀπόδειξη τῆς ἀρνησης τῆς πρώτης ἢ στήν ἀπόδειξη τῆς δεύτερης προτασιακῆς συνιστώσας τῆς ἀρχικῆς πρότασης. 'Οφείλει καὶ πρέπει νά εἶναι ἡ εδρεση ἐνός ἐλέγχιμου ἀλγορίθμου μετάβασης ἀπό ὅποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς πρώτης σέ κάποια ἀπόδειξη τῆς δεύτερης. Έτσι τό πρόβλημα τῆς ἀπόδειξμότητας τῆς πρότασης (A) → (B), μεταφέρεται καὶ ἀνάγεται, μέτρον μετάβασης ἀπό ὅποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς πρώτης σέ κάποια κατασκευαστικά ἀναγνωρίσμη διαδικασία μετάβασης ἀπό ὅποιαδήποτε μέλος τῆς διαδικασίας τῶν ἀπόδειξεων τῆς πρώτης προτασιακῆς συνιστώσας, σέ κάποιο τυχαίο καὶ διαφορετικό κατά περίπτωση, μέλος τῆς διαδικασίας τῶν ἀπόδειξεων τῆς δεύτερης.

Ο τρόπος λειτουργίας τῆς ἀρνησης στά πλαίσια τῶν κλασικῶν μαθηματικῶν παρουσιάζει τά ἴδια χαρακτηριστικά ἀντιστοιχίας ἀνάμεσα στό σημασιολογικό καὶ συντακτικό ἐπίπεδο πού παρουσιάζει καὶ ἡ συνεπαγωγή. Έτσι ἀπόδειξη μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς  $\neg(A)$  πολλές φορές δέν εἶναι τίποτε δὲλλο παρά ἡ εδρεση μιᾶς ἀπόδειξης πού δέν ἀποκλείει ἀλλά χρησιμοποιεῖ μέτρον οὐσιαστικό τήν ἀπαγωγή σέ ἄτοπο καὶ πού, μέ τήν ὑπόθεση πώς ἰσχύει ἡ A, μιᾶς ὀδηγεῖ σέ κάποια ἀντίφαση. Μιά τέτοια διαδικασία βρίσκεται σέ ἀμεση συμφωνία μέ τόν τρόπο πού λειτουργοῦν οἱ ἀληθοπίνακες,

21. Στό σημεῖο αυτό πρέπει νά τονισθεῖ πώς ἡ χρήση τῆς λέξης «διάλογος» ἔγινε γιά λόγους εὐκολότερης ἐπικοινωνίας ἀνάμεσα στόν γράφοντα καὶ στούς ἀναγνῶστες αυτοῦ τοῦ βιβλίου καὶ δέν πρέπει νά χρεωθεῖ στούς Ἰντουισιονιστές, οἱ ὅποιοι ἀποφεύγουν συνολοθεωρητικῆς καὶ ἀριθμητικῆς μορφῆς ἐκφράσεις.

σύμφωνα μέ τούς ὅποιους ἡ ἀπόδοση τῆς ἀληθοτιμῆς F στήν πρόταση A ὀδηγεῖ ἀναπόφευκτα στήν ἀπόδοση τῆς ἀληθοτιμῆς T στήν πρόταση  $\neg(A)$ . 'Υπάρχει, βέβαια, περίπτωση ἡ ἀπόδειξη μιᾶς πρότασης τῆς μορφῆς  $\neg(A)$  νά ἀκολουθήσει διαδρομές πολύ πιό ἀμεσες ἀπ' αυτήν πού περιγράψαμε πιό πάνω. 'Ο λόγος, δμως, πού ἐπισημάναμε αυτή τήν εἰδική μορφή ἀπόδειξης τῆς  $\neg(A)$ , διφεύλεται στήν ἀνάγκη τονισμοῦ μιᾶς φαινομενικῆς διαδικασίας τῆς μέ τόν ἀποδεκτό γιά τούς Ἰντουισιονιστές δρισμό ἀπόδειξης τῆς  $\neg(A)$ . Έτσι γιά τούς Ἰντουισιονιστές μιὰ ἀπόδειξη τῆς  $\neg(A)$  εἶναι ἔνας γενικός, κατασκευαστικά ἀναγνωρίσμιος ἀλγορίθμος μετατροπῆς μιᾶς ὅποιασδήποτε ἀπόδειξης τῆς A σέ μιὰ ἀπόδειξη κάποιας ἀντίφασης. 'Η διαφορά τῆς Ἰντουισιονιστικῆς αυτῆς ἀντίληψης μέ τήν κλασική διφεύλεται, σέ τελευταία ἀνάλυση, στά ἔξης δύο πράγματα : (α) στό αἴτημα πώς μιὰ ἀπόδειξη τῆς  $\neg(A)$  πρέπει νά εἶναι ἡ εδρεση ἐνός γενικοῦ ἀλγορίθμου μετατροπῆς ἀπόδειξεων τῆς A σέ ἀποδείξεις κάποιας ἀντίφασης καὶ δχι στήν εδρεση μιᾶς περιστασιακῆς διαδρομῆς μετάβασης ἀπό τήν υπόθεση τῆς ἰσχύος τῆς A σέ κάποια ἀντίφαση καὶ (β) στό αἴτημα γύρω ἀπό τή φύση αυτοῦ τοῦ ἀλγορίθμου, πού πρέπει νά εἶναι κατασκευαστικός καὶ πεπερασμένα ἐλέγχιμος, ἀποκλείοντας διαδικασίες μέσα ἀπό τίς δοποῖς μποροῦν νά παρεισφρύσουν ἀμφιλεγόμενες καὶ ἀπαγορευμένες ἀρχές, δπως ἡ ἀρχὴ ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου.

