

ΔΙΟΝΥΣΙΟΣ Α. ΑΝΑΠΟΛΙΤΑΝΟΣ

Λαβύρινθος, γνωσιολογικά ρήματα,
φιλοσοφικά σπαράγματα και παρανυδίες

29 κείμενα φιλοσοφίας



ΕΚΔΟΤΙΚΗ ΑΘΗΝΩΝ Α.Ε.

χωρίς μεγάλη συζήτηση της, ως προς τα συγκεκριμένα σύμπαντα, σχεσιακής μεν απόλυτα αντικειμενικής δε, έννοιας της μαθηματικής αλήθειας. Αντιθέτως, στις συνήθεις αντιρεαλιστικές θεωρίες για την φύση των μαθηματικών αντικειμένων και το status των μαθηματικών αληθειών, η έμφαση μετατίθεται προς την γνωσιολογική κατεύθυνση, όπου η γνώση των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών, φιλοσοφικά πρότερη της οντολογικής αποδοχής, αποκτά γλωσσικό ενδοσυστημικό χαρακτήρα και συνδέεται με την αποδειξιμότητα ή και την ενδοσυστημική επαληθευσιμότητα συγκεκριμένων μαθηματικών προτάσεων, με τις υπαρκτικές να κατέχουν σημαντική θέση σ' αυτή την διαδικασία.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονισθεί εκ νέου ότι η φαινομενική σχετικότητα της αλήθειας, στο πλαίσιο μιας πλουραλιστικής οντολογίας μαθηματικών μοντέλων, δεν έχει καμιά συνάφεια με σχετικιστικές απόψεις ιστορικιστικού, κοινωνιολογικού ή ψυχολογικού χαρακτήρα. Τα μαθηματικά μοντέλα, ως οντολογικές ή γνωσιολογικές μήτρες της μαθηματικής αλήθειας, δεν επιλέγονται κατά βούλησιν, ούτε αποτελούν δημιουργήματα ιδιαζουσών ιστορικοκοινωνικών συνθηκών. Βασικό στοιχείο της ανεξαρτησίας από τέτοιες χωροχρονικές και περιστασιακές παραμέτρους είναι η δομική τους μοναδικότητα, που τα καθιστά αντικειμενικά και συναρτημένα, ως μοναδικά, με την αναγκαία και μοναδική λογική ύφανση του σύμπαντος, όπου ο όρος «σύμπαν» χρησιμοποιείται στο σημείο αυτό με το ευρύτερο δυνατό, σημασιολογικό του περιεχόμενο.

Το πληροφοριακό περιεχόμενο των μαθηματικών αληθειών

Οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις μοιράζονται με τις αληθείς προτάσεις και των άλλων περιοχών του επιστητού την ιδιότητα (που μεταφράζεται ως δυνατότητα) πληροφόρησης για την δομή του κόσμου στον οποίον αναφέρονται. Το σύνολο των πληροφοριών, που είναι δυνατόν κανείς να εξαγάγει από κάθε συγκεκριμένη αλήθεια, αποτελεί το πληροφοριακό της περιεχόμενο. Αυτό το περιεχόμενο δεν είναι αναγκαίο και απαραίτητο να μας αποκαλύπτεται ολόκληρο. Η γνωσιακή μας πρόσβαση σ' αυτό είναι αναγκαστικά περιορισμένη λόγω του πεπερασμένου χαρακτήρα αυτής της πρόσβασης, που αποτελεί συστατικό στοιχείο του τρόπου με τον οποίον γνωρίζει το έλλογο ον.

