Μάθημα 1'

08/05/2015

Τύποι του Taylor

§1 Για συναρτήσεις μιας μεταβλητής

Θ1 Έστω $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ (δηλαδή έχει παραγώγους έως τάξης $n+1$ συνεχείς) $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $x_0 \in I$ φιξαρισμένο

$\forall x \in I$. Ισχύει:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \\ &+ \left(\int_0^1 \frac{(1+u)^n}{n!} \cdot f^{n+1}(x_0+u(x-x_0)\, du\right) \cdot (x-x_0)^{n+1} \end{aligned}} \quad (1)$$

Σχόλια

1. $(1) \Longleftrightarrow f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ όπου $\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k}$

Το Πολυώνυμο P_n είναι το μοναδικό $(f^{(0)} = f,\ 0! = 1)$ πολυώνυμο βαθμού n που έχει την ίδια τιμή στο x_0 με την f και ίδιες παραγώγους τάξης $k = 1, \dots, n$ στο x_0 με την f (Ασκ. 1). Καλείται πολυώνυμο Taylor n-βαθμού της f στο x_0.

και $R_n(x) = \left(\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0)) du\right) \cdot (x-x_0)^{n+1}$

$$(2) \quad \boxed{R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}$$ είναι το υπόλοιπο Taylor

αλλαγή μεταβλητής:

$t = x_0 + u(x-x_0)$

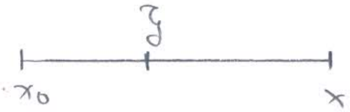
$u = \frac{t-x_0}{x-x_0}$ $\quad 1-u = \frac{x-t}{x-x_0} \Rightarrow du = \frac{1}{x-x_0} dt$

② Για $n=0$, ο τύπος του Taylor (βλέπε (21)) ταυτίζεται με το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

③ Από τον τύπο $R_n(x) = \left(\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0))\,du \right)(x-x_0)^{n+1}$

βλέπουμε επίσης ότι (3) $\boxed{R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \quad \text{για κάποιο } \xi \in (x_0, x).}$



<u>Απ.</u>: Εφαρμόζουμε το 2ο Θεώρημα Μέσης Τιμής (Βλέπε Βιβλίο)

Αν $g, h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, $g > 0$ στο (a,b) τότε

$$\int_a^b h(u)g(u)\,du = h(c)\int_a^b g(u)\,du \text{ για κάποιο } c \in (a,b)$$

Παίρνουμε $a=0$, $b=1$, $g(u) = \frac{(1-u)^n}{n!}$ και $h(u) = f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0))$

Αφού $\int_0^1 g(u)\,du = \frac{1}{n!}\left[-\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$ συμπεραίνουμε

τη σχέση (3) με $\xi = x_0 + c(x-x_0)$, όπου $c \in (0,1)$

④ Επειδή η $f^{(n+1)}$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του x_0, δηλαδή ισχύει $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ για $|x-x_0| < \varepsilon$.

Συνεπάγεται ότι $|R_n(x)| = \left| \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+u(x-x_0))\,du \right| |x-x_0|^{n+1}$

$$\leq \frac{M}{n!} |x-x_0|^{n+1} \text{ για } |x-x_0| < \varepsilon.$$

και επομένως, $\boxed{\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \longrightarrow 0 \text{ καθώς } x \longrightarrow x_0.}$

Αυτό σημαίνει ότι το σφάλμα $R_n(x) \longrightarrow 0$ πιο γρήγορα από το $(x-x_0)^n$ καθώς $x \to x_0$.

Αυτή η ιδιότητα ισχύει αν υποθέσουμε ΜΟΝΟ ότι η f είναι n-φορές παραγωγίσιμη στο x_0.

(δηλαδή $f^{(n-1)}$ $\exists$ σε μια περιοχή του x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0).

Θ2 | Έστω $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Αν η f έχει n-τάξεως παραγώγους στο x_0, τότε:

$$(4)\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right]}{(x-x_0)^n} = 0$$

δηλαδή $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

---

(5) Αν $n=1$, η σχέση (4) εκφράζει τη διαφορισιμότητα της f στο x_0:

$$(4) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| = 0$$

$$\Longleftrightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + (x-x_0)\cdot\varepsilon(x) \quad \text{όπου } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

εξίσωση της εφαπτομένης

Δηλαδή, η f προσεγγίζεται από μια γραμμική συνάρτηση.