Ο Ἰντουισιονιστικός δρισμός τῆς ἀπόδειξης προτάσεων τῆς μορφῆς  $\forall \varphi(x)$  εἶναι λιγότερο δύσπεπτος διαφέροντας ἀπό τόν κλασικό στό βαθμό πού ἀπαιτεῖ ξανά τήν εδρεση ἐνός γενικοῦ κατασκευαστικοῦ ἀλγορίθμου μετάβασης ἀπό ὅποιαδήποτε δύσκολα ἡ ενκολα ἐντοπιζόμενο στοιχεῖο α τοῦ πεδίου μεταβολῆς (δρισμοῦ) τῆς μεταβλητῆς x, σέ κάποια ἀπόδειξη τῆς φ(a). Κάτι τέτοιο δέν εἶναι καὶ πολύ μακριά ἀπό τό πνεῦμα τοῦ ἀποδεικτικοῦ κανόνα γενίκευσης τῆς κλασικῆς λογικῆς<sup>22</sup>. Τέλος, δ Ἰντουισιονιστικός δρισμός τῆς ἀπόδειξης προτάσεων τῆς μορφῆς  $(A) \leftrightarrow (B)$ , εἶναι ἀπόλυτη.

22. 'Η θεμελιωδέστερη διαφορά διφεύλεται καὶ ἔδω στίς συγκεκριμένες ἀπαιτήσεις τῶν Ἰντουισιονιστῶν γύρω ἀπό τή φύση τοῦ ἀλγορίθμου αυτοῦ.

τα ἔξαρτημένος ἀπό τὸν δρισμό ἀπόδειξης τῆς συνεπαγωγῆς καὶ ἔτσι οἱ παρατηρήσεις πού θά μποροῦσαν νά γίνουν γύρω ἀπ' αὐτὸν εἶναι ἐντελῶς προφανεῖς.

