

Η ΟΝΤΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1) Εισαγωγή

Η όποια αντιμετώπιση γνωσιακού -ή και γνωστικού- τύπου του κόσμου είναι αναγκαίο να περιλαμβάνει και την ποιοτική και την ποσοτική του πλευρά. Με τον όρο «ποιοτική» πλευρά εννοούμε την εκπεφρασμένη δυνατότητα διάκρισης και έκφρασης που διαθέτουμε, διά της οποίας μπορούμε να ταυτοποιήσουμε είτε διαφορετικά αντικείμενα, είτε διαφορετικές καταστάσεις και σχέσεις τους, είτε διαφορετικές αισθητηριακά ευπρόσιτες εκδοχές τους. Στην ποιοτική πλευρά του κόσμου ανήκουν το λευκό και το μαύρο, το ερυθρό και το πράσινο, το ηχηρό και το σιγανό, το μελαδικό και το μουσικά τραχύ, το εύσομο και το άσομο, το εύγευστο και το άγευστο. Στην ποιοτική πλευρά του τρόπου με τον οποίον αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο ανήκει η δυνατότητά μας να διακρίνουμε όλα τούτα και άλλα πολλά, χωρίς κάτι τέτοιο να συνεπάγεται αυτό που θα καλούσαμε επίσης δυνατότητα ακριβούς «ποσοτικής» αποτίμησής τους. Η ποσοτική αποτίμηση πραγμάτων, συμβάντων, γεγονότων, καταστάσεων και τεκταινομένων, εκ μέρους μας, αποτελεί το αναγκαίο συμπλήρωμα της ποιοτικής αναγνώρισης ομοιοτήτων και διαφορών τους. Ο κόσμος, ως αισθητηριακός μας Παράδεισος, δεν θα υπήρχε για μας αν δεν είχαμε την δυνατότητα ποιοτικής αναγνώρισης της διάκρισης του ταυτού από το έτερο και ποσοτικής εκτίμησης του πόσο από τούτο μπορεί να οδηγήσει στο τόσο από το άλλο, ή -για να χρησιμοποιήσουμε έναν φιλοσοφικά ουδέτερο τρόπο διατύπωσης του τελευταίου- πόσο από τούτο μπορεί να συνεμφανίζεται με τόσο από το άλλο. Η χρήση του ουδέτερου αυτού τρόπου έκφρασης είναι προτιμότερη γιατί δεν προϋποθέτει την εκ μέρους μας αποδοχή αιτιοχρατικής, προκαθορισμένα υπαρκτής ή άλλης, διασύνδεσης των συνεμφανιζομένων.

Η ποιοτική αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών έχει εικαστικό κατά βάσιν χαρακτήρα. Η ποσοτική εκτίμηση συνεμφανίσεων, εξαιρετικά δυσκολότερη στην πολυπλοκότητά της, είναι το απαραίτητο γνωσιακό συμπλήρωμα της εικαστικής ή άλλης (ηχητικής κτλ.) μας πρόσβασης στον κόσμο. Και οι δύο αυτοί τρόποι προσέγγισης είναι απαραίτητοι για την δημιουργική εξεικόνιση

των πραγμάτων γύρω μας και των πραγμάτων μέσα μας. Πώς θα πορευθούμε χωρίς τον συνδυασμό και των δύο τρόπων; Το σπουδαίο είναι πως, ενώ για την αισθητηριακή μας πρόσβαση στον κόσμο απαιτείται ο κατάλληλος συνδυασμός και των δύο τρόπων, για την επιστημονική μας αντιμετώπισή του χρειάζεται η παρατηρησιακή και θεωρητική τους απομόνωση. Έτσι, η επιστημονική μελέτη του ποιοτικού μέρους του κόσμου είναι δουλειά των φυσικών επιστημόνων, φυσικών, χημικών και πάει λέγοντας, ενώ η επιστημονική διερεύνηση των διαδρομών που πρέπει να ακολουθήσει κάθε ποσοτική αποτίμηση του αισθητηριακά ή και νοητικά προσβάσιμου είναι δουλειά του ερωτευμένου με τους αριθμούς και τα άχρωμα σχήματα μαθηματικού. Στο σημείο αυτό απαιτείται μια απαραίτητη διευχρίνιση. Στο ποιοτικό μέρος του κόσμου δεν ανήκουν μόνον τα φυσικά φαινόμενα αλλά και τα ιστορικο-κοινωνικο-οικονομικά. Για αυτά απαιτείται η φροντίδα του επιστήμονα, ο οποίος είναι αφοσιωμένος σε όλα όσα έφτιαξε ο άνθρωπος καθώς του ήταν απαραίτητο για να επιβιώσει να δημιουργήσει και να ενταχθεί σε ομάδες, σε κοινωνίες, σε λαούς ή σε έθνη. Μία ακόμη επεξηγηματική διευχρίνιση. Όταν ελέχθη στην αρχή της παραγράφου ότι «η ποιοτική αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών έχει εικαστικό κατά βάσιν χαρακτήρα» με έναν υπερβάλλοντα τρόπο -συν τοις άλλοις- εννοούσαμε ότι όλος ο χώρος των τεχνών -και ιδιαιτέρως των εικαστικών- υπάρχει ως αναδημιουργική εξεικόνιση αυτών και τούτων καθώς τα βλέπουμε γύρω μας, καθώς τα φανταζόμαστε και καθώς τα έχουμε στον νου μας. Κάτι ακόμη. Η επιστημονική ενασχόληση (και λιγότερο ίσως η εικαστική) με την ποιοτική πλευρά του κόσμου δεν είναι δυνατόν να υπάρξει, δεν είναι δυνατόν δηλαδή να λάβει χώρα, χωρίς την βοήθεια ποσοτικών αποτιμήσεων. Έτσι, τα μαθηματικά, ως η επιστήμη των αριθμών και των άχρωμων σχημάτων, είναι αναγκαίο να βρίσκονται παντού. Εννοούμε με αυτό ότι πέραν των μαθηματικών -δηλαδή των επιστημών που ασχολούνται με τους αριθμούς και τα άχρωμα αυτά σχήματα- και οι υπόλοιποι, φυσικοί, χημικοί, οικονομολόγοι, και πάει λέγοντας, απαιτείται να γνωρίζουν σημαντικό μέρος τουλάχιστον των εφηρμοσμένων μαθηματικών, για να μπορούν να ανταποκριθούν γνωσιακά με, κατά το δυνατόν, ακριβείς, ακριβέστερες ή και ακριβέστατες ποσοτικές εξεικονίσεις, που αφορούν στο ποιοτικό μέρος του ταυτού και του ετέρου.

2) Το οντολογικό status των φυσικών, των ρητών, των αλγεβρικών και των πραγματικών αριθμών

Η ανάγκη κατάκτησης της ποσοτικής πλευράς της εξεικόνισης του κόσμου οδήγησε τον άνθρωπο στην ανακάλυψη μιας νοητικής ηπείρου, αυτής των μαθημα-

τικών, η οποία εδράζεται σε θεμέλια κυρίως αριθμητικά. Ανακάλυψη και όχι εφεύρεση, επειδή αποτελεί πεποίθηση του γράφοντος ότι ο τρόπος για να γνωρίσεις την συγκεκριμένη ήπειρο δεν επιλέγεται ούτε κατασκευάζεται, και τούτο γιατί αποτελεί γνωσιακή προϋπόθεση της όχι μόνον ποιοτικής αλλά και ποσοτικής θέασης του κόσμου. Τα μαθηματικά δηλαδή της ποσοτικής αυτής θέασης είναι μοναδικά. Είναι δηλαδή τα μαθηματικά της οντολογικά μοναδικής πραγματικής ευθείας. Είναι αδύνατον λοιπόν να μην ξεκινήσεις αριθμώντας, στην συνέχεια επεκτείνοντας αυτήν την αρίθμηση και προς την αντίθετη κατεύθυνση, μετά εμπλουτίζοντάς την με τα προϊόντα διαιρέσεων -τελείων και ατελών-, πολύ πιο ύστερα με κάτι εξαιρετικά αναγκαίο και επιθυμητό, δηλαδή με τις πραγματικές ρίζες¹ πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές και, τέλος, με την προσθήκη αριθμών που δεν είναι καν ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Για το τελικό αυτό γέμισμα της λεγόμενης «ευθείας των πραγματικών αριθμών» αφοριμή και συγχρόνως αιτία θα αποτελούσε, όπως και απετέλεσε, η διαπίστωση ότι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν ολόγυρα, όπως ο συμβολιζόμενος με το γράμμα π , που ορίζεται ως το πηλίκο του μήκους περιφέρειας τυχόντος κύκλου διά του μήκους μίας εκ των διαμέτρων του.