Τα Θεωρήματα Taylor δίνουν καλύτερη προσέγγιση μέσω πολυωνύμων βαθμού n, όταν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη.

Παράδειγμα $f(x)=\cos x$, $x_0=0$

$f(0)=1$

$f'(0)=-\sin 0=0$

$f''(0)=-\cos 0=-1$

$f'''(0)=\sin 0=0$

$f^{(4)}(0)=\cos 0=1$.

⋮

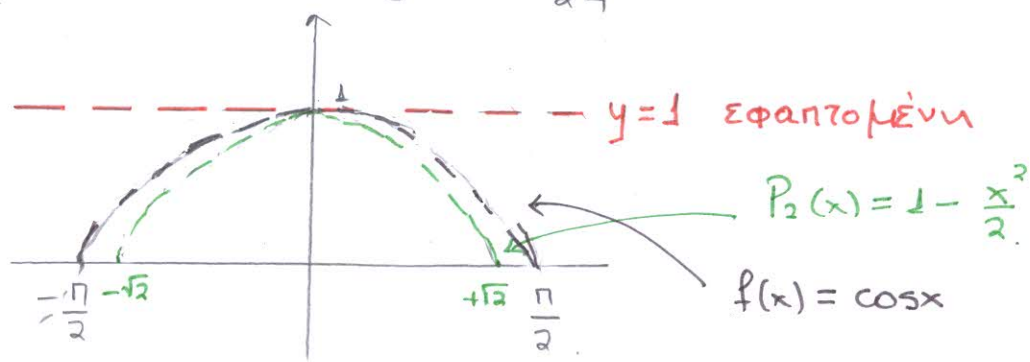
Άρα

$$f(x)=\cos x=1+0\cdot x+R_1(x)$$

$$=\underbrace{1+0\cdot x-\frac{1}{2}x^2}_{P_2(x)}+R_2(x)$$

$$=1+0\cdot x-\frac{1}{2}x^2+\frac{0}{6}\cdot x^3+R_3(x)$$

$$=1+0\cdot x-\frac{1}{2}x^2+\frac{0}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+R_4(x)$$



Άσκηση 4. Να υπολογιστεί το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης για $f(x)=\ln x$, $x_0=1$, με το υπόλοιπο R_2 στη μορφή (1), (2) και (3)

Απάντηση Υπολογίζουμε $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3}$

και $f(1)=0$, $f'(1)=1$, $f''(1)=-1$ $\qquad$ $(\ln\in C^{\infty}((0,1),\mathbb{R}))$

Έχουμε, λοιπόν, τους τύπους:

(1) $\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\left(\int_0^1\frac{(1-u)^2}{2}\cdot\frac{2}{(1+u(x-1)^3)}du\right)(x-1)^3$

(2) $\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\int_1^x\frac{(x-t)^2}{2}\cdot\frac{2}{t^3}dt$

(3) $\ln x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{\xi^3}(x-1)^3$ για κάποιο $\xi\in(1,x)$ αν $x>1$,

$\xi\in(x,1)$ αν $x<1$.

<u>Άσκηση 1</u>. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ (Βλέπε Θ1.) είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού n που έχει την ίδια τιμή στο x_0 με την f και ίδιες παραγώγους τάξης $k=1,\dots,n$ στο x_0 με την f.

<u>Απάντηση</u>. $P_n(x_0)=f(x_0)$ ισχύει. Έστω $0\le k\le n$ και $1\le \ell\le n$.

Υπολογίζουμε
$$\frac{d^\ell (x-x_0)^k}{dx^\ell}=\begin{cases} k(k-1)\cdots(k-\ell+1)(x-x_0)^{k-\ell}, & \text{αν } 1\le \ell\le k\\ 0, & \text{αν } k<\ell .\end{cases}$$

$$\frac{d^\ell (x-x_0)^k}{dx^\ell}(x_0)=\begin{cases} k!, & \text{αν } k=\ell\\ 0, & \text{αν } k\ne \ell\end{cases} \quad (*)$$

Έτσι, βλέπουμε ότι για $1\le \ell\le n$, ισχύει $\frac{d^\ell P_n}{dx^\ell}(x_0)=f^{(\ell)}(x_0)$.