Ἡ ἔννοια τῆς ἀλήθειας, δπως ἡδη εἰπώθηκε, εἶναι γιά τοὺς Ἰντουισιονιστές ἀπόλυτα συνδεδεμένη μέ τὴν ἔννοια τῆς ἀπόδειξης. Στά κλασικά μαθηματικά ὑπάρχουν δύο σαφῶς διακεκριμένα ἐπίπεδα πάνω στά δποῖα ἀρθρώνεται ἡ μαθηματική πρακτική. Τό ἔνα ἐπίπεδο εἶναι τὸ συντακτικό στό δποῖο ἀνήκει ἡ ἔννοια τῆς ἀπόδειξης καὶ τό ἄλλο εἶναι τὸ σημασιολογικό στό δποῖο ἀνήκει ἡ ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας. Οἱ δύο αὐτές ἔννοιες συνδέονται μέ τό κλασικό θεώρημα πληρότητας τοῦ Gödel πού ἀναφέρεται στίς πρωτοβάθμιες γλῶσσες καὶ θεωρίες, μέ τρόπο πού νά νομιμοποιεῖται τό κλασικό μαθηματικό παιχνίδι μεταβάσης ἀπό διαδικασίες ἀποδειξιμότητας σέ διαδικασίες ἐπαλήθευσιμότητας καὶ ἀντίστροφα. Στά Ἰντουισιονιστικά μαθηματικά δέν ὑπάρχουν δύο ἐπίπεδα. ᩴ μαθηματική δραστηριότητα εἶναι ἔνιαία καὶ ὁ χῶρος τῆς εἶναι αὐτός τῶν νοητῶν, αὐτηρά περιχαρακωμένων, κατασκευῶν. Ὑπαρκτό εἶναι τό Ἰντουισιονιστικά κατασκευάσμο καὶ ἀληθινό τό Ἰντουισιονιστικά ἀποδείξιμο. Γιά τοὺς Ἰντουισιονιστές δέν ἀπαιτεῖται κάποιο θεώρημα πληρότητας –τουλάχιστον στή μορφή καὶ στό πνεῦμα τοῦ κλασικοῦ θεωρήματος τοῦ Gödel– γιά τή δικαίωση τῆς Ἰντουισιονιστικῆς μαθηματικῆς πρακτικῆς. ᩴ ἰδια ἡ Ἰντουισιονιστική μαθηματική πρακτική εἶναι δ φορέας τῆς ἀλήθειας τῆς. Δέν χρειάζεται ἔνα μοντελοθεωρητικό, σημασιολογικό (καὶ γιά πολλούς φιλοσοφικά πλατωνικό) μεταεπίπεδο πάνω στό δποῖο νά τοποθετήσει τήν ἔννοια τῆς ἀλήθειας. Οὔτε ἔχει ἀνάγκη τήν ὑπαρξη ἀντίστοιχιῶν<sup>23</sup> ἀνάμεσα στό συντακτικό καὶ σημασιολογικό αὐτό μεταεπίπεδο γιά νά νομιμοποιηθεῖ ὡς δραστηριότητα. Ὑπάρχει, βέβαια, τό γενικότερο ἐρώτημα τῆς συμφωνίας ἀνάμεσα σ' αὐτούς πού παράγουν τήν Ἰντουισιονιστική ἀλήθεια. Τό σημασιολογικό μεταεπίπεδο, πέρα ἀπό τόν καθαρά λειτουργικό τοῦ χαρακτήρα στά πλαίσια μιᾶς τυπο-

23. Ὁπως αὐτές πού, γιά παράδειγμα, μιά θεωρία ἀλήθειας κατά Tarski θά ἀπαιτοῦσε.

ποιημένης μεταθεωρίας, ἔχει καθαρά πλατωνικές καταβολές πού δροῦν κατευναστικά, δταν ἡ ἀντικειμενικότητα καὶ τό δμοιότροπο τῆς μαθηματικῆς σκέψης ἀμφισβητοῦνται. Λειτουργεῖ σάν τό πλατωνικό σύμπαν τῶν Ἰδεῶν, πού δέν δημιουργεῖται ἀλλά ἀνακαλύπτεται ἀπό καθένα χωριστά. Αὐτό πού ἀνακαλύπτεται, δντας ἀνεξάρτητο ἀπό αὐτόν πού τό ἀνακάλυψε, μπορεῖ νά ἀποτελεῖ τό κοινό ἀντικείμενο συνεννόησης. Αὐτό πού δημιουργεῖται, ἔξαρτώμενο ἀπό αὐτόν πού τό δημιούργησε, δέν μπορεῖ νά εἶναι τό κοινό ἀντικείμενο συνεννόησης, ἐκτός ἂν μιά ἀπό τίς ἀρχικές ἀξιωματικές ὑποθέσεις του ἀντίστοιχου φιλοσοφικοῦ συστήματος εἶναι πώς οἱ δημιουργοί εἶναι ἔτσι κατασκευασμένοι, δστε νά δημιουργοῦν δμοιότροπα. Μιά τέτοια ὑπόθεση ἀνήκει καὶ στό Ἰντουισιονιστικό φιλοσοφικό σύστημα, συνοδεύεται δέ ἀπό τήν πίστη πώς ἡ ἀξιολόγηση τῆς μαθηματικῆς δραστηριότητας ποτέ δέν εἶναι ἐσωτερικό θέμα τῆς ἰδιας, δπως τό παρακάτω ἀδάφιο ἀπό τό βιβλίο του Heyting *Intuitionism: An Introduction* ἀποκαλύπτει:

Κατ' ἀρχήν οἱ μαθηματικές μου σκέψεις ἀνήκουν στήν προσωπική μου νοητή πραγματικότητα καὶ περιορίζονται μέσα στά πλαίσια τοῦ νοῦ μου, δπως καὶ κάθε ἄλλη σκέψη μου. Είμαστε γενικά πεπεισμένοι δτι καὶ οἱ ἄλλοι σκέπτονται ἀνάλογα μ' ἐμᾶς καὶ δτι μποροῦν νά μᾶς καταλάβουν δταν ἐκφραζόμαστε στά πλαίσια μιᾶς γλώσσας. Ἀπό τήν ἄλλη μεριά ἔρουμε πώς δέν είμαστε ποτέ ἀπόλυτα σίγουροι δτι μᾶς ἔχουν καταλάβει χωρίς λάθη. Σ' αὐτόν τόν κανόνα τά μαθηματικά δέν ἀποτελοῦν ἔξαιρεση ... Τό χαρακτηριστικό τῆς μαθηματικῆς σκέψης εἶναι, πώς δέν εἶναι φορέας ἀλήθειας γιά τόν ἐξωτερικό κόσμο, ἀλλά πώς ἐνδιαφέρεται μόνο γιά νοητές κατασκευές. Σ' αὐτό τό σημεῖο θά πρέπει νά κάνουμε ἔνα διαχωρισμό ἀνάμεσα στήν ἀπλή μαθηματική πρακτική καὶ στήν ἀξιολογική ἀποτίμησή της. Γιά νά κατασκευάσουμε μαθηματικές θεωρίες δέν χρειάζόμαστε κανένα φιλοσοφικό προαπαιτούμενο, ἡ ἀξία, δμως, πού ἀποδίδουμε σ' αὐτή τή δραστηριότητα ἔξαρτᾶται ἀπό τίς φιλοσοφικές μας ἰδέες<sup>24</sup>.

Στή συνέχεια θά δώσουμε κάποια παραδείγματα Ἰντουισιονιστικῶν ἀποδείξεων δρισμένων πολύ γνωστῶν προτάσεων τῶν κλα-

24. Βλ. σσ. 8-9.

σικῶν μαθηματικῶν, καθώς καὶ δρισμένα παραδείγματα κλασικῶν ταυτολογιῶν πού σύμφωνα μέ τους Ἰντουισιονιστές δέν εἶναι γενικά ἀπόδειξιμες καί, ἐπομένως, δέν εἶναι γενικά παραδεκτές.

### 3.3.3 Ἐπαγωγή, ἀξίωμα ἐπιλογῆς καὶ μερικές ταυτολογίες, πού δέν εἶναι ταυτολογίες

Εἶναι γνωστό πώς ἔνα βασικό ἔργαλεῖο γιά τήν ἀπόδειξη προτάσεων στήν ἀριθμητική τοῦ Peano εἶναι καὶ ἡ μέθοδος τῆς Ἐπαγωγῆς. Ὄταν κανεὶς θέλει νά ἀπόδειξει πώς κάποια ἰδιότητα ἰσχύει γιά δλους τούς φυσικούς ἀριθμούς, προσπαθεῖ συνήθως νά ἀπόδειξει πώς ἡ ἰδιότητα ἰσχύει γιά τό πρῶτο φυσικό ἀριθμό (τό 0 ἢν θεωρήσουμε τό 0 σάν φυσικό ἀριθμό ἢ τό 1 ἢν δχι) καὶ στή συνέχεια προσπαθεῖ νά ἀπόδειξει πώς ἡ ἰδιότητα ἰσχύει γιά τό φυσικό ἀριθμό  $n+1$  μέ τήν υπόθεση πώς ἡδη ἰσχύει γιά τό φυσικό  $n$ . Αὐτή ἡ διαδικασία τοῦ ἐπιτρέπει νά συμπεράνει πώς ἡ ἰδιότητα ἰσχύει γιά κάθε φυσικό ἀριθμό. Στά κλασικά μαθηματικά δέν ὑπάρχει κανένα πρόβλημα μ' αὐτή τή μέθοδο. Ἀλλωστε εἶναι θεσμοθετημένη κατάλληλα, μιά καὶ στηρίζεται σ' ἔνα βασικό ἀξιωματικό σχῆμα πού συναντοῦμε στόν κατάλογο τῶν ἀξιωμάτων τῆς ἀριθμητικῆς τοῦ Peano.

Τό πρόβλημα, λοιπόν, εἶναι πᾶς ἀντιλαμβάνονται οἱ Ἰντουισιονιστές αὐτή τήν ἀρχή. Θά πρέπει ἐδῶ νά ποῦμε πώς δχι μόνο τή δέχονται, ἀλλά δέν ἔχουν ἀνάγκη νά θεσμοθετήσουν τήν ἀποδοχή της, γιατί μπορούν νά ἀπόδειξουν δτι ἰσχύει στά πλαισία του συστήματός τους. Μ' αὐτό θέλω νά πῶ δτι ἡ ἀρχή τῆς Ἐπαγωγῆς εἶναι ἔνα συγκεκριμένο θεώρημα τῶν Ἰντουισιονιστικῶν μαθηματικῶν.