Ακολουθώντας την διάκριση, που υπαινιχθήκαμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι δυνατόν να εξετάσουμε το είδος της πληροφορίας, που μας παρέ-

χεται από τις μαθηματικές αλήθειες με, σχετικώς, επαρκή τρόπο. Έτσι, ξεκινώντας από τις αληθείς προτάσεις, που είναι ταυτολογικές ή που, ακριβέστερα, ανήκουν στο σύνολο των λογικά εγκύρων τύπων, είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε το πληροφοριακό τους περιεχόμενο ευχερώς. Πριν όμως απ' αυτό θα πρέπει να δώσουμε κάποιες πληροφορίες τεχνικού χαρακτήρα για τις έννοιες, που χρησιμοποιήσαμε μόλις παραπάνω. Η έννοια της «ταυτολογίας» ή της «ταυτολογικής πρότασης» (του «ταυτολογικού προτασιακού τύπου» ακριβέστερα) είναι έννοια οριζόμενη στο πλαίσιο του προτασιακού λογισμού. Είναι, λοιπόν, μια ταυτολογία ένας προτασιακός τύπος του οποίου η αληθοτιμή είναι Τ (είναι δηλαδή ένας αληθής προτασιακός τύπος) για κάθε συνδυασμό αληθοτιμών, με τις οποίες αποτιμώνται οι προτασιακές του μεταβλητές. Από την άλλη μεριά ένας λογικά έγκυρος τύπος είναι ένας τύπος μιας πρωτοβάθμιας γλώσσας που καθίσταται αληθής σε κάθε δομή ή ερμηνεία της αντίστοιχης γλώσσας. Οι ταυτολογίες είναι γνήσιο υποσύνολο των συνόλου των λογικά εγκύρων τύπων. Η έννοια του «λογικά εγκύρου τύπου» είναι το μαθηματικό αντίστοιχο της καντιανής έννοιας της «αναλυτικότητας».

Η έννοια της «αναλυτικότητας» είναι έννοια, που συναντά κανείς στον Leibniz, όταν ο φιλόσοφος επιχειρεί να ταξινομήσει τις αλήθειες ή καλύτερα τις αληθείς προτάσεις. Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή, οι αληθείς προτάσεις χωρίζονται σε δύο ξένες μεταξύ τους κλάσεις. Η πρώτη είναι αυτή των αναλυτικών προτάσεων και η δεύτερη των ενδεχομενικών αληθών προτάσεων. Το φιλοσοφικό σύστημα του Leibniz, κατά το μεταφυσικό ή οντολογικό του μέρος, στηριζόταν σε μια σειρά προκείμενες ουσιαστικής σημασίας για την ιστορία της φιλοσοφίας. Αυτή που σχετίζεται με τον διαχωρισμό των αληθών προτάσεων σε αναλυτικές και ενδεχομενικές είναι η προκείμενη, σύμφωνα με την οποία ο Δημιουργός επέλεξε να δημιουργήσει, να καταστήσει εμπειρικά υπαρκτό, τον καλύτερο δυνατό κόσμο. Η επιλογή αυτή (ανεξαρτήτως των μεταφυσικών αποριών που προκύπτουν σχετικά με το ερώτημα αν ήταν επιβεβλημένη η σχετική θεϊκή ενέργεια και επομένως καθορισμένη, πέραν της θεϊκής βουλήσεως, αφού ο Δημιουργός, ως πανάγαθος, δεν θα μπορούσε να θελήσει διαφοροπρότων) προϋπέθετε την δυνατότητα ύπαρξης περισσοτέρων του ενός, και, μάλιστα, άπειρων ως προς το πλήθος τους, δυνατών κόσμων. Αυτή η δυνάμει ύπαρξη περισσοτέρων του ενός δυνατών κόσμων αποτελεί θεμελιώδη φιλοσοφική σταθερά του συστήματος του Leibniz. Μία αληθής πρόταση είναι αναλυτική, κατά Leibniz, όταν είναι αληθής σε κάθε δυνατό κόσμο. Μία αληθής πρόταση είναι ενδεχομενική όταν υπάρχει ένας τουλάχιστον δυνατός κόσμος στον οποίον η πρόταση είναι αληθής και υπάρχει, επίσης, ένας τουλάχιστον δυνατός κόσμος στον οποίον η πρόταση είναι ψευδής. Για παράδειγμα, μια αληθής ενδεχομενική πρόταση είναι η πρόταση «ο γάτος μου είναι λευκός»

στην περίπτωση, που ο γάτος μου είναι λευκός, ενώ θα μπορούσε να μην είναι, και μία αληθής αναλυτική πρόταση η «κάθε άνθρωπος είναι θνητός ή υπάρχει τώρα ή θα υπάρξει στο μέλλον ένας άνθρωπος που είναι ή θα είναι αθάνατος». Στό σημείο αυτό θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν υπάρχουν ψευδείς αναλυτικές προτάσεις και, έτσι, ο όρος «αληθής» μπροστά από τον όρο «αναλυτική» είναι στην ουσία του σημασιολογικά πλεονάζων.