Ας ξεκινήσουμε όμως με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Φυσικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, δηλαδή οι αριθμοί που ξεκινούν με τον αριθμό 0 και συνεχίζουν επ' άπειρον, έτσι ώστε καθένας εξ αυτών, με εξαίρεση τον πρώτο στην σειρά, να προκύπτει από τον προηγούμενό του με προσθήκη του αριθμού 1 . Έτσι, ο 1 ισούται με τον $0+1$, ο 2 με τον $1+1$, ο 3 με τον $2+1$, ο 4 με τον $3+1$ και ούτω καθεξής. Οι συγκεκριμένοι αριθμοί, σύμφωνα με μια πλατωνίζουσα ρεαλιστική αντίληψη, σχετίζομενη με το οντολογικό τους *status*, διαθέτουν μια αυθυπαρξία, αντιπροσωπεύοντας τις οντολογικές μήτρες από τις οποίες προκύπτουν οι ποσοτικές εκτιμήσεις πεπερασμένων ολοτήτων. Έτσι, ενώ χρησιμοποιούνται για να προσδιοριστούν ποσοτικά τέτοιες ολότητες -όπως στην περίπτωση που επιθυμούμε να μιλήσουμε για τα 2 μήλα ή τα 3 λεμόνια που βρίσκονται στο τραπέζι της κουζίνας του σπιτιού μας-, η εξέτασή τους, η επισκόπησή τους και η απόδοση μαθηματικοποιημένων ιδιοτήτων σε αυτούς

1. «Πολυωνύμο με ακέραιους συντελεστές» καλείται κάθε άθροισμα μονωνύμων της μορφής $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$, όπου n τυχόν φυσικός αριθμός μεγαλύτερός του ή ίσος με τον 1 . «Μονώνυμο με ακέραιο συντελεστή» καλείται κάθε γινόμενο της μορφής αx^n , όπου α , ακέραιος αριθμός και x^n η μεταβλητή x με εκθέτη τον n , που συμβαίνει να είναι μεγαλύτερός του ή ίσος με τον 1 . «Πραγματική ρίζα ενός πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές» καλείται κάθε πραγματικός αριθμός r ο οποίος, αντικαθιστώντας την μεταβλητή x , μηδενίζει το συγκεκριμένο πολυωνύμο. Ένας τέτοιος πραγματικός αριθμός καλείται «αλγεβρικός».

απαιτούν την αντιμετώπισή τους αυτοτελώς και ανεξαρτήτως της εμφάνισης των ως ιδιαίτερους ιδιοτήτων. Διακινδυνεύοντας τον νεολογισμό θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι φυσικοί αριθμοί -όπως ίσως και οι υπόλοιποι αριθμοί- αποτελούν μια ιδιαίτερα κατηγορία ουσιαστικοποιημένων επιθέτων.

Μια σχεδόν προφανής επέκταση των φυσικών είναι αυτή που οδηγεί στο σύνολο των ακεραίων αριθμών. Πρόκειται για επέκταση προς την αντίθετη κατεύθυνση αυτής προς την οποίαν οδεύουν οι φυσικοί αριθμοί. Αν δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί θεωρήσουμε ότι οδεύουν αναπτυσσόμενοι προς τα δεξιά και επ' άπειρον, τότε η επέκτασή τους θα διαθέτει έναν δεύτερο κλάδο, ο οποίος αναπτύσσεται προς τα αριστερά και επ' άπειρον. Δηλαδή, το σύνολο των ακέραιων αριθμών θα αποτελείται από τους αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, το μηδέν και τους θετικούς ακέραιους αριθμούς. Έτσι, οι ακέραιοι θα είναι οι αριθμοί $\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Μια λεπτομέρεια. Η συγκεκριμένη προσθήκη θα επιτρέπει την πλήρη επίλυση της εξίσωσης $x+\alpha=0$ όπου α ακέραιος αριθμός. Για παράδειγμα, η λύση της $x+3=0$ θα είναι ο αριθμός -3 .

Η επόμενη επέκταση προς την κατεύθυνση της πλήρους οικοδόμησης των πραγματικών αριθμών -ή μάλλον, όπως ήδη ελέχθη, η επόμενη κίνηση προς την πλήρη ανακάλυψή τους- είναι αυτή που σχετίζεται με τον αριθμητικό εμπλουτισμό του συνόλου των ακεραίων με τα προϊόντα διαιρέσεων τους (τελείων ή ατελών). Πρόκειται για τον εμπλουτισμό του συγκεκριμένου συνόλου με τα λεγόμενα «ανάγωγα κλάσματα»,² που σημαίνει την επέκτασή του με όλους τους δυνατούς ρητούς, οι οποίοι διατακτικά βρίσκονται ανάμεσά τους. «Ρητοί» αριθμοί είναι λοιπόν όλοι οι αριθμοί που μπορούν να παρασταθούν ως ανάγωγα κλάσματα p/q , με p και q , ακέραιους, και $q \neq 0$, οι οποίοι είναι πρώτοι προς αλλήλους.³ Με τον τρόπο αυτό τα κενά μεταξύ συνεχόμενων ακέραιων αριθμών γεμίζουν - αν και όχι ακριβώς. Δηλαδή, όπως θα δούμε και αργότερα, δεδομένων δύο ρητών αριθμών α και β με $\alpha \neq \beta$ και $\alpha < \beta$, υπάρχει πάντοτε ένας τρίτος ρητός γ τέτοιος ώστε $\alpha \neq \gamma$ και $\beta \neq \gamma$ με $\alpha < \gamma$ και $\gamma < \beta$. Η ιδιότητα αυτή καλείται «πυκνότητα» και αποτελεί θεμελιώδες χαρακτηριστικό των ρητών αριθμών. Μια μικρή προσθήκη. Οι ακέραιοι αριθμοί είναι ρητοί αριθμοί διότι καθένας εξ αυτών -για παράδειγμα, ο 5 - μπορεί να παρασταθεί ως ανάγωγο κλάσμα με αριθμητή τον ίδιο και παρονομαστή την μονάδα. Στην περίπτωση του παραδείγματός μας, ο 5 είναι το ανάγωγο κλάσμα $5/1$.

2. «Ανάγωγο κλάσμα» λέγεται κάθε κλάσμα της μορφής p/q που εκφράζει το προϊόν της διαιρέσεως των ακέραιων p και q οι οποίοι δεν έχουν άλλον κοινόν διαιρέτη πέραν της μονάδος, με το $q \neq 0$.

3. «Πρώτοι προς αλλήλους» λέγονται δύο ακέραιοι αριθμοί p και q οι οποίοι δεν διαισθέουν άλλους κοινούς διαιρέτες πλην της μονάδος.

Η περιπέτεια όμως συνεχίζεται. Το επόμενο στάδιο είναι αυτό της επέκτασης του συνόλου των ρητών αριθμών προς την κατεύθυνση της προσθήκης σε αυτά όλων των λεγομένων «αλγεβρικών αριθμών». «Αλγεβρικός αριθμός» καλείται κάθε πραγματικός αριθμός που αποτελεί μη μιγαδική ρίζα⁴ πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές. Ένας τέτοιος αριθμός, επί παραδείγματι, είναι ο συμβολιζόμενος με το $\sqrt{2}$, την θετική δηλαδή τετραγωνική ρίζα του 2, που αποτελεί μια από τις λύσεις της εξίσωσης $x^2-2=0$.⁵ Στους αλγεβρικούς αριθμούς ανήκουν όλοι οι ρητοί αριθμοί γιατί, κατά τρόπο τετριμένο, ένας τυχών ρητός αριθμός, ο p/q , με $q \neq 0$, αποτελεί ρίζα της στοιχειώδους πρωτοβάθμιας εξίσωσης $qx-p=0$, όπου q και p ακέραιοι. Ας προστεθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$, όπως και οι αριθμοί $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7} \sqrt{11}$ και ούτω καθεξής, είναι αλγεβρικός αριθμός χωρίς να είναι ρητός, χωρίς δηλαδή να υπάρχει η δυνατότητα παράστασής του ως ανάγωγου κλάσματος p/q με $q \neq 0$.