Ἄς δοῦμε δμως λεπτομερέστερα τόν παραπάνω ἰσχυρισμό. Ἡ ἀρχή τῆς Ἐπαγωγῆς γιά μιά συγκεκριμένη ἰδιότητα  $\phi(x)$ , δπως ἔχουμε δεῖ καὶ σέ προηγούμενες εὐκαιρίες, μπορεῖ νά διατυπωθεῖ μέ τόν παρακάτω τρόπο.

$$\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x+1)) \rightarrow \forall x(\phi(x))$$

Ο τύπος πού γράψαμε ἔχει τή μορφή  $(A) \rightarrow (B)$ . Ἐτσι, γιά νά μποροῦμε νά ἰσχυριστοῦμε πώς στά χέρια μας ἔχουμε μιά ἀπόδειξή του, θά πρέπει νά βροῦμε μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδι-

κασία, πού θά ἐπιτρέπει τή μετάβαση ἀπό μιά τυχούσα ἀπόδειξη τοῦ A σέ μιά ἀπόδειξη τοῦ B.

Ἐστω λοιπόν πώς ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τοῦ  $\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x+1))$ . Αὐτό σημαίνει πώς ἔχουμε στά χέρια μας μία ἀπόδειξη τοῦ  $\phi(0)$  καὶ μία ἀπόδειξη τοῦ  $\forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x+1))$ . Ἐχουμε, δηλαδή, στά χέρια μας μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό ἐναν δποιονδήποτε φυσικό ἀριθμό σέ μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης  $\phi(n) \rightarrow \phi(n+1)$ . Αὐτό σημαίνει πώς γιά  $n=0$  ἔχουμε μιά ἀπόδειξη τῆς πρότασης  $\phi(0) \rightarrow \phi(1)$ . Ἐχοντας, δμως, στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τοῦ  $\phi(0)$ , μποροῦμε νά συμπεράνουμε πώς ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς  $\phi(1)$ . Αὐτό μπορεῖ νά συνεχιστεῖ, πράγμα πού σημαίνει πώς γιά δποιονδήποτε φυσικό ἀριθμό  $n$  μποροῦμε νά ἔχουμε μιά ἀπόδειξη τῆς  $\phi(n)$ . Αὐτό, δμως, σημαίνει μέ τή σειρά του πώς ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό ἐναν δποιονδήποτε φυσικό ἀριθμό  $n$  σέ μιά ἀπόδειξη τῆς  $\phi(n)$ , ἔχουμε δηλαδή, στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς  $\forall x\phi(x)$ .

Ἡ διαδικασία, δμως, πού συνολικά περιγράψαμε, εἶναι μιά ἀναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης ἀπό μιά δποιαδήποτε ἀπόδειξη τῆς  $\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x+1))$  σέ μιά ἀπόδειξη τῆς  $\forall x(\phi(x))$ . Μά αὐτό ἀκριβῶς σημαίνει πώς ἔχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τῆς

$$\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x+1)) \rightarrow \forall x(\phi(x)).$$

Ἄς δοῦμε τώρα τό ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς, ἔνα καθαρά συνολοθεωρητικό ἀξίωμα, γιά τό δποιο ἔρουμε πιά πώς δέν μποροῦμε νά ἀπόδειξουμε ούτε τό ἴδιο ούτε τήν ἀρνησή του ἀπό τά ἀξιώματα τῆς κατά Zermelo-Fraenkel συνολοθεωρίας.

Τό ἀξίωμα αὐτό λέει περίπου τά ἔξης: *Ἄν {Ai | i ∈ I} εἶναι μιά οἰκογένεια μή κενῶν καὶ ζένων μεταξύ τους συνόλων, τότε ὑπάρχει ἔνα σύνολο A πού περιέχει ἔνα ἀκριβῶς στοιχεῖο di ἀπό κάθε Ai. Σύμφωνα μέ αὐτό τό ἀξίωμα, θεσμοθετεῖται ἡ ὑπαρξη κάποιας συνάρτησης ἐπιλογῆς, χωρίς νά ἐνδιαφέρει ἡ δυνατότητα δποιαδήποτε περιγραφῆς της. Κάτι τέτοιο ἀποτελεῖ μιά πολὺ σοβαρή παραδοχή τῆς δποίας ἡ ἐγκυρότητα ἀμφισβητεῖται, τουλάχιστον φιλοσοφικά, ἀπό πολλούς μαθηματικούς καὶ φιλοσόφους.* Ἀπό τήν

δλλη μεριά είναι δλήθεια δτι τό δξίωμα αυτό είναι πιά δναπόσπαστο κομμάτι τών κλασικών μαθηματικών και πώς ευρύτατες περιοχές τους στηρίζονται έπάνω του.