Στο σύστημα του Leibniz υπάρχει και ένας δεύτερος ορισμός των αναλυτικών και των ενδεχομενικών αληθών προτάσεων. Σύμφωνα με αυτόν, αναλυτική αληθής πρόταση είναι κάθε πρόταση της οποίας η αλήθεια είναι δυνατόν να αποκαλυφθεί με πεπερασμένη, ως προς τα βήματά της, ανάλυση, που θα οδηγούσε σε πεπερασμένες, ως προς το πλήθος τους, αναλυτικές προτάσεις, άμεσα αναγνωρίσιμες ως αληθείς και, επομένως, μη περαιτέρω αναλύσιμες. Αντίθετα, ενδεχομενική αληθής πρόταση είναι κάθε πρόταση η αλήθεια της οποίας δεν είναι δυνατόν να αποκαλυφθεί με πεπερασμένα, ως προς το πλήθος τους, αναλυτικά βήματα, πράγμα που σημαίνει ότι μια τέτοια ανάλυση θα απαιτούσε, ενδεχομένως, άπειρα ως προς το πλήθος τους βήματα. Μια τέτοια ανάλυση, επομένως, δεν θα μπορούσε να την φέρει εις πέρας ένα πεπερασμένο νοητικά έλλογο όν, όπως ο άνθρωπος. Η μόνη οδός διαπίστωσης της αληθειας μιας ενδεχομενικής αληθούς πρότασης είναι η γνώση της συμφωνίας της με την κατάσταση πραγμάτων την οποίαν περιγράφει.

Σύμφωνα με τον Leibniz οι μαθηματικές αλήθειες είναι αλήθειες αναλυτικές. Στην άποψη αυτή, η οποία ελέγχεται ως λανθασμένη, δεδομένου ότι οι μαθηματικές αληθείς προτάσεις δεν είναι προτάσεις αληθείς σε κάθε δυνατό κόσμο (κατ' αναλογίαν σε κάθε δυνατή δομή ή ερμηνεία της γλώσσας στην οποίαν γράφεται η πρόταση) οδηγήθηκε, κατά πάσα πιθανότητα, ο Leibniz επειδή δεν είχε την δυνατότητα να διαχωρίσει την έννοια της απόδειξης απ' αυτήν της αληθειας. Άλλωστε κάτι τέτοιο κατέστη δυνατό μόνον κατά τον 20ό αιώνα και μετά την απόδειξη του θεωρήματος πληρότητας των πρωτοβάθμιων γλωσσών από τον Gödel. Έτσι ο Leibniz είναι πιθανόν να συνέχει το αναγκαία πεπερασμένο του αριθμού των βημάτων της απόδειξης με αυτό του αριθμού των βημάτων, που θα απαιτούσε μια αναλυτική πρόταση για να αναλυθεί στα εξ αυτού συνετέθη.

Ο Kant, εκτός της διάκρισης μεταξύ αναλυτικότητας και ενδεχομενικότητας (για την τελευταία χρησιμοποιεί τον όρο συνθετικότητα), εισάγει ακόμη μια διάκριση στην προσπάθειά του να ταξινομήσει τις αληθείς προτάσεις (τις αληθείς κρίσεις, για να είμαστε ακριβέστεροι). Έτσι οι αληθείς προτάσεις είναι δυνατόν να είναι αναλυτικές αληθείς ή συνθετικές αληθείς αλλά και *a priori* αληθείς ή *a posteriori* αληθείς. Η νέα αυτή διάκριση εισάγεται από τον Kant με σκοπό να επιτευχθεί ο διαχωρισμός αληθών προτάσεων, με βασικό τους στοι-

χείο την εξαρτημένη από τον χρόνο αλήθεια τους, απ' αυτές για τις οποίες μια τέτοια εξάρτηση δεν υπάρχει.