Η επόμενη και τελευταία επέκταση προς πλήρωση της πραγματικής ευθίας είναι αυτή που σχετίζεται με την προσθήκη στο σώμα των αλγεβρικών αριθμών των λεγόμενων «υπερβατικών» (transcendentals). Πρόκειται για αριθμούς των οποίων ο γενικός ορισμός έχει αρνητική χροιά. Είναι δηλαδή εκείνοι οι αριθμοί που δεν αποτελούν ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Ένας τέτοιος είναι ο αριθμός π , ο οποίος εκφράζει τον λόγο του μήκους της περιφέρειας τυχόντος κύκλου προς το μήκος τυχούσης διαμέτρου του, όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω. Το φαινομενικό παράδοξο που θα διαπιστώσουμε λίγο αργότερα όταν θα μιλήσουμε για τις πληθικότητες αυτών των υποσυνόλων της πραγματικής ευθίας, που περιγράφαμε μέχρις εδώ, έχει να κάνει με το γεγονός ότι οι υπερβατικοί αριθμοί, παρότι δεν γνωρίζουμε εξατομικευμένα πολλούς εξ αυτών, είναι εξαιρετικά πολυπληθέστεροι όλων των προηγουμένων αναφερθέντων. Όπως θα δούμε, μάλιστα, η πληθικότητά τους ταυτίζεται με την πληθικότητα της ίδιας της πραγματικής ευθίας.⁶

4. «Μιγαδικός αριθμός» είναι ένας αριθμός της μορφής $\alpha+\beta i$, που αποτελεί συνήθως ρίζα δευτεροβάθμιας εξίσωσης (εξίσωσης της μορφής $px^2+qx+r=0$) με διακρίνουσα, μικρότερη του μηδενός ($q^2-4pr<0$).

5. Η εξίσωση $x^2-2=0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες, την $\sqrt{2}$ και την $-\sqrt{2}$.

6. Ας μην ξεχνάμε ότι με τον όρο «πραγματική ευθία» εννοούμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών, το οποίο είναι, συν τοις άλλοις, γραμμικά διατεταγμένο, εννοώντας ότι για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει μια ακριβώς από τις επόμενες σχέσεις: $\alpha=\beta$, $\alpha<\beta$, $\beta<\alpha$.

3) Η διακριτότητα, η πυκνότητα, η πληρότητα και η συνέχεια: εννοιολογικές διαφορές και μαθηματικές εξεικονίσεις τους

Κατά την περιγραφή των υποσυνόλων της πραγματικής ευθίας, που μόλις τελείωσαμε στο δεύτερο μέρος αυτού του κειμένου, συναντήσαμε οντότητες –νοητικού πάντοτε χαρακτήρα– οι οποίες διαθέτουν κάποια ή κάποιες από τις ιδιότητες της διακριτότητας, της πυκνότητας, της πληρότητας και της συνέχειας. Ας ξεκινήσουμε με αυτήν της διακριτότητας. Είναι ιδιότητα την οποία έχουν οι φυσικοί και την οποία κληρονομούν και οι ακέραιοι. Ας πάρουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την πρώτη διατεταγμένη δυάδα εξαιρετικά κοντινών μεταξύ τους φυσικών αριθμών, φυσικών αριθμών δηλαδή που μεταξύ τους δεν παρεμβάλλεται κάποιος τρίτος φυσικός. Η δυάδα αυτή είναι $(0, 1)$. Εδώ, καταχρηστικώς ίσως, περιλαμβάνουμε ως εναρκτήριο φυσικό αριθμό το 0. Το σημαντικότερο στην προκείμενη περίπτωση, όπως εξεικονίζεται εμφατικά στην περίπτωση των $(0, 1)$, είναι ότι δίπλα από τον 0 ή δίπλα από τον 1 δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός που να εφάπτεται αυτών ή που να τους εγγίζει. Οι αριθμοί 0 και 1, όπως και οι αριθμοί 2, 3, 4, ..., n , ..., είναι απομονωμένοι κατά κάποιο τρόπο και υπάρχει για καθέναν εξ αυτών ο επόμενός του φυσικός, και για όλους, πλην του μηδενός, και ο προηγούμενος. Στην περίπτωση των ακέραιών, που προκύπτουν από την ομοιότροπη επέκταση των φυσικών προς τα αριστερά τους, παρατηρείται η ίδια απομόνωση με την μόνη διαφορά ότι για κάθε απομονωμένο ακέραιο, χωρίς την εξάρεση του 0, υπάρχει και ο άμεσος επόμενος και ο άμεσος προηγούμενός του ακέραιος. Δηλαδή, για κάθε ακέραιο αριθμό n –του μηδενός προφανώς περιλαμβανομένου– ο υπάρχων αμέσως προηγούμενός του είναι ο αριθμός $n-1$, ενώ ο αντίστοιχος υπάρχων αμέσως πρόμενός του ο $n+1$.

Η δεύτερη προς εξέταση σημαντική ιδιότητα που συναντούμε σε συγκεκριμένες ολότητες πραγματικών αριθμών είναι αυτή που ξεκινά από το σύνολο των ρητών και επεκτείνεται σε κάθε υπερσύνολό τους. Επεκτείνεται δηλαδή και στους αλγεβρικούς και στους ίδιους τους πραγματικούς αριθμούς. Πρόκειται για την ιδιότητα της πυκνότητας. Είναι η ιδιότητα εκείνη που, αν την διαθέτει κάποιο σύνολο γραμμικά διατεταγμένο, τότε αν α και β είναι τυχόντα στοιχεία του συγκεκριμένου συνόλου με το $\alpha < \beta$, υπάρχει στοιχείο γ του συνόλου με το $\alpha < \gamma$ και το $\gamma < \beta$. Η συγκεκριμένη ιδιότητα της πυκνότητας έχει πλειστάχις μια ισοδύναμη της αμέσως προηγούμενης διατύπωσης. Σύμφωνα με αυτήν, ένα γραμμικά διατεταγμένο σύνολο σημείων AB (για παράδειγμα, ένα πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα) είναι πυκνό ως προς την διάταξή του αν το AB είναι άπειρα διαιρέσυμο. Αν δηλαδή το AB μπορεί να διαιρεθεί σε $\Delta\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ με το $\Gamma \neq A$ και $\Gamma \neq B$, το $\Delta\Gamma$ σε $\Delta\Lambda$ και $\Lambda\Gamma$ με το $\Delta \neq A$ και $\Delta \neq \Gamma$, το $\Delta\Lambda$ σε ΔE και $E\Lambda$ με το $E \neq A$ και $E \neq \Delta$ και ούτω καθεξής. Τα σημεία $\Gamma, \Delta, E, ...$

μπορούν να είναι -και είναι- πραγματικά και όχι φανταστικά σημεία ανήκοντα στο σύνολο AB. Έτσι, η άπειρη διαιρεσιμότητα εμφανίζεται να είναι -και είναι- ισοδύναμη της πυκνότητας.

Η τρίτη ιδιότητα που πρέπει να εξετασθεί, ώστε να ορισθεί καταλλήλως και αρκούντως η ιδιότητα της συνέχειας, είναι αυτή της πληρότητας. Σύμφωνα με αυτήν, κάθε ακολουθία Cauchy⁷ είναι συγκλίνουσα. Για να γίνουν κατανοητές οι έννοιες της «ακολουθίας Cauchy» και της «συγκλίνουσας ακολουθίας», ας θεωρήσουμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ και ας υποθέσουμε ότι η διαφορά μεταξύ των τυχόντων όρων της ακολουθίας α_k και α_m προσεγγίζει -ή τείνει προς- το μηδέν, καθώς οι δείκτες k και m μεγαλώνουν συνεχώς. Τότε, σύμφωνα με το δευτεροβάθμιο αξίωμα πληρότητας⁸ της πραγματικής ευθείας, υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε η διαφορά $\alpha_m - \alpha$ να προσεγγίζει -ή τείνει προς- το 0, καθώς ο δείκτης m τείνει προς το άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι, σύμφωνα με το δευτεροβάθμιο αξίωμα πληρότητας, κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα. Δηλαδή, σημαίνει ότι, αν ισχύει το συγκεκριμένο αξίωμα, η πραγματική ευθεία είναι πλήρης, δηλαδή δεν υπάρχουν στο εσωτερικό της οπές. Γύρω από κάθε τέτοια πιθανή οπή συσσωρεύεται τουλάχιστον μία ακολουθία Cauchy που, επειδή είναι συγκλίνουσα, υποστασιοποιεί το σημείο σύγκλισης της καλύπτοντας έτσι την πιθανή οπή. Για να είμαστε ακόμη πιο ακριβείς, δεν χρειάζεται να θεωρήσουμε ότι οι ακολουθίες μας $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών αλλά ότι είναι ακολουθίες ρητών αριθμών. Και τούτο γιατί, λόγω της ιδιότητας της πυκνότητας την οποίαν ικανοποιούν οι ρητοί αριθμοί, αν υπάρχει μια ακολουθία πραγματικών αριθμών που έχει ως σημείο συσσώρευσης της το συγκεκριμένο α , τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ακολουθία ρητών αριθμών που έχει ως σημείο συσσώρευσης το ίδιο σημείο α .⁹

7. Για να είμαστε περισσότερο ακριβείς, μια ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ πραγματικών -ή και ρητών αριθμών- καλείται «ακολουθία Cauchy» αν $\forall \epsilon \exists N \forall k (n < m \wedge n < k \rightarrow |\alpha_m - \alpha_n| < \epsilon)$ όπου το είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και m, n, k είναι φυσικοί αριθμοί. Μια ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ καλείται «συγκλίνουσα», αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός α , που λέγεται «σημείο σύγκλισης» της ακολουθίας, έτσι ώστε: $\forall \epsilon \exists N (n < m \rightarrow |\alpha_m - \alpha| < \epsilon)$.