Είναι, λοιπόν, σοβαρότατο θέμα ή δντιμετώπιση τού δξώματος τής έπιλογής άπό τους Ίντουισιονιστές. Θά περίμενε κανείς μιά τέτοια μαθηματική άρχη μέ ξντονα μή-κατασκευαστικό χαρακτήρα νά μήν είναι άποδεκτή άπό μιά θεμελιωδώς κατασκευαστική σχολή φιλοσοφίας τών μαθηματικών. Ίσχυε δμως τό άκριβως δντίθετο. Ύπάρχει άπόδειξη τού δξώματος τής έπιλογής σύμφωνη μέ τις έπιταγές τών Ίντουισιονιστών.

Άς δοῦμε δμως πώς συγκεκριμενοποιεῖται ο παραπάνω ίσχυρισμός. Άς υποθέσουμε πώς έχουμε τήν παρακάτω μορφή τού δξώματος:

$$\forall x \exists y \varphi(x,y) \rightarrow \exists z \forall x \varphi(x,z(x))$$

δπου  $\varphi(x,y)$  είναι ξνας τύπος μέ δύο άλευθερες μεταβλητές και δπου  $z$  είναι μιά συνάρτηση.

Άς υποθέσουμε έπίσης πώς έχουμε στά χέρια μας μιά άπόδειξη τού τύπου  $\forall x \exists y \varphi(x,y)$ . Αυτό σημαίνει πώς έχουμε στά χέρια μας μιά άναγνωρίσιμη κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης άπό ξνα δποιοδήποτε άντικείμενο  $t$  και άπό μιά άπόδειξη (ίντουισιονιστικά άποδεκτή) πώς τό  $t$  άνήκει στό δοσμένο πεδίο μεταβολῆς σέ μιά άπόδειξη τής πρότασης  $\exists y \varphi(t,y)$ . Τό τελευταίο αυτό σημαίνει δτι έχουμε στά χέρια μας μιά άπόδειξη τής πρότασης  $\varphi(t,a)$  γιά κάποιο άντικείμενο  $a$  και μιά άπόδειξη (ίντουισιονιστικά άποδεκτή) πώς τό άντικείμενο  $a$  άνήκει στό συγκεκριμένο πεδίο μεταβολῆς. Άλλα, δλα αυτά σημαίνουν δτι έχουμε στά χέρια μας μιά συνάρτηση  $z$ , τέτοια θστε,  $z(t)=a$  γιά τή συγκεκριμένη περίπτωση και δτι γιά κάθε πρόταση  $\varphi(t,z(t))$  έχουμε έπίσης στά χέρια μας τήν άντίστοιχη άπόδειξη τής. Αυτό τελικά σημαίνει δτι τώρα έχουμε στά χέρια μας μιά άπόδειξη τού τύπου  $\exists z \forall x \varphi(x,z(x))$ . Έδω τελειώνει και ή άπόδειξη τού δξώματος τής έπιλογής, στή μορφή πού τό διατυπώσαμε προηγούμενως.

Είναι, βέβαια, γεγονός πώς ή ίντουισιονιστική άπόδειξη τού δξώματος τής έπιλογής πού μόλις άναφέραμε σχετίζεται δμεσα μέ τή συγκεκριμένη μορφή πού δώσαμε στό δξίωμα. Αυτό δμως δέν

μειώνει τή σημασία τής δυνατότητας νά άποδειχθεί ξνα τέτοιο θεμελιωδώς μή-κατασκευαστικό δξίωμα στά πλαίσια τών ίντουισιονιστικών μαθηματικών. Έτσι ή φιλοσοφική στήριξη τής δημοράξης μιᾶς τέτοιας άπόδειξης έμφανίζεται σάν άπόλυτα άναγκαιά.