Οι πρώτες είναι οι *a posteriori* αληθείς προτάσεις, οι δεύτερες οι *a priori*. Έτσι, οι συνδυαστικές δυνατότητες για τις αληθείς προτάσεις είναι τέσσερις. Η πρώτη δυνατότητα είναι αυτή των αναλυτικών *a priori* αληθών προτάσεων. Η αναλυτικότητα εδώ απορροφά την ιδιότητα του *a priori* αληθούς, με την έννοια ότι δεν είναι δυνατόν μια αναλυτική αληθής πρόταση να μην είναι *a priori* αληθής. Χωρίς να διατρέχουμε τον κίνδυνο αναχρονισμού, είναι δυνατόν να ισχυριστούμε ότι η κατηγορία των αναλυτικών *a priori* αληθών προτάσεων συμπίπτει σε επίπεδο μαθηματικής λογικής με την κατηγορία των λογικά εγκύρων τύπων. Η δεύτερη δυνατότητα είναι αυτή των αναλυτικών *a posteriori* αληθών προτάσεων. Η κατηγορία τέτοιων προτάσεων είναι κενή περιεχομένου. Δεν υπάρχουν αναλυτικές *a posteriori* αληθείς προτάσεις διότι, όπως ήδη ελέχθη, η αναλυτικότητα συνεπάγεται την ιδιότητα του *a priori* αληθούς. Η τρίτη δυνατότητα αναφέρεται στις συνθετικές *a posteriori* αληθείς προτάσεις. Η κατηγορία των αληθών αυτών προτάσεων είναι δυνατόν να θεωρηθεί ότι περιλαμβάνει τις κατά Leibniz ενδεχομενικές αληθείς προτάσεις. Η πρόταση, δηλαδή, «η γάτα μου είναι λευκή», εφ' όσον είναι αληθής, είναι μια *a posteriori* συνθετική αληθής πρόταση. Η τέταρτη και τελευταία δυνατότητα αναφέρεται στις συνθετικές *a priori* αληθείς προτάσεις. Αν η κατηγορία αυτή αληθών προτάσεων είναι κενή περιεχομένου, τότε η ιδιότητα του *a priori* αληθούς συμπίπτει με την αναλυτικότητα και η ιδιότητα του *a posteriori* αληθούς με την συνθετικότητα. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει. Η κατηγορία αυτή αληθών προτάσεων δεν είναι κενή περιεχομένου γιατί, κατά Kant, σ' αυτήν ανήκουν όλες οι αληθείς προτάσεις των μαθηματικών. Ανήκουν σ' αυτήν όλες οι προτάσεις, που σχετίζονται με τα βασικά δομικά χαρακτηριστικά της αισθητηριακής αντίληψης. Οι αλήθειες των μαθηματικών είναι αλήθειες, που αναφέρονται στην χωροχρονικότητα. Οι αλήθειες της γεωμετρίας είναι αλήθειες του ευκλείδειου, τρισδιάστατου χώρου ενώ οι αλήθειες της αριθμητικής αλήθειες του γραμμική ρέοντος χρόνου. Ο χώρος, κατά Kant, είναι το *a priori* πλαίσιο αναφοράς του υλικού της αισθητηριακής εμπειρίας και ο χρόνος το *a priori* γραμμικό πλαίσιο της μετάβασης από μια αισθητηριακή κατάσταση σε μια άλλη. Αληθείς προτάσεις, που αναφέρονται στην δομή του χωροχρόνου, είναι, επομένως, *a priori* αληθείς γιατί το πλαίσιο της αισθητηριακότητας δεν υπόκειται σε χωροχρονικές μεταβολές, και συνθετικές αληθείς γιατί αναφέρονται σε ένα πλαίσιο, που θα μπορούσε να είναι και διαφορετικό. Οι αληθείς μαθηματικές προτάσεις είναι, επομένως, κατά Kant, *a priori* συνθετικές αληθείς προτάσεις και τούτο διότι η γεωμετρία είναι κατά την άποψή του η επιστήμη του χώρου και η αριθμητική η επιστήμη του χρόνου. Πώς θα μπορούσε να είναι, άλλωστε,

