1.George Green (mathematician)

2. Τα θεωρήματα των Green, Stokes και Gauss

Αντώνης Τσολομύτης

Σάμος, 2012

$$\int \begin{array}{l} \text{curl} \\ \nabla \times F \\ \text{div} \\ \int_{\partial S} F \end{array}$$

1 Εισαγωγικά

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού όπως αυτό διδάσκεται στα Τμήματα Μαθηματικών. Οι αποδείξεις των τριών αυτών θεωρημάτων, στην πλήρη τους γενικότητα στον $\mathbb{R}^3$ (ή στον $\mathbb{R}^2$ για το θεώρημα του Green) δεν είναι απλές. Ειδικά η απόδειξη του θεωρήματος του Gauss είναι δύσκολη και για αυτό μπορεί να επιλέξει κανείς να την παραλείψει. Η απόδειξη του Stokes είναι βατή αν και εκτενής λόγω της αναγκαστικής εφαρμογής του κανόνα της αλυσίδας στην παραγώγιση για διανυσματικές συναρτήσεις.

Οι σημειώσεις αυτές δεν περιέχουν ασκήσεις, και γράφτηκαν κυρίως με στόχο μια διδακτικά αποδοτικότερη παρουσίαση των θεωρημάτων. Με αυτό το σκεπτικό οι αποδείξεις πήγαν όλες σε ξεχωριστή ενότητα στο τέλος των σημειώσεων.

2 Συμβολισμός

Συμβολίζουμε με $\iint$ το διπλό ολοκλήρωμα σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και με $\iiint$ το τριπλό ολοκλήρωμα σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.

Με το $\oint_C$ συμβολίζουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στην προσανατολισμένη καμπύλη C. Όταν η C είναι απλή κλειστή καμπύλη που περικλείει ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε ότι είναι θετικά προσανατολισμένη, δηλαδή περπατώντας πάνω στην καμπύλη το χωρίο που περικλείει είναι στα αριστερά μας. Αν η C είναι το σύνορο μιας προσανατολισμένης επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ τότε η C θεωρείται προσανατολισμένη θετικά· δηλαδή, αν περπατάμε στην C με το σώμα μας στη φορά του προσανατολισμού της επιφάνειας, η επιφάνεια είναι στα αριστερά μας.

Συμβολίζουμε με $\oiint_S$ το επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στην προσανατολισμένη επιφάνεια S. Αν η S είναι κλειστή επιφάνεια η θετική κατεύθυνση είναι η προς τα έξω κατεύθυνση σε σχέση με το τρισδιάστατο χωρίο που περικλείει.

Γράφουμε $\langle x, y\rangle$ για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και y. Τα i, j και k είναι τα βασικά ορθοκανονικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$. Δηλαδή $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$ και $k = (0,0,1)$.

Αν F διανυσματική συνάρτηση από το $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}^3$ και $F = (F_1, F_2, F_3)$, όπου οι F_j έχουν τιμές στο $\mathbb{R}$ γράφουμε

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

και
$$\langle \nabla, F \rangle = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}. \tag{2}$$

3 Θεωρήματα Stokes και Gauss

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μάς λέει ότι υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις το ολοκλήρωμα της παραγώγου f' της f στο διάστημα $[a, b]$ ισούται με ένα κατάλληλο άθροισμα των τιμών της f στο σύνορο $\{a, b\}$ του διαστήματος. Συγκεκριμένα
$$\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a). \tag{3}$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα της παραγώγου στο διάστημα $[a, b]$ υπολογίζεται από τις τιμές της συνάρτησης στο σύνορο (στα άκρα) του $[a, b]$. Το ίδιο ακριβώς είναι εννοιολογικά του περιεχόμενο των θεωρημάτων Stokes και Gauss. Στο θεώρημα Stokes το πεδίο ολοκλήρωσης είναι μια επιφάνεια, και ο υπολογισμός με βάση τις τιμές στο σύνορο της επιφάνειας (το αντίστοιχο του $f(b) - f(a)$) γίνεται με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο σύνορό της. Ομοίως, στο θεώρημα του Gauss, το πεδίο ολοκλήρωσης είναι ένα χωρίο στον τρισδιάστατο χώρο, και ο υπολογισμός με βάση τις τιμές στο σύνορο του χωρίου γίνεται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα στο σύνορο του χωρίου, δηλαδή στην επιφάνεια που περικλείει το χωρίο.

3.1 Το θεώρημα του Stokes

Έστω ότι η S προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από μια ένα προς ένα παραμετρικοποίηση $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ και ∂S το θετικά προσανατολισμένο σύνορό της. Αν $F : S \to \mathbb{R}^3$ μια C^1 συνάρτηση τότε:

> το επιφανειακό ολοκλήρωμα μιας «κατάλληλης παραγώγου» της F υπολογίζεται από τις τιμές της F στο σύνορο της επιφάνειας. Δηλαδή, σε πλήρη αναλογία με τον τύπο (3), ισχύει ένας τύπος της μορφής
> $$\oiint_S «F'» = \oint_{\partial S} F,$$
> όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της F στο ∂S.