8. Εδώ, με την διατύπωση «δευτεροβάθμιο αξίωμα πληρότητας» εννοούμε ότι το συγκεκριμένο αξίωμα διατυπώνεται σε δευτεροβάθμια γλώσσα, σε γλώσσα, δηλαδή, που εκτός της ποσόδειξης επί αντικειμένων επιτρέπεται και η ποσόδειξη επί ιδιοτήτων, σχέσεων, ακολουθιών και συναρτήσεων.

9. Αν, για παράδειγμα, έχουμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ με $\alpha_n \neq \alpha$ για κάθε n, που συγκλίνει στον αριθμό α , τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία ρητών αριθμών $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \dots$ με $\alpha_n = \beta_n$ και $\beta_n \neq \alpha$ για κάθε n,

Η τέταρτη ιδιότητα είναι αυτή της συνέχειας. Για αυτήν, όσα θα έπρεπε να λεχθούν έχουν ήδη λεχθεί. Είναι δηλαδή η συνέχεια ταυτόσημη με την ύπαρξη και την σύγχρονη ισχύ των ιδιοτήτων της πυκνότητας και της πληρότητας. Είναι ακριβώς με αυτήν την έννοια που η πραγματική ευθεία είναι συνεχής. Όμως, αυτός ο ισχυρισμός χρειάζεται περαιτέρω στήριξη. Θα ήταν μετέωρος αν δεν φροντίζαμε να δείξουμε ότι οι ιδιότητες της πυκνότητας και της πληρότητας είναι ανεξάρτητες. Ότι, δηλαδή, η ύπαρξη της ιδιότητας της πυκνότητας δεν συνεπάγεται ούτε αποκλείει την ύπαρξη της ιδιότητας της πληρότητας και, αντιστρόφως, η ύπαρξη της ιδιότητας της πληρότητας δεν συνεπάγεται ούτε αποκλείει την ιδιότητα της πυκνότητας. Αρκεί το επόμενο παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία των ρητών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$, που προκύπτει αν για κάθε n, όπου ν φυσικός αριθμός με $n \neq 0$, θεωρήσουμε έναν ρητό αριθμό που βρίσκεται μεταξύ του $\sqrt{2}$ και του $\sqrt{2} + 1/n$, ως τον αριθμό α_n . Ένας τέτοιος αριθμός γνωρίζουμε ότι υπάρχει λόγω της ιδιότητας της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Έτσι, κατασκευάζουμε μια ακολουθία ρητών $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ που συγκλίνει στον αριθμό $\sqrt{2}$, επειδή οι όροι της φράσσονται μεταξύ των αριθμών $\sqrt{2}$ και $\sqrt{2} + 1/n$, με την ακολουθία των αριθμών $\sqrt{2} + 1/n$ να έχει ως σημείο σύγκλισης τον $\sqrt{2}$, καθώς ο ν τείνει στο άπειρο. Η ακολουθία που κατασκευάζουμε μας καταδεικνύει πως υπάρχουν ακολουθίες Cauchy ρητών αριθμών που δεν συγκλίνουν σε ρητό. Αυτό αποκλείει την πληρότητα του συνόλου των ρητών. Έτσι, δείξαμε ότι η ιδιότητα της πυκνότητας δεν συνεπάγεται την ιδιότητα της πληρότητας. Αντιστρόφως, η ιδιότητα της πληρότητας δεν συνεπάγεται την ανυπαρξία της ιδιότητας της πυκνότητας γιατί, όπως ήδη αναφέραμε, οι δύο ιδιότητες συνυπάρχουν στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Τέλος, θα πρέπει να δείξουμε ότι η ιδιότητα της πληρότητας δεν συνεπάγεται την ιδιότητα της πυκνότητας. Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο A το οποίο αποτελείται από το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και το κλειστό διάστημα $[2, 3]$ πραγματικών αριθμών, δηλαδή το σύνολο $A = [0, 1] \cup [2, 3]$.¹⁰ Στο σύνολο A ισχύει η ιδιότητα της πληρότητας χωρίς να ισχύει η ιδιότητα της πυκνότητας και τούτο: (α) γιατί οποιαδήποτε ακολουθία Cauchy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ με $\alpha_n \in A$ ¹¹

τέτοια ώστε για κάθε φυσικό αριθμό ν να ισχύει $|\beta_n - \alpha| < |\alpha_n - \alpha|$. Η συγκεκριμένη ακολουθία των ρητών $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \dots$ θα συγκλίνει επίσης στον α .

10. «Κλειστό» διάστημα πραγματικών αριθμών $[\alpha, \beta]$ καλούμε το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x τέτοιων ώστε $\alpha \leq x$ και $x \leq \beta$. Επίσης με $[\alpha, \beta] \cup [\gamma, \delta]$ συμβολίζουμε την ένωση των $[\alpha, \beta]$ και $[\gamma, \delta]$, δηλαδή το σύνολο των πραγματικών αριθμών x τέτοιων ώστε $\alpha \leq x \leq \beta$ ή $\gamma \leq x \leq \delta$.

11. Με τον συμβολισμό x \in εννοούμε ότι το x ανήκει στο σύνολο y.

για κάθε ν, είναι συγκλίνουσα στο Α, και (β) γιατί, αν θεωρήσουμε τα σημεία 1 και 2, μεταξύ των δεν υπάρχει κανένα ενδιάμεσο σημείο χ τέτοιο ώστε $x \in A$. Δυο λόγια για την μέθοδο που ακολουθήσαμε. Αν θέλουμε να αποδείξουμε ότι μια πρόταση φ δεν συνεπάγεται μια πρόταση γ, αρκεί να αναφερθούμε σε μια κατάσταση πραγμάτων ή σε κάποιο σύνολο αντικειμένων τέτοιων ώστε η φ να είναι αληθής σε αυτήν την κατάσταση πραγμάτων ή στο συγκεκριμένο σύνολο αντικειμένων και η γ να είναι φευδής. Έχοντας ολοκληρώσει την διαπραγμάτευση της ανεξαρτησίας της ιδιότητας της πληρότητας από αυτήν της πυκνότητας, θεωρούμε απαραίτητο να προσθέσουμε κάποιες λεπτομέρειες, οι οποίες θα καταστήσουν αρκετά από τα σημεία αυτής της διαπραγμάτευσης διαυγέστερα. Για πολλούς αιώνες και μάλιστα μέχρι τον 19ο οι έννοιες της «πυκνότητας» και της «πληρότητας» δεν είχαν διαχωρισθεί εντελώς. Μάλιστα ενώ η έννοια της πυκνότητας ήταν γνωστή, έστω και διά των συμφραζομένων της από την Αρχαιότητα, η έννοια της πληρότητας έκανε δειλά δειλά την εμφάνισή της κατά τον 19ο αιώνα. Άλλωστε, τότε εμφανίσθηκαν έννοιες όπως αυτές των ακολουθών Cauchy, και ανάγκες σχετικές με την πλήρη αξιωματική θεμελίωση της πραγματικής ευθείας. Αυτή η σύγχυση και η έλλειψη ακριβούς διαχωρισμού των δύο εννοιών είχαν οδηγήσει μέχρι τότε κορυφαίους φιλοσόφους και εραστές των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών, όπως ο Gottfried Wilhelm Leibniz, σε σχεδόν ταύτιση της ιδιότητας της πυκνότητας με αυτήν της συνέχειας. Λέμε «σχεδόν» διότι ακόμη και στο έργο του Leibniz υπάρχουν στοιχεία που παραπέμπουν σε εμβρυώδη πρωταρχική επαφή με την ιδιότητα της πληρότητας.¹² Ας δούμε, όμως, πώς ο ίδιος ο Leibniz φαίνεται να ταυτίζει το συνεχές με το άπειρα διαιρέσιμο, δηλαδή με την ύπαρξη πυκνότητας, αγνοώντας ή αφήνοντας στην άκρη την έν-