<u>Μοναδικότητα:</u>

Αν Q είναι ένα άλλο πολυώνυμο βαθμού n με την ίδια ιδιότητα θα δείξουμε ότι $R=P_n-Q=0$

Το R είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n, τέτοιο ώστε
$$\frac{d^\ell R}{dx^\ell}(x_0)=0 \quad \forall \ell=0,1,\dots,n.$$

Γράφουμε έπειτα ότι $R_n=a_0+a_1(x-x_0)+\dots+a_n(x-x_0)^n$

$\left\{\text{αυτό ισχύει, γιατί } x^k=((x-x_0)+x_0)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(x-x_0)^i\cdot x_0^{k-i}\right\}$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (*) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{d^\ell R}{dx^\ell}(x_0)=0=\ell!\cdot a_\ell \implies R=0 \implies Q=P_n$$

Άσκηση 5

1) Δείξτε ότι $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

2) Δείξτε ότι $e \notin \mathbb{Q}$.

Απάντηση. 1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\ell, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($\ell \in \mathbb{N}$ φιξαρισμένο)

$x \longmapsto f(x) = e^x$.

Εφαρμόζουμε τον τύπο (1) με $x_0 = 0$

Αφού $f^{(k)}(x) = e^x$ και $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, έχουμε

$$R_n(x) = e^x - \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right] = \left(\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{ux} du\right) \cdot x^{n+1}$$

Θα φράξουμε το υπόλοιπο R_n και θα δείξουμε ότι στο διάστημα $[-\ell, \ell]$: $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ομοιόμορφα.

Πράγματι, $|R_n(x)| \leq e^{\ell} \frac{\ell^{n+1}}{n!} \longrightarrow 0$ όταν $n \to \infty$.

ομοιόμορφα για $x \in [-\ell, \ell]$.

$\Big\{$ Για να δούμε ότι $\frac{\ell^{n+1}}{n!} \longrightarrow 0$ γράφουμε όταν $n > 2\ell$:

$$\frac{\ell^n}{n!} = \left(\frac{\ell \cdot \dots \cdot \ell}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \ell \cdot (\ell+1) \dots 2\ell}\right) \cdot \frac{\ell}{2\ell+1} \cdot \dots \cdot \frac{\ell}{n} \leq \frac{\ell^{2\ell}}{(2\ell)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2\ell} \longrightarrow 0$$

όταν $n \to \infty$. $\Big\}$

Επομένως, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ για $x \in [-\ell, +\ell]$

και επειδή το ℓ είναι αυθαίρετο, η σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) Ειδικότερα, για $x = 1$, έχουμε

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \underbrace{\left[\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots\right]}_{= R_n(1) \text{ σφάλμα}} \quad \boxed{*}$$

Θα υποθέσουμε ότι $e \in \mathbb{Q}$, δηλαδή $\exists\, n \in \mathbb{N}$ τ.ω. $ne \in \mathbb{N}$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Γι' αυτό θα φράξουμε το σφάλμα $R_n(1)$

$$0 < R_n(1) < \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right] \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{(n+3)!} = \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{n+3}\right]$$

$$< \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$0 < R_n(1) < \frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right]$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!\,n} \Longrightarrow$$

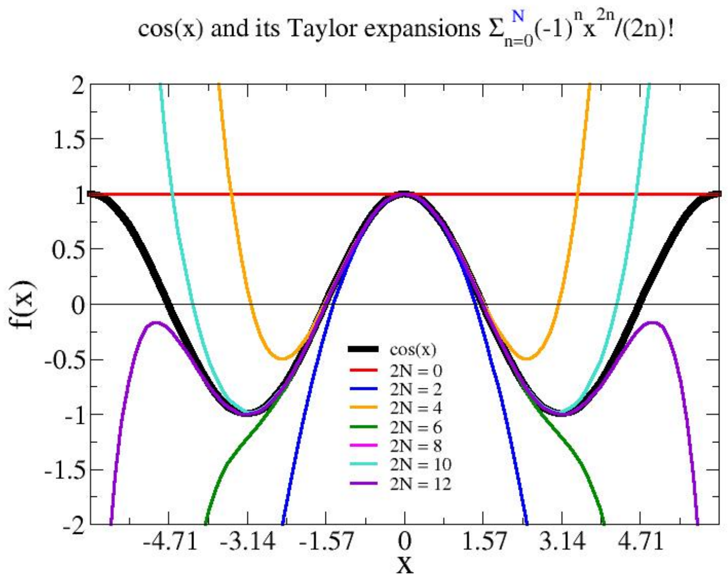
$$0 < R_n(1) < \frac{1}{n!\,n} \Longleftrightarrow 0 < n!\,n R_n(1) < 1$$