αλλιώς, δεδομένου ότι η περίοδος της ανακάλυψης εναλλακτικών χωροχρονικών σεναρίων, όπως αυτά που έλαβαν σάρκα και οστά μετά την εμφάνιση των μη-ευκλειδείων γεωμετριών, δεν είχε έλθει ακόμη;

Επιστρέφοντας στην έννοια του λογικά εγκύρου τύπου, απαιτείται να την συνδέσουμε με την έννοια της αποδείξιμότητας. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι ένας λογικά έγκυρος τύπος είναι αποδείξιμος στο πλαίσιο κάθε μαθηματικής θεωρίας, που θα ήταν δυνατόν να σχηματισθεί στο γλωσσικό περιβάλλον του λογικά εγκύρου τύπου. Έτσι το πληροφοριακό περιεχόμενό ενός λογικά εγκύρου τύπου είναι το σύνολο των πληροφοριών, που μπορεί να παράσχει οποιαδήποτε συνεπής μαθηματική θεωρία. Υπ' αυτήν την έννοια ένας λογικά έγκυρος τύπος, ως ισχύων σε κάθε δυνατό κόσμο (για να χρησιμοποιήσουμε καταχρηστικά την κατά Leibniz ορολογία), δεν μας πληροφορεί για την δομή του εκάστοτε συγκεκριμένου κόσμου. Είναι μια πληροφόρηση που μας παρέχεται τόσο πλούσια ώστε να καθίσταται άχρηστη. Ένας λογικά έγκυρος τύπος αποτελεί την συνεπαγωγή οποιουδήποτε τύπου και έτσι το αληθειακό επακόλουθο κάθε αλήθειας. Είναι ακριβώς αυτό το χαρακτηριστικό ενός λογικά εγκύρου τύπου, που τον καθιστά πληροφοριακά άχρηστον, ή πληροφοριακά τετριμένον.

Η επομένη κατηγορία αληθών προτάσεων των, οποίων το πληροφοριακό περιεχόμενο θα πρέπει να εξετάσουμε, είναι αυτή των προτάσεων, που αποτελούν θεωρήματα στο πλαίσιο κάποιας μη-τετριμένης μαθηματικής θεωρίας, δηλαδή κάποιας μαθηματικής θεωρίας που στα αξιώματά της περιέχονται και μη λογικά έγκυροι τύποι. Βασικά χαρακτηριστικά μιας τέτοιας μαθηματικής θεωρίας, όπως γνωρίζουμε, είναι η γλώσσα στην οποία γράφονται τα αξιώματά της και, προφανώς, το σύνολο των αξιωμάτων της. Το πληροφοριακό περιεχόμενο μιας αποδείξιμης, στο πλαίσιο της θεωρίας, πρότασης είναι μη-τετριμένο. Η πρόταση, δηλαδή, μας πληροφορεί για χαρακτηριστικά, κατά μία έννοια, κοινά όλων των μοντέλων της θεωρίας, που καθιστούν αληθή όλα τα αξιώματα. Ο λόγος για κάτι τέτοιο έχει να κάνει με το γεγονός ότι η αληθεια των αξιωμάτων της θεωρίας μεταφέρεται ή μετακενώνεται, μέσω της διαδικασίας της απόδειξης, στις συνέπειές τους, δηλαδή στα θεωρήματα της θεωρίας. Κοντολογίς, τα θεωρήματα μιας θεωρίας είναι αληθή σε κάθε μοντέλο της θεωρίας.