12. Σύμφωνα με το παρακάτω παράθεμα διαφαίνεται ότι ο Leibniz είχε μια αρκετά καλή διαισθητική ευκόνα αυτού που σε σύγχρονο γλωσσικό ίδιωμα θα καλούνσαμε «συνεχή συνάρτηση»:

Όταν η διαφορά μεταξύ δύο όρων σε μία δεδομένη σειρά ή σε αυτό που προϋποτίθεται είναι δυνατόν να μειώνεται, ώστε να γίνεται μικρότερη από οποιαδήποτε δεδομένη ποσότητα [τότε] η ίδια αντίστοιχη διαφορά σε αυτό που αναζητείται ή στα αποτελέσματα πρέπει, επίσης, αναγκαίως να ελαχιστοποιείται ή να γίνεται μικρότερη από οποιαδήποτε δεδομένη ποσότητα. Ή για να το θέσω πιο απλά, όταν δύο όροι ή δεδομένα προσεγγίζουν το ένα το άλλο με συνεχή τρόπο, ώστε το πρώτο τελικώς να εισχωρεί στο δεύτερο, είναι αναγκαίο οι συνέπειες ή τα αποτελέσματα (ή όσα δεν είναι γνωστά) να συμπεριφέρονται παρομοίως.

Carl Immanuel Gerhardt (επιμ.), *Die Philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, τ. Γ', Weidmann, Βερολίνο 1875-1890, σ. 52· Leroy E. Loemker (επιμ.), *Leibniz Gottfried Wilhelm. Philosophical Papers and Letters*, μετφρ. Leroy E. Loemker, Reidel, Ντόρντρεχτ 1969, σ. 351.

νοια της «πληρότητας» την οποία, άλλωστε, με την έννοια της «πλήρωσης των ακολουθιών Cauchy» δεν θα μπορούσε να γνωρίζει. Σε ένα γράμμα του στον Bartholomaeus Des Bosses, με ημερομηνία 29 Μαΐου 1716, αναφέρει:

Την οποία συνεχής έκταση οποτέδηποτε υποτίθεται ότι σημεία είναι έτοι τοποθετημένα, ώστε δεν υπάρχουν δύο μεταξύ των οποίων δεν υπάρχει ενδιάμεσο σημείο.¹³

Είναι σαφές ότι η απειρία είναι χαρακτηριστικό και της διακριτότητας και της συνέχειας. Το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι ένα ενεργεία άπειρο με την έννοια ότι περιέχει άπειρα ως προς το πλήθος τους στοιχεία. Το σύμπτων των φυσικών αριθμών, όχι ως αντικείμενο αλλά ως ανοικτού τέλους ολότητα, είναι δυνάμει άπειρο γιατί δεν είναι δυνατόν να εξαντληθεί διά μετρήσεως, είναι επίσης ενεργεία άπειρο αν θεωρηθεί ως αντικείμενο στο πλαίσιο της θεωρίας των συνόλων. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ενεργεία άπειρο αν θεωρηθεί ως ενιαίο αντικείμενο εμπεριέχον ως υποσύνολό του τους φυσικούς αριθμούς. Είναι επίσης δυνάμει άπειρο ως μη εξαντλούμενο. Παρά ταύτα, η έννοια της συνέχειας, όπως αυτή κατοπτρίζει οντολογικά στοιχεία της πραγματικής ευθείας, δεν αποτελεί συνεπαγωγική συνέπεια της έννοιας της απειρίας. Και τούτο φαίνεται αιμέσως με χρήση του αντιπαραδείγματος του συνόλου των φυσικών ή ακόμη και του συνόλου των ακεραίων που αποτελούν ενεργεία άπειρα σύνολα στα οποία ισχύει η διακριτότητα και όχι η συνέχεια. Αντιστρόφως, η συνέχεια συνεπάγεται την απειρία, και τούτο διότι το συνεχές ως άπειρα διαιρέσιμο -και μάλιστα κατά Leibniz ορισμένες φορές και άπειρα διαιρεμένο- είναι αναγκαίως άπειρο. Μια διευκρίνιση: το άπειρα διαιρεμένο ως έκφραση δεν αναφέρεται στο ιδεώδες άπειρο αλλά στο εμπράγματο. Ο Leibniz, για παράδειγμα, μας λέει ότι πιστεύει πως «δεν υπάρχει τιμήμα της ύλης που δεν είναι ... πραγματικά διαιρεμένο»,¹⁴ έχοντας προϋποθέσει ήδη ότι κάθε τιμήμα της ύλης είναι άπειρα διαιρέσιμο. Αυτό που είναι κυριολεκτικά μαγικό, ή που μας εμφανίζεται ως τέτοιο, έχει να κάνει με την συγκεκριμένη οικοδόμηση της πραγματικής ευθείας. Και είναι μαγικό γιατί αποτελεί οντολογική απαίτηση που προκύπτει από μία ανάγκη κατά το δυνατόν ακριβούς έκφρασης των στιγμιαίων ρυθμών μεταβολής, όπως, επί παραδείγματι, της στιγμιαίας ταχύτητας, της στιγμιαίας επιτάχυνσης και ούτω καθεξής. Ας

13. Bλ., Gerhardt (επιμ.), *Die Philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, τ. Β', σ. 515.

14. Gerhardt (επιμ.), *Die Philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, τ. Α', σ. 416.

λεχθεί εν τάχει, και χωρίς περαιτέρω επεξήγηση, ότι οι στιγμιαίοι ρυθμοί μεταβολής δεν συναντώνται σε αυτό που θεωρούμε ότι είναι η φύση, γιατί πρόκειται για οντότητες που συνδέονται με την χρονική στιγμή, η οποία, ως μη έχουσα διάρκεια, είναι χυριολεκτικώς ανύπαρκτη. Παρά ταύτα, είναι εξαιρετικά χρήσιμο εφεύρημα –ή καλύτερα χρήσιμη ανακάλυψη– διότι διά αυτού επιτυχάνεται μια απεικόνιση του κόσμου, που αφενός είναι αρκούντως ακριβής και αφετέρου σέβεται τις προσεγγίσεις.

Το οντολογικά, λοιπόν, μαγικό συνίσταται στο ότι ο κόσμος, μέσα από την διά της πραγματικής ευθείας εξεικόνισή του, αποτελείται από στοιχειώδεις αδιάστατες οντότητες, οι οποίες συναθροίζομενες διά καταλλήλων ιδιοτήτων και σχέσεων συναποτελούν διαστατές οντότητες και διαστατά αντικείμενα. Πώς γίνεται αυτό; Πώς γίνεται δηλαδή το διαστατό να παράγεται από το αδιάστατο, έστω και στο επίπεδο της νοητικής σύλληψης; Απαιτούνται κατάλληλες ιδιότητες και σχέσεις, αλλά τούτο δεν είναι εμπειρικώς υποστηρίξιμο. Αντιστρόφως, αυτό που φαίνεται να είναι ικανοποιητικά υποστηρίξιμο είναι η αποδοχή της οντολογικής προτεραιότητας του διαστατού, που εξιδανικευμένα συρρικνούμενο οδηγεί στο αδιάστατο σημείο. Όταν γεμίζει το διάστημα μεταξύ των αριθμών 1 και 2 (και, κατ' αντιστοιχίαν, μεταξύ οποιουδήποτε ακέραιου αριθμού ν και του επομένου του $n+1$) με τους ρητούς και τους αλγεβρικούς που συμβαίνει να βρίσκονται διατακτικά ανάμεσά τους, μας δίνεται η εντύπωση ότι έχει κατασκευασθεί μια γέφυρα μεταξύ των άκρων 1 και 2. Η εντύπωση αυτή στηρίζεται στην λανθασμένη μας αίσθηση ότι τα επικίνδυνα κενά στην γέφυρα έχουν καλυφθεί καταλλήλως εξαιτίας του γεγονότος ότι λόγω της πυκνότητας –που εκφράζεται και ως άπειρη διακρισιμότητα– μεταξύ δύο τυχόντων σημείων r και q , με $r < q$, $0 \leq r$ και $q \leq 1$ δεν υπάρχει απόλυτο κενό λόγω της ύπαρξης ενός τουλάχιστον σημείου r με $r < r < q$. Σε αυτήν την περίπτωση της λανθασμένης μας αίσθησης, μας διαφεύγει ότι, παρά ταύτα, υπάρχουν κενά σε μία τέτοια γέφυρα και αυτά αντιστοιχούν στις θέσεις των ελλειπόντων υπερβατικών αριθμών μεταξύ των άκρων 1, 2 ή και μεταξύ των τυχόντων r και q . Η γέφυρα επιδιορθώνεται οριστικά και αμετάκλητα όταν τοποθετηθούν στις κενές τους θέσεις οι κατάλληλοι υπερβατικοί, οι οποίοι, όπως θα δούμε παρακάτω και όπως ήδη αναφέρθηκε, είναι πολυπληθέστεροι και των ρητών αλλά και των αλγεβρικών αριθμών.