Ή προβληματικότητα τού δξώματος τής έπιλογής στά πλαίσια τών κλασικών μαθηματικών άπειλεται στό γεγονός τής άποδοχής τού πραγματικού άπειρου σάν ύπαρκτον και στή θεσμοθέτηση διαδικασιών είσαγωγής μιᾶς ιεραρχίας νέων άπειρων χωρίς τή δυνατότητα άλγοριθμικού έλέγχου τους. Έτσι ή άκριτη άποδοχή τής δημοράξης μιᾶς συνάρτησης έπιλογής, δποτεδήποτε μιᾶς δίνεται μιά οίκογένεια  $\{A_i \mid i \in I\}$  μή κενῶν και ξένων μεταξύ τους συνόλων, σημαίνει τήν θεσμοθέτηση, στά πλαίσια τής έπισημης μαθηματικής πρακτικής, τής δυνατότητας έπιλογής άντικειμένων  $a_i$ ,  $i \in I$ , μέ  $a_i \in A_i$ , άκόμα και δταν μιά τέτοια έπιλογή δέν είναι δυνατή άπό τήν άποψη πώς δέν ύπάρχει πάντα κατασκευαστικός άλγοριθμος πού νά τήν καθορίζει. πολλές φορές μάλιστα δέν ύπάρχει ούτε κάν μαθηματικός τύπος πού νά περιγράφει τή συνάρτηση. Ή δημοράξη ένός τέτοιου τύπου δέν θά σήμαινε και τήν δημοράξη ένός κατασκευαστικού άλγοριθμου, ένω ή δημοράξη ένός κατασκευαστικού άλγοριθμου θά είχε σάν συνέπεια τή δυνατότητα περιγραφής τής συνάρτησης μέσω ένός τέτοιου τύπου.

Γιά τά ίντουισιονιστικά μαθηματικά τό δξίωμα τής έπιλογής έμφανίζεται σάν μή προβληματικό, τουλάχιστον στή μορφή πού τό διατυπώσαμε, γιά τους έξης τρείς λόγους : (α) γιατί γιά τά ίντουισιονιστικά μαθηματικά κάθε ξννοια πραγματικού άπειρου είναι έξοβειστέα, άπό τήν άποψη πώς κάθε ειδούς πραγματικό άπειρο είναι άπό τήν ίδια του τή φύση μή-ίντουισιονιστικά κατασκευάσμιο, (β) γιατί άπό δ, τι φάνηκε στήν άπόδειξη τού δξώματος τής έπιλογής, ή συνάρτηση έπιλογής πού προκύπτει είναι ξνας δεδομένος κατασκευαστικός άλγοριθμος, μιά και άναφέρεται σέ δλότητες άπόλυτα έλέγξιμες, και (γ) ή δημοράξη τής προκύπτει σάν τό άποτέλεσμα μιᾶς ίντουισιονιστικά άποδεκτής άπόδειξης.

Άς δοῦμε, δμως, τώρα και άρισμένα παραδείγματα ταυτολογιών (σύμφωνα μέ τήν κλασική άντιληψη τού προτασιακού λογισμού) πού συμβαίνει νά μήν είναι παραδεκτές σάν τέτοιες άπό τους

Ίντουισιονιστές. Ένα πρώτο παράδειγμα, δπως είδαμε, είναι ή ταυτολογία τῆς μορφῆς  $(A) \vee (\neg(A))$  (άρχη τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου), δπου  $A$  είναι ένας τυχαῖος προτασιακός τύπος. Ένα δεύτερο παράδειγμα θά μποροῦσε νά είναι ό παρακάτω προτασιακός τύπος  $\neg(\neg(A)) \rightarrow (A)$