Ένα πολύ σοβαρό αντισχετικιστικό επιχείρημα, που αναδύεται στο σημείο αυτό, είναι ότι ανεξαρτήτως του αληθειακού πλουραλισμού κάθε μαθηματικά σημαντικής θεωρίας, δηλαδή κάθε θεωρίας, που εμπεριέχει ένα σημαντικό μέρος των αξιωμάτων της κατά Peano αριθμητικής, οι υπαρκτικές προτάσεις που αναφέρονται σε οικεία μαθηματικά αντικείμενα, όπως οι φυσικοί αριθμοί, έχουν, ως αποδείξιμες στο πλαίσιο κάθε τέτοιας θεωρίας, έναν, με συγκεκριμένη έννοια, απόλυτο χαρακτήρα. Ο αληθειακός πλουραλισμός κάθε σημαντι-

κής μαθηματικής θεωρίας οφείλεται στην υψηλή απειρία του συνόλου των μοντέλων της. Ακόμη και αν αυτό, όμως, μπορούσε να αποφευχθεί με προσφυγή σε δευτεροβάθμια γλώσσα (ακόμη και αν δηλαδή, τεχνητά, εξαφάνιζε κανείς την υψηλή απειρία του συνόλου των μοντέλων κάθε μαθηματικά σημαντικής θεωρίας, αντικαθιστώντας την με ένα μοναδικό μοντέλο), κάτι τέτοιο δεν θα προσέθετε τίποτε ουσιαστικό στην δυνατότητα αποδείξιμότητας των συγκεκριμένων υπαρκτικών προτάσεων και, επομένως, δεν θα προσέθετε τίποτε ουσιαστικό στο αληθειακό γεγονός ότι οι προτάσεις αυτές είναι αναγκαία αληθείς σε κάθε μοντέλο της αρχικής θεωρίας. Δηλαδή, η δευτεροβάθμια αντικατάσταση του συνόλου των μοντέλων της θεωρίας με ένα μοναδικό μοντέλο της δεν θα προσέθετε τίποτε στην αποδεικτική και αληθειακή ισχύ αυτών των υπαρκτικών προτάσεων. Στο σημείο αυτό απαιτείται να δοθεί ένα παράδειγμα μετάβασης από μία πρωτοβάθμια μαθηματική θεωρία σε μια δευτεροβάθμια. Στα πλαίσια των αξιωμάτων της κατά Peano πρωτοβάθμιας αριθμητικής υπάρχει το αξιωματικό σχήμα της επαγωγής, που για κάθε τύπο με μία ελεύθερη μεταβλητή $\varphi(x)$ έχει ως εξής:

$$\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall x\varphi(x).$$

Η κατά Peano πρωτοβάθμια αριθμητική έχει άπειρα, ως προς το πλήθος τους, μοντέλα, δηλαδή υπάρχουν άπειρα, ως προς το πλήθος τους, σύμπαντα μαθηματικών αντικειμένων στα οποία αληθεύουν τα αξιώματα της θεωρίας. Αν χρησιμοποιήσουμε δευτεροβάθμια γλώσσα, στην οποία να επιτρέπεται η χρήση ποσοδεικτών επί μεταβλητών με πεδίο ορισμού τους ιδιότητες, τότε το αξιωματικό σχήμα της επαγωγής αντικαθίσταται από μία και μοναδική πρόταση, την ακόλουθη:

$$\forall P[P(0) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(x+1)) \rightarrow \forall xP(x)].$$

Στην περίπτωση αυτή, το αξιωματικό σύστημα, που προκύπτει, έχει μοναδικό μοντέλο, αυτό που παρέχεται από το σύνηθες σύμπαν των φυσικών αριθμών. Παρά ταύτα, ένα σοβαρό πρόβλημα προκύπτει. Στην χρησιμοποιούμενη δευτεροβάθμια γλώσσα δεν ισχύει, πλέον, το θεώρημα πληρότητας του Gödel. Αυτό σημαίνει ότι δεν ισχύει η ισοδυναμία αποδείξιμότητας και επαληθευσιμότητας, η τόσο πολύτιμη στα πλαίσια πρωτοβάθμιων μαθηματικών θεωριών.