4) Πληθικότητες της πραγματικής ευθείας και των υποσυνόλων της

Για να μπορέσουμε να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα μεγέθους νοητών οντοτήτων, όπως η ευθεία και τα υποσύνολά της, είναι μεθοδολογικά ευχερέστερο και επομένως, υπό μίαν έννοια, σωστότερο να ξεκινήσουμε από την πλη-

θικά μικρότερη εξ αυτών των οντοτήτων και να συνεχίσουμε ανεβαίνοντας τα σκαλοπάτια προς την τελική νοητή οντότητα, που πιθανώς εμπεριέχει και τις υπόλοιπες. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, οι συγκεκριμένες οντότητες είναι αυτές των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των αλγεβρικών, των υπερβατικών και των πραγματικών αριθμών, παρατεταγμένες σύμφωνα με την σχέση υποσυνόλου – συνόλου και με την πληθική τους διατακτική ταξινόμηση.

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν από το σύνολο των φυσικών αριθμών, το οποίο, σύμφωνα με την συγκεκριμένη θεώρηση, αντιλαμβανόμαστε ως ενιαίο αντικείμενο και όχι απλώς ως σύμπαν ενός πλήθους άλλων αντικειμένων. Τρεις παρατηρήσεις: α) ενώ είναι ενιαίο (θεωρούμενο ως ολοκληρωμένο) είναι δυνατόν να αντιμετωπισθεί ως ένα αντικείμενο του οποίου η εσωτερική διάνυση είναι ατέρμονη, β) δεν είναι πεπερασμένο, με την έννοια ότι δεν υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία του με κάποιο πεπερασμένο σύνολο B , ώστε, αν το συμβολίσουμε με το \mathbb{N} , σε κάθε στοιχείο του B να αντιστοιχείται ένα ακριβώς στοιχείο του \mathbb{N} και σε κάθε στοιχείο του \mathbb{N} να αντιστοιχείται ένα ακριβώς στοιχείο του B . γ) Το \mathbb{N} αυτό, τέλος, είναι το μικρότερο, ως προς την σχέση του περιέχεσθαι, από όλα τα άπειρα σύνολα που μνημονεύσαμε προηγουμένως, η δε πληθικότητά του συμβολίζεται με το \aleph_0 . Επίσης, είναι το πρώτο που μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του. Ως παράδειγμα, θεωρήστε την αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία που προκύπτει αν κάθε φυσικός αριθμός n αποτελέσει το πρώτο μέλος ενός ζεύγους του οποίου το δεύτερο είναι το $2n$, και αντιστρόφως, αν ο κάθε άρτιος φυσικός αριθμός $2n$ –του μηδενός συμπεριλαμβανομένου– αποτελέσει το πρώτο μέλος ενός ζεύγους του οποίου το δεύτερο είναι ο n . Κάθε τέτοια αντιστοιχία κατά την οποία εξαντλούνται τα στοιχεία και του πρώτου και του δεύτερου συνόλου καλείται «αμφιμονοσήμαντη και επί». Πιο αναλυτικά. Αν δύο σύνολα A και B συνδέονται με μια συνάρτηση $F:A \rightarrow B$, τέτοια ώστε για κάθε στοιχείο β του B να υπάρχει ένα και μόνον ένα στοιχείο του A τέτοιο ώστε $f(\alpha)=\beta$, τότε αυτή η συνάρτηση είναι μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση του A επί του B και η ύπαρξη της σημαίνει ότι τα σύνολα A και B είναι πληθικώς ισοδύναμα. Γυρνώντας πίσω στην περίπτωση της συνάρτησης που περιγράφαμε παραπάνω, όπου ο n αντιστοιχείται στον $2n$ και αντιστρόφως, έχουμε να κάνουμε με μια συνάρτηση αμφιμονοσήμαντη και επί, που μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι το σύνολο των φυσικών είναι ισοπληθικό με το σύνολο των αρτίων φυσικών αριθμών, του μηδενός συμπεριλαμβανομένου. Αυτή η φαινομενική παραδοξότητα, σύμφωνα με την οποία ένα άπειρο σύνολο, όπως αυτό των φυσικών, μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη (ένα προς ένα) και επί αντιστοιχία με ένα γνήσιο υποσύνολό του, οφείλεται στο ότι αποδεχόμενοι την ύπαρξη απέιρων συνόλων έχουμε να αντιμετωπίσουμε μια ιδιότητα που δεν συναντάται στους πεπερασμένους αριθμούς –ή μάλλον στα πεπερασμένα σύνολα. Αν, επί παραδείγματι, έχουμε ένα σύνολο

πέντε στοιχείων, δεν μπορούμε να βρούμε -επειδή ακριβώς δεν υπάρχει- καμία αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία μεταξύ αυτού του συνόλου και οποιουδήποτε υποσυνόλου του, αποτελούμενου από τέσσερα, τρία, δύο ή ένα στοιχεία. Η παράξενη αυτή ιδιότητα ανακύπτει ως ιδιάζον χαρακτηριστικό οποιουδήποτε άπειρου συνόλου, διότι, αν αυτό διαταχθεί καλώς,¹⁵ μπορεί, επί παραδείγματι, να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία με το γνήσιο υποσύνολό του που αποτελείται από τα στοιχεία τα οποία, κατ' αυτήν την διάταξη, έχουν άρτιο δείκτη ή, μάλλον, αυτά που απομένουν, αν εγκαταλείψουμε καθένα από τα διατεταγμένα στοιχεία που βρίσκονται ακέσως μετά από κάποιο που έχουμε ήδη αποδεχθεί ως ανήκον στο συγκεκριμένο υποσύνολο. Δηλαδή, αν το γνήσιο υποσύνολό μας, μετά την καλή διάταξη των στοιχείων του αρχικού μας συνόλου, αποτελείται από τα $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_{x+2v+1}$... όπου και μπορεί να είναι κάποιος οριακός διατακτικός αριθμός¹⁶ και ν τυχών φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από ή ίσος με το 0.

Το επόμενο προς εξέταση σύνολο είναι το σύνολο των ακεραίων. Όπως έχουμε ήδη πει αποτελείται από τους φυσικούς αριθμούς, το 0 και τους αρνητικούς ακεραίους που προκύπτουν αν σε κάθε φυσικό n αντιστοιχίσουμε τον $-n$ έτσι ώστε $n+(-n)=0$. Το σύνολο των ακεραίων που συμβολίζεται με το \mathbb{Z} , παρότι είναι υπερσύνολο του συνόλου των φυσικών, έχει μαζί του την ίδια πληθυκότητα, δηλαδή έχει την πληθυκότητα \aleph_0 , διότι υπάρχει συνάρτηση αμφιμονοσήμαντη του \mathbb{N} επί του \mathbb{Z} . Η συνάρτηση αυτή είναι η ακόλουθη: $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $f(1)=0, f(2v)=v, f(2v+1)=-v$ όπου ν φυσικός αριθμός και $v \neq 0$.

Το τρίτο στην σειρά σύνολο που καλούμαστε να εξετάσουμε είναι αυτό των ρητών αριθμών που, ενώ περιέχει τους ακεραίους, χωρίς να ταυτίζεται με το σύνολό τους, αποτελεί γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των αλγεβρικών αριθμών. Όπως έχει ήδη λεχθεί, οι ρητοί αριθμοί είναι όσοι παρίστανται διά αναγώγου κλάσματος p/q , όπου $q \neq 0$, και p και q , πρώτοι προς αλλήλους ακέραιοι. Οι αριθμοί αυτοί, χωρίς να γεμίζουν πλήρως τα διαστήματα μεταξύ των ακεραίων, είναι πυκνά διατεταγμένοι, με την έννοια ότι αν α και β είναι δύο ρητοί, μεταξύ τους ευρίσκεται τρίτος ρητός, επί παραδείγματι, ο $\alpha/2 + \beta/2$. Το μη διαισθητικά αναμενόμενο είναι ότι το σύνολο αυτών των αριθμών, που φαίνεται να είναι αρκετά μεγαλύτερο του συνόλου των φυσικών αριθμών, είναι μαζί του ισοπληθικό. Έχει δηλαδή πληθυκότητα άπειρη αριθμήσιμη ή, αλλιώς, το σύνολο των ρητών αριθμών είναι άπειρο αριθμήσιμο.