Πραγματικά, έχουμε στά χέρια μας μιά ἀπόδειξη τοῦ  $\neg(\neg(A))$ , δταν διαθέτουμε έναν κατασκευαστικό ἀλγόριθμο μετάβασης ἀπό δποιαδήποτε ἀπόδειξη τοῦ  $\neg(A)$  σέ κάποια ἀπόδειξη τῆς ἀντίφασης  $\neg\neg A = 1$ . Αυτό σημαίνει οὐσιαστικά πώς μιά ἀπόδειξη τοῦ  $\neg(\neg(A))$  θά ίσοδυναμούσε μέ τό νά δείξουμε δτι ποτέ δέν θά μπορούσαμε νά έχουμε μιά ἀπόδειξη τοῦ  $\neg(A)$ . Μιά ἀπόδειξη τοῦ  $\neg(A)$  ἀπό τήν ἄλλη μεριά θά ήταν ένας κατασκευαστικός ἀλγόριθμος μετάβασης ἀπό δποιαδήποτε ἀπόδειξη τοῦ  $A$  σέ κάποια ἀπόδειξη τῆς ἀντίφασης  $\neg\neg A = 1$ . Αυτό σημαίνει πώς μιά ἀπόδειξη τοῦ  $\neg(A)$  ίσοδυναμεῖ μέ τό νά δείξουμε, δτι ποτέ δέν θά μπορούσαμε νά έχουμε μιά ἀπόδειξη τοῦ  $A$ . Δηλαδή μιά ἀπόδειξη τοῦ  $\neg(\neg(A))$  ίσοδυναμεῖ μέ τό νά δείξουμε δτι ποτέ δέ θά μπορούσαμε νά δείξουμε, δτι ποτέ δέ θά μπορούσαμε νά δείξουμε πώς ίσχυει τό  $A$ . Κάτι τέτοιο δμως δέν ἀποτελεῖ και ἀπόδειξη τοῦ  $A$ , δέν δδηγεῖ δηλαδή στήν ενρεση ἐνός κατασκευαστικού ἀλγορίθμου μετάβασης ἀπό δποιαδήποτε ἀπόδειξη τοῦ  $\neg(\neg(A))$  σέ μιά ἀπόδειξη τοῦ  $A$ . Μόνον κάτι τέτοιο, δπως ξέρουμε, θά ἀποτελοῦσε μιά ἀπόδειξη τοῦ τύπου:

$\neg(\neg(A)) \rightarrow (A)$ .

Έτσι, δ παραπάνω προτασιακός τύπος, παρ' δτι σύμφωνα μέ τήν κλασική λογική είναι ταυτολογία και ἐπομένως ἀποδείξιμος ἀπό τά κλασικά λογικά ἀξιώματα, γιά τά ίντουισιονιστικά μαθηματικά ἔχει προβληματικό status, παρεμφερές μέ τό status τῆς ἀρχῆς τῆς ἀπόκλεισης τοῦ τρίτου.

Άκριβῶς τό ἀντίθετο συμβαίνει στήν περίπτωση τοῦ προτασιακού τύπου  $(A) \rightarrow (\neg(\neg(A)))$ . Πραγματικά ή նπαρξη μιᾶς ἀπόδειξης τοῦ  $A$  συνεπάγεται ἀμεσα, χωρίς νά συμβαίνει και τό ἀντίστροφο, δτι ποτέ δέν μποροῦμε νά δείξουμε πώς ποτέ δέ θά μπορούσαμε νά δείξουμε δτι ίσχυει τό  $A$ . Τό θετικό δηλαδή γεγονός τῆς նπαρξης ἀπόδειξης τοῦ  $A$  συνεπάγεται τήν ἀρνηση τῆς δυνατότητας ἀπόδειξης τοῦ  $\neg(A)$ , χωρίς ή ἀρνηση τῆς δυνατότητας ἀπόδειξης

τοῦ  $\neg(A)$  νά συνεπάγεται τό θετικό γεγονός τῆς նπαρξης μιᾶς ἀπόδειξης τοῦ  $A$ .

Ἐπομένως στά ίντουισιονιστικά μαθηματικά, ἀν έχουμε στά χέρια μας τόν προτασιακό τύπο  $A$ , μποροῦμε νά συμπεράνουμε τόν προτασιακό τύπο  $\neg(\neg(A))$  χωρίς νά συμβαίνει τό ἀντίθετο.

Ένα ἀκόμη παράδειγμα ἀπαγορευμένης ταυτολογίας είναι και ή παρακάτω :

$(\neg(A) \rightarrow (B)) \rightarrow ((\neg(A) \rightarrow \neg(B)) \rightarrow (A))$

Σύμφωνα μέ τούς ίντουισιονιστές, είναι ἀπαγορευμένο νά συμπεράνουμε τόν προτασιακό τύπο  $A$  ἀν στά χέρια μας έχουμε μιά ἀπόδειξη γιά τόν τύπο  $\neg(A) \rightarrow (B)$  και μιά ἀπόδειξη γιά τόν τύπο  $\neg(A) \rightarrow \neg(B)$ .

Ἐδῶ δμως σταματοῦμε τήν παράθεση παραδειγμάτων, πιστεύοντας πώς οι περιέργοι ἀναγνῶστες θά ἀνατρέξουν γιά ὅλα παραδείγματα στήν ἀντίστοιχη βιβλιογραφία τήν δποία και παραθέτουμε στό τέλος τοῦ παρόντος βιβλίου.