Η τρίτη κατηγορία αληθών προτάσεων, των οποίων το πληροφοριακό περιεχόμενο οφείλουμε να εξετάσουμε, είναι αυτή των προτάσεων, που, σε σχέση με κάποια συγκεκριμένη μαθηματική θεωρία, ούτε αυτές ούτε οι αρνήσεις τους είναι αποδείξιμες στο πλαίσιο της θεωρίας. Σε μια τέτοια περίπτωση θα υπάρ-

χουν μοντέλα της θεωρίας, που θα καθιστούν αληθή την συγκεκριμένη πρόταση και μοντέλα της θεωρίας, που θα καθιστούν αυτήν ψευδή και, επομένως, την άρνησή της αληθή. Προτάσεις αυτής της τρίτης κατηγορίας, λοιπόν, έχουν περιορισμένο και σχετικοποιημένο αληθειακό πληροφοριακό περιεχόμενο. Η αλήθεια τους εξαρτάται από το συγκεκριμένο, εκάστοτε, σύμπαν του μοντέλου της θεωρίας στο οποίο αναφέρεται. Η αληθής σ' αυτό το μοντέλο πρόταση περιγράφει δομικά χαρακτηριστικά αυτού του σύμπαντος, όπως και δομικά χαρακτηριστικά των συμπάντων των μοντέλων της θεωρίας στα οποία η πρόταση επίσης αληθεύει. Η ίδια αυτή πρόταση δεν αληθεύει στα σύμπαντα -και υπάρχουν τέτοια- μοντέλων της θεωρίας στα οποία αληθεύει η άρνησή της. Δύο παρατηρήσεις. Σύμφωνα με την πρώτη παρατήρηση, η πληροφορία, που μια τέτοια πρόταση μας παρέχει, για τα σύμπαντα στα οποία αληθεύει είναι σημαντική γιατί αποτελεί από δείκτη της διαφοροποίησης μοντέλων της ίδιας θεωρίας, ο οποίος είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για περαιτέρω μελέτη θεωριών, που σχηματίζονται με επισύναψη στα αξιώματά τους της πρότασης αυτής ή, εναλλακτικά, της άρνησής της. Σχετικό παράδειγμα ο τρόπος με τον οποίον χρησιμοποιείται στο πλαίσιο της κατά ZF θεωρίας των συνόλων το αξιώμα της επιλογής (AC) και η άρνησή του. Με την υπόθεση ότι η κατά ZF θεωρία των συνόλων είναι συνεπής (μη-αντιφατική) θεωρία, η προσθήκη στα αξιώματά της του αξιώματος της επιλογής οδηγεί σε μια νέα, όπως σχετικώς αποδεικνύεται, συνεπή (μη-αντιφατική) θεωρία, την ZFC. Το ίδιο, όμως, ισχύει αν στα αξιώματα της κατά ZF θεωρίας των συνόλων προστεθεί η άρνηση του αξιώματος της επιλογής, με την έννοια ότι η έτσι προκύπτουσα νέα θεωρία είναι επίσης συνεπής (μη-αντιφατική). Θα πρέπει να προσθέσουμε ότι μια συνεπής (μη-αντιφατική) θεωρία, πέραν του ότι δεν εμπειρίζει αποδείξεις αντιφάσεων, χαρακτηρίζεται, συνακόλουθα, από την ύπαρξη ενός, τουλάχιστον, μαθηματικού σύμπαντος, στο οποίο τα αξιώματά της καθίστανται αληθή. Η δεύτερη παρατήρηση έχει να κάνει με την εντύπωση, που είναι δυνατόν να δημιουργηθεί, περί της σχετικότητας της αλήθειας τέτοιων προτάσεων. Επειδή η έννοια της «σχετικότητας» χρησιμοποιείται, πολλές φορές, καταχρηστικώς, με την πρόθεση «απόδειξης» της ασάφειας και εννοιολογικής μεταβλητότητας του σκοπούμενου να αποδειχθεί ως σχετικιστικά δομημένο, θα πρέπει ξανά να τονισθεί ότι η αλήθεια των προτάσεων αυτών είναι απόλυτη (στο πλαίσιο αναφοράς τους) και επομένως αντικειμενική, ανιστορική και χωροχρονικά ανεξάρτητη.