15. Ένα σύνολο A είναι «διατεταγμένο καλώς» αν είναι γραμμικά διατεταγμένο και κάθε υποσύνολο του B έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς τη διάταξη.

16. Ένας διατακτικός αριθμός x λέγεται «οριακός» αν $x=0$ και για κάθε $y \in x$ επίσης $(y+1) \in x$.

Το σύνολο τώρα των αλγεβρικών αριθμών, που περιέχει όλες τις πραγματικές (μη μιγαδικές) ρίζες των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές έχει ως γνήσιο¹⁷ υποσύνολό του το σύνολο των ρητών αριθμών. Είναι σαφώς μεγαλύτερο του συνόλου των ρητών, γιατί περιέχει στοιχεία όπως ο $\sqrt{2}$, που, ενώ είναι ρίζα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές (του $x^2-2=0$), δεν είναι ρητός αριθμός. Και αυτό το σύνολο παρά ταύτα είναι άπειρο αριθμήσιμο, δηλαδή μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη και επί αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Ας δούμε, όμως, εν τάχει το γιατί. Το σύνολο των πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές είναι άπειρο αριθμήσιμη ένωση άπειρων αριθμήσιμων συνόλων πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές, καθένα εκ των οποίων συνόλων περιέχει τα πολυώνυμα n -οστού βαθμού με ακέραιους συντελεστές και μόνον αυτά, όπου ν φυσικός αριθμός. Κάθε πολυώνυμο n -οστού βαθμού έχει το πολύ πεπερασμένες ως προς το πλήθος τους αλγεβρικές ρίζες, κατά μέγιστον n . Έτσι, το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών έχει άπειρη αριθμήσιμη πληθυκότητα ως άπειρη αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων αριθμών· των συνόλων, δηλαδή, που καθένα τους αντιστοιχεί στην ολότητα των πεπερασμένων, ως προς το πλήθος τους, ριζών ενός πολυωνύμου.

Το τελευταίο προς εξέταση υποσύνολο των πραγματικών αριθμών είναι αυτό των υπερβατικών. Υπερβατικοί αριθμοί είναι, όπως ήδη είπαμε, αυτοί που δεν αποτελούν ρίζες πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές. Το πλήθος τους είναι συντριπτικά μεγαλύτερο αυτού των αλγεβρικών αριθμών. Ένας γνωστός, όπως επίσης είπαμε, εκπρόσωπός τους είναι ο π , ο λόγος δηλαδή του μήκους περιφέρειας κύκλου προς την διάμετρό του. Θα ξαναμιλήσουμε όμως για την πληθυκότητά τους, αφού συζητήσουμε όλα τα της πληθυκότητας των πραγματικών αριθμών.

Είναι αποδεδειγμένο ότι η πληθυκότητα των πραγματικών αριθμών ταυτίζεται με την πληθυκότητα των πραγματικών αριθμών που βρίσκονται μεταξύ του 0 και του 1, των πραγματικών δηλαδή x με $0 < x < 1$. Η συγκεκριμένη απόδειξη είναι σχεδόν τετριμμένη αν ληφθεί υπ' όψιν -όπως άλλωστε θα δούμε στην συνέχεια- ότι η πληθυκότητα των αριθμών αυτών (των x με $0 < x < 1$) είναι σαφώς μεγαλύτερη της πληθυκότητας των φυσικών αριθμών. Έτσι, επειδή η πληθυκότητα των πραγματικών ισούται με το γινόμενο της πληθυκότητας των x με $0 < x < 1$, πολλαπλασιασμένη με την πληθυκότητα των φυσικών αριθμών, αυτή η ζητούμενη πληθυκότητα των πραγματικών υπερβατικών πληθυκότητα των φυσικών, επειδή ισούται με την αντίστοιχη πληθυκότητα του συνόλου των x με $0 < x < 1$. Τα παραπάνω στηρίζονται στο γεγονός ότι, αν έχουμε δύο απείρους πληθυαρίθμους

17. «Γνήσιο υποσύνολο» ενός συνόλου B καλούμε κάθε σύνολο A τέτοιο ώστε: α) για κάθε $x \in A$ έπειται ότι $x \in B$, και β) υπάρχει $x \in B$ που δεν ανήκει στο A .

και λ με $x < \lambda$, τότε το γινόμενό τους $\kappa \cdot \lambda$ ισούται με τον μεγαλύτερο των δύο πληθαρίθμων, δηλαδή τον λ . Για να συμπληρώσουμε την εικόνα, η πληθικότητα των πραγματικών αριθμών ισούται με το γινόμενο της πληθικότητας του συνόλου των x με $0 < x < 1$ επί την πληθικότητα του συνόλου των ακέραιών –που ταυτίζεται με την πληθικότητα του συνόλου των φυσικών, όπως έχει ήδη λεχθεί–, και αυτό το γινόμενο ισούται με την πληθικότητα του συνόλου των x με $0 < x < 1$, επειδή αυτή η πληθικότητα είναι μεγαλύτερη της πληθικότητας του συνόλου των ακέραιών. Ότι η πληθικότητα των πραγματικών αριθμών ισούται με το γινόμενο της πληθικότητας του συνόλου των x με $0 < x < 1$ επί την πληθικότητα του συνόλου των ακέραιών προκύπτει εκ του γεγονότος ότι η ευθεία αποτελείται από ένα πλήθος διαστημάτων της μορφής $(v, v+1]$,¹⁸ που είναι άπειρα αριθμήσιμα ως προς το πλήθος τους, όπου το v είναι ακέραιος.

Ας γυρίσουμε, όμως, πίσω στον ισχυρισμό μας ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $0 < x < 1$ έχει πληθικότητα μεγαλύτερη αυτής του συνόλου των φυσικών αριθμών. Είναι τετριμένο να ισχυρισθούμε ότι η πληθικότητα αυτή είναι άπειρη, είναι δηλαδή μεγαλύτερη από ή ίση με την πληθικότητα του συνόλου των φυσικών αριθμών, η οποία συμβαίνει να είναι η μικρότερη δυνατή άπειρη πληθικότητα. Το ότι είναι άπειρη προκύπτει εκ του γεγονότος ότι για το σύνολο αυτό, δηλαδή το ανοικτό διάστημα $(0, 1)$,¹⁹ ισχύει η ιδιότητα της άπειρης διαιρεσιμότητας, που συνεπάγεται την απειρία των στοιχείων του. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ότι οι αριθμοί x με $x \in (0, 1)$ είναι άπειροι αριθμήσιμοι. Αυτό σημαίνει ότι, επειδή μπορούν να παρασταθούν ως δεκαδικοί αριθμοί με μηδενικό ακέραιο μέρος, μπορούν να ταξινομηθούν ως εξής:

$$\begin{aligned} 0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{1v} \dots \\ 0, \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23} \dots \alpha_{2v} \dots \\ 0, \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33} \dots \alpha_{3v} \dots \\ \dots \\ 0, \alpha_{vv}\alpha_{v2}\alpha_{v3} \dots \alpha_{vv} \dots \\ \dots \end{aligned}$$

όπου όλα τα α_{ij} , με i και j φυσικούς αριθμούς, είναι ακέραιοι αριθμοί μεταξύ του 0 και του 9, των 0 και 9 συμπεριλαμβανομένων. Πριν προχωρήσουμε ας τονίσουμε ότι στην ταξινόμηση αυτή δεν περιλαμβάνονται οι αριθμοί 0,000... 0... και 0,9999... 9... γιατί ο πρώτος ταυτίζεται με τον αριθμό 1 και ο δεύτερος με τον

18. Με $(v, v+1]$ συμβολίζουμε το διάστημα των πραγματικών αριθμών x με $v < x$ και $x \leq v+1$.

19. Με $(0, 1)$ συμβολίζουμε το ανοικτό διάστημα με άκρα τα 0 και 1, δηλαδή το σύνολο των x με $0 < x < 1$.