Αφού έχουμε υποθέσει ότι $ne \in \mathbb{N}$ ισχύει επίσης $n!\,ne \in \mathbb{N}$

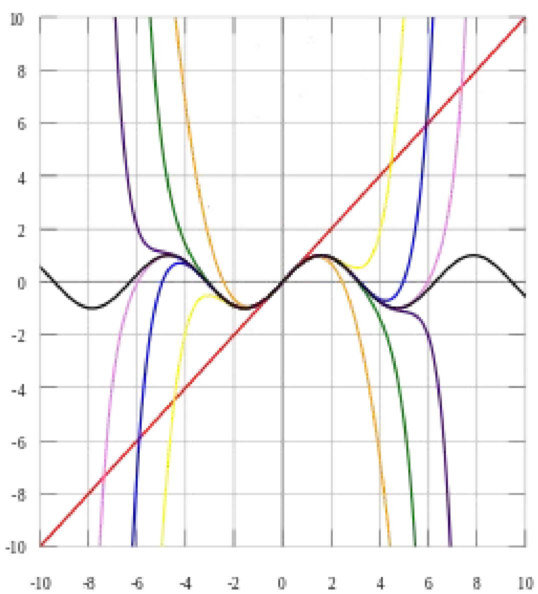
Από την σχέση $\boxed{*}$ έχουμε:

$$\underset{\mathbb{N}}{\underset{\wedge}{n!\,ne}} = \underbrace{n!\,n\left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right]}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{n!\,n R_n(1)}_{\in (0,1)}$$

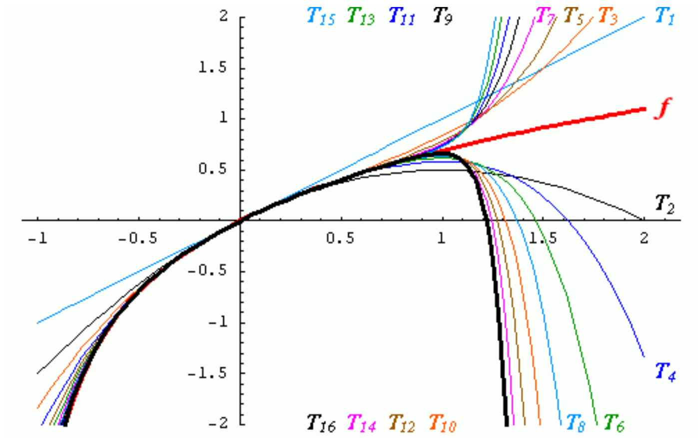
ΑΤΟΠΟ!



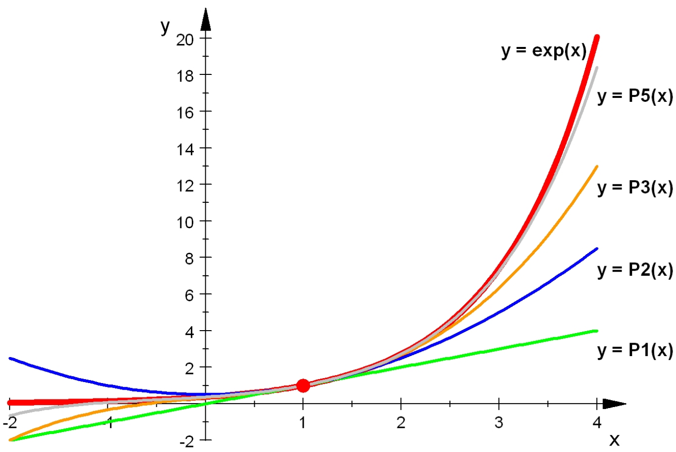
Ανάπτυγμα Taylor για την f(x)=cosx



Ανάπτυγμα Taylor για την f(x)=sinx



Ανάπτυγμα Taylor για την f(x)=ln(x+1)



Ανάπτυγμα Taylor για την $f(x)=e^{x}$