Το μόνο που μένει να διευκρινιστεί είναι ποια είναι η «κατάλληλη παράγωγος» της F ώστε να ισχύει ο παραπάνω τύπος.

Θεώρημα 3.1 (Stokes) *Έστω ότι η S είναι μια κατά τμήματα C^2 φραγμένη προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$. Αν $F : S \to \mathbb{R}^3$ μια C^1 συνάρτηση και ∂S το θετικά προσανατολισμένο σύνορο της S, το οποίο υποθέτουμε ότι είναι απλή κλειστή κατά τμήματα C^1 καμπύλη, τότε ισχύει*

$$\oiint_S \nabla \times F = \oint_{\partial S} F. \tag{4}$$

Δηλαδή, η «κατάλληλη παράγωγος» είναι η συνάρτηση $\nabla \times F$.

Υπενθυμίζουμε εδώ τα απαραίτητα για τον υπολογισμό των ποσοτήτων του παραπάνω τύπου:

- Αν $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\Phi(u,v) = (\Phi_1(u,v), \Phi_2(u,v), \Phi_3(u,v))$ μια 1-1 παραμετρικοποίηση της επιφάνειας S, θέτουμε

$$T_u = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\right) \quad \text{και} \quad T_v = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\right)$$

  και το επιφανειακό ολοκλήρωμα στα αριστερά της (4) υπολογίζεται με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D \left\langle \nabla \times F(\Phi(u,v)), T_u \times T_v \right\rangle du dv.$$

- Αν $\sigma(t) \in \mathbb{R}^3$ για $t \in [a,b]$ μια παραμετρικοποίηση του ∂S, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στα δεξιά της (4) ισούται με

$$\int_a^b \left\langle F(\sigma(t)), \sigma'(t) \right\rangle dt.$$

Παρατήρηση 3.1 Θέλοντας να κάνουμε τον αναγνώστη να νοιώθει σίγουρος για την εννοιολογική ταύτιση της σχέσης (4) με τη σχέση (3), θα δείξουμε ότι πράγματι το θεώρημα του Stokes εφαρμοσμένο σε κατάλληλη επιφάνεια συνεπάγεται το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Ας υποθέσουμε λοιπόν τη σχέση (4), και έστω ότι η f είναι συνάρτηση C^1 στο $[a,b]$. Θεωρούμε την επίπεδη επιφάνεια $S = [a,b] \times [0,1] \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ και τη συνάρτηση $F(x,y) = (0, f(x), 0)$. Έχουμε

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & f(x) & 0 \end{vmatrix} = f'(x)k.$$

Για την παραμετρικοποίηση της S θέτουμε $D = S$ και για $(u,v) \in D$, $\Phi(u,v) = (u,v,0)$. Έτσι $T_u = (1,0,0)$, $T_v = (0,1,0)$ και εύκολα προκύπτει ότι $T_u \times T_v = k$. Οπότε, το αριστερό μέλος της (4) γίνεται

$$\begin{aligned} \oiint_S \nabla \times F &= \iint_D \Big\langle \nabla \times F(\Phi(u,v)), T_u \times T_v \Big\rangle \, du dv \\ &= \int_0^1 \int_a^b f'(u)\, du dv \\ &= \int_a^b f'(x)\, dx. \end{aligned}$$

Στρεφόμαστε τώρα στο δεξιό σκέλος. Το σύνορο του S αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(t,0,0) : t \in [a,b]\}, \\ C_2 &= \{(t,1,0) : t \in [a,b]\}, \\ B_1 &= \{(a,t,0) : t \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

και

$$B_2 = \{(b,t,0) : t \in [0,1]\}.$$

Οι παραμετρικοποιήσεις που δίνονται στα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα δίνουν τον θετικό προσανατολισμό στα C_1 και B_2 ενώ δίνουν τον αρνητικό προσανατολισμό στα C_2 και B_1. Συνεπώς

$$\oint_{\partial S} F = \oint_{C_1} F - \oint_{C_2} F - \oint_{B_1} F + \oint_{B_2} F. \tag{5}$$

Όμως

$$\oint_{C_1} F = \int_a^b \langle F(t,0,0), (1,0,0) \rangle \, dt = \int_a^b \Big\langle (0, f(t), 0), (1,0,0) \Big\rangle \, dt = 0.$$

$$\oint_{C_2} F = \int_a^b \langle F(t,1,0), (1,0,0) \rangle \, dt = \int_a^b \Big\langle (0, f(t), 0), (1,0,0) \Big\rangle \, dt = 0.$$

Και

$$\begin{aligned} \oint_{B_2} F &= \int_0^1 \langle F(b,t,0), (0,1,0) \rangle \, dt \\ &= \int_0^1 \Big\langle (0, f(b), 0), (0,1,0) \Big\rangle \, dt \\ &= \int_0^1 f(b)\, dt \\ &= f(b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{B_1} F &= \int_0^1 \langle F(a,t,0), (0,1,0) \rangle \, dt \\ &= \int_0^1 \Big\langle (0, f(a), 0), (0,1,0) \Big\rangle \, dt \\ &= \int_0^1 f(a)\, dt \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (5) παίρνουμε $\int_{\partial S} F = f(b) - f(a)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. Έτσι το θεώρημα του