αριθμό 0. Επίσης, φροντίζουμε να μην περιλαμβάνονται οι αριθμοί που από ένα σημείο και μετά η δεκαδική τους παράσταση αποτελείται αποκλειστικώς από εννιάρια ή αποκλειστικώς από μηδενικά γιατί τότε ταυτίζονται επίσης με ήδη εμφανιζόμενους στην λίστα που φτιάχαμε αριθμούς. Επιστρέφουμε τώρα παράγοντας ένα αριθμό b που βρίσκεται μεταξύ του 0 και του 1 ως εξής: Γράφουμε $b=0, b_1 b_2 b_3 \dots b_v \dots$ όπου $b_1 \neq \alpha_{11}$, $b_2 \neq \alpha_{22}$, $b_3 \neq \alpha_{33}, \dots b_v \neq \alpha_{vv}, \dots$ προσέχοντας ο δεκαδικός αριθμός που παράγουμε να μην έχει όλο εννιάρια ή όλο μηδενικά από ένα σημείο και μετά. Έτσι, έχοντας στην διάθεσή μας τον αριθμό $0, b_1 b_2 b_3 \dots b_v \dots$ που μόλις κατασκευάσαμε, παρατηρούμε δύο πράγματα. Πρώτον, ο αριθμός αυτός δεν βρίσκεται στην λίστα που έχουμε κατασκευάσει, γιατί, αν συνέβαινε κάτι τέτοιο και βρισκόταν στην θέση v , επί παραδείγματι, τότε θα ήταν ταυτόσημος με τον αριθμό $0, \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13} \dots \alpha_{vv} \dots$ με τον οποίον γνωρίζουμε ότι διαφέρει γιατί το δεκαδικό του φημίο b , είναι εξ ορισμού διαφορετικό από το α_{vv} . Δεύτερον, κάτι τέτοιο είναι απολύτως αδύνατο γιατί η λίστα που κατασκευάσαμε υποτίθεται ότι είναι πλήρης, φιλοξενώντας κάθε αριθμό $x \in (0, 1)$. Και τούτο, το «απολύτως αδύνατο» δηλαδή, ισχύει γιατί ο αριθμός b που έχουμε παραγάγει ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$ χωρίς να υπάρχει στην λίστα που κατασκευάσαμε, η οποία υποτίθεται ότι περιέχει με εξαντλητικό τρόπο όλους τους αριθμούς x με $x \in (0, 1)$. Έτσι, η πληθικότητα του συνόλου $(0, 1)$ δεν είναι άπειρη αριθμήσιμη και επειδή είναι άπειρη πρέπει να είναι αυτό που καλούμε «υπεραριθμήσιμη».

Επειδή, λοιπόν, η πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών είναι ταυτόσημη με την πληθικότητα του συνόλου των αριθμών x με $x \in (0, 1)$ και επειδή οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους αλγεβρικούς αριθμούς, που είναι άπειροι αριθμήσιμοι, και τους υπερβατικούς, η πληθικότητα του συνόλου των υπερβατικών πρέπει να είναι ταυτόσημη με την πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Και τούτο διότι στην κατά Zermelo-Fraenkel θεωρία των συνόλων²⁰ για απέιρους πληθαρίθμους κ και λ με $\kappa < \lambda$ ισχύει ότι $\kappa + \lambda = \lambda$. Επειδή η πληθικότητα του συνόλου των πραγματικών αριθμών μεταξύ 0 και 1 αποδεικνύεται ότι είναι ίση με την πληθικότητα του συνόλου των δυναμοσυνόλων του συνόλου των φυσικών αριθμών, αν συμβολίσουμε κατά πώς πρέπει με 2^{\aleph_0} την πληθικότητα αυτή, τότε $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$.

Τελειώνοντας τούτο το κείμενο θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η τρέχουσα διαισθητική αντίληψη για την οντολογική δομή της πραγματικής ευθείας μας οδηγεί στην άποψη ότι μεταξύ της πληθικότητας του συνόλου των φυσικών αριθμών και της πληθικότητας της πραγματικής ευθείας δεν υπάρχει καμία ενδιάμεση πληθικότητα. Δεν υπάρχει δηλαδή κανένα υποσύνολο των πραγμα-

20. Βλ., επί παραδείγματι, Frank R. Drake, *Set Theory. An Introduction to Large Cardinals*, North-Holland, Άμστερνταμ 1974.

τικών αριθμών με ενδιάμεσα μεγάλο πλήθος στοιχείων. Η διαισθητική αυτή αντίληψη δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αποδείξιμα ισχύουσα μέσω των αξιωμάτων της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας των συνόλων. Το ίδιο ισχύει και για την εκδοχή της ύπαρξης υποσυνόλου της πραγματικής ευθείας με ενδιάμεση πληθικότητα. Η παραπάνω διαισθητική αντίληψη, αν μας είναι επιθυμητό να αντιστοιχεί σε κάποιο είδος οντικής πραγματικότητας, οφείλει να συνοδευθεί από μια αξιωματική παραδοχή, σύμφωνα με την οποία επισημοποιείται η απουσία ενδιάμεσης πληθικότητας μεταξύ της πληθικότητας των φυσικών και αυτής των πραγματικών αριθμών. Και η επισημοποίηση αυτή λαμβάνει χώρα διά της αξιωματικής παραδοχής του συνολοθεωρητικά ανεξάρτητου αιτήματος της Υπόθεσης του Συνεχούς,²¹ σύμφωνα με το οποίο δεν υπάρχει ενδιάμεση πληθικότητα μεταξύ αυτής των φυσικών και αυτής των πραγματικών ή, αλλιώς, σύμφωνα με το οποίο, αν ο επόμενος του \aleph_0 συνολοθεωρητικός πληθαριθμός συμβολίσθει με \aleph_1 , τότε $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

6

ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ, Η ΚΑΛΗ ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ Η ΚΑΛΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ ΤΟΥ ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Στο κείμενό μας «Η οντολογία της πραγματικής ευθείας» που εμπεριέχεται στην παρούσα συλλογή κειμένων, και μάλιστα ακριβώς πριν από το παρόν, αντιμετωπίσαμε σχεδόν εξαντλητικά βασικά χαρακτηριστικά του συνόλου των φυσικών αριθμών που σχετίζονται με την απειρία του. Αφού συμπληρώσουμε κάποια ακόμη, θα προχωρήσουμε στην εξέταση της ιδιότητας της καλής διάταξης, που αποτελεί θεμελιώδες δομικό στοιχείο του συγκεκριμένου συνόλου. Ας ξεκινήσουμε από μια γενικότερη διάκριση μεταξύ των εννοιών «σύνολο αντικειμένων» και «κλάση αντικειμένων». Ένα σύνολο αντικειμένων –συνήθως μαθηματικού και συνολοθεωρητικού ενδιαφέροντος– είναι μια ολότητα που δεν υπάρχει μόνον ως σύμπαν αυτών των αντικειμένων αλλά και ως ενιαίο και ξεχωριστό αντικείμενο. Μία κλάση αντικειμένων –επίσης μαθηματικού και συνολοθεωρητικού ενδιαφέροντος– είναι μια ολότητα που, ενώ υπάρχει ως σύμπαν αυτών των αντικειμένων, είναι δυνατόν να μην υπάρχει ως ξεχωριστό και ενιαίο αντικείμενο. Υπ' αυτήν την έννοια, είναι γνωστό ότι η ολότητα των φυσικών αριθμών, αποτελώντας το σύμπαν των θετικών ακέραιων αριθμών –του μηδενός συμπεριλαμβανομένου–, αποτελεί ένα ενιαίο και ξεχωριστό αντικείμενο στο πλαίσιο, επί παραδείγματι, της κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων. Ομοίως, είναι γνωστό ότι η ολότητα των λεγομένων «διατακτικών» αριθμών καθώς και η ολότητα των «πληθικών» αριθμών, όπως επίσης και η ολότητα των συνόλων, δεν αποτελούν σύνολα αλλά μόνο κλάσεις. Δεν υπάρχουν δηλαδή ενιαία και ξεχωριστά αντικείμενα που να αντιστοιχούν στις έννοιες αυτές, παρά μόνον σύμπαντα, τα οποία δεν είναι δυνατόν να αντικειμενοποιηθούν, τουλάχιστον στο πλαίσιο της παραδεκτής ως ιδιαιτέρως εύχρηστης κατά Zermelo-Fraenkel θεωρίας. Είναι προφανές ότι ένα σύνολο αντικειμένων είναι μια κλάση αντικειμένων, ενώ δεν ισχύει το αντίστροφο. Αν ίσχυε, τότε η κλάση των συνόλων θα ήταν σύνολο και έτσι θα ανεδύνετο απειλητικά το παράδοξο του Cantor ως συνέπεια του θεωρήματος του Cantor, σύμφωνα με το οποίο, αν A είναι σύνολο και $\mathcal{P}(A)$ το δυναμοσύνολό του, τότε η πληθικότητα του $\mathcal{P}(A)$ είναι καθαρά μεγαλύτερη της πληθικότητας του A . Δηλαδή, αν στην θέση του A τοποθετήσουμε το σύνολο όλων των

21. Στο ίδιο, σ. 65.