Η φύση των μαθηματικών αντικειμένων και το πρόβλημα της ιστορικότητας των μαθηματικών αντικειμένων και αληθειών

Με το πρόβλημα της φύσης των μαθηματικών αντικειμένων και της λύσης του συνδέεται άμεσα το πρόβλημα της ιστορικότητας της μαθηματικής ανακάλυψης ή εφεύρεσης και της απάντησης σ' αυτό. Έτσι, κυριαρχεί, συνήθως, η άποψη, μεταξύ των ιστορικών των μαθηματικών, ότι η ιστορική συγκυρία παιζει κυριαρχικό ρόλο στην ανάδυση ή δημιουργία νέων μαθηματικών αντικειμένων και στην αποκάλυψη ή διαμόρφωση αληθειών, που συνδέονται μ' αυτά. Η ιστορικότητα αναδεικνύεται πρωτεύουσας σημασίας παράγων και η ιστοριοδιφική της αποτύπωση σημαντική. Μέσα απ' αυτή την κυριαρχη αντίληψη, η οποία αρκετές φορές ιδεολογικοποιείται, παρεισφέρει και εμφανίζεται να οδηγεί την φιλοσοφική συζήτηση μια άποψη ιστορικού σχετικισμού. Ακόμη και αν μια τέτοια άποψη δεν εκφράζεται ούτε διατυπωνεται ευθέως, υπάρχει σχεδόν πάντοτε σε λανθάνουσα μορφή, δεδομένης τής, ορθής κατά τα άλλα, τάσης για λεπτομερειακή περιγραφή των ιστορικών συμβάντων, που οδηγούν στην μαθηματική ανακάλυψη. Εννοούμε με αυτό ότι η μεθοδολογία της λεπτομερειακής περιγραφής, ούσα από πλευράς ιστορικής ανάλυσης απαραίτητη, αρκετές φορές παρερμηνεύεται προς την κατεύθυνση της οντολογίας. Αυτή η παρερμηνεία οδηγεί σε μια αντίληψη προτέροτης της ιστορικής, πιθανόν, αιτιοκρατικής αλυσίδας, και σε μια εντύπωση υπαρκτικής εξάρτησης του περιεχομένου του μαθηματικού ιστορικού συμβάντος απ' αυτήν.

Το μαθηματικό ιστορικό συμβάν και πιθανώς, αιτιοκρατική αλυσίδα, που οδηγεί σ' αυτό, οφείλει να είναι αντικείμενο μελέτης του ιστορικού των μαθηματικών. Η συγκεκριμένη ιστορική συγκυρία ανακάλυψης ενός μαθηματικού αντικειμένου, μιας κλάσης μαθηματικών αντικειμένων, κάποιας μαθηματικής αλήθειας με την μορφή αξιώματος, θεωρήματος ή κάποιας, προς απόδειξη ή διάψευση, εικασίας, είναι απαραίτητο να χαρτογραφηθεί ιστορικά με μικρότερη ή μεγαλύτερη, κατά το δυνατόν, ακριβεία. Και αυτό γιατί έχουν επιστημολογική σημασία, στα πλαίσια της περιστασιακότητας, οι λεπτομέρειες (κοινωνικές, οικονομικές, ψυχολογικές, επιστημολογικές κτλ.) εμφάνισης του εκάστοτε συγκεκριμένου μαθηματικού ιστορικού συμβάντος. Είναι απαραίτητη η επισήμανση ιστορικών συγκυριών και η πιθανή διαπίστωση συνθηκών εννοιολογικής ωρίμασης, που καθιστούν μια ιστορική εποχή προσφορότερη για την εμφάνιση του συγκεκριμένου ιστορικού συμβάντος (ή κάποιου ισοδυνάμου του από πλευράς μαθηματικού αποτελέσματος) από μια άλλη. Είναι γνωσιακά σημαντική, κατά το δυνατόν, ακριβής, χαρτογράφηση του εννοιολογικού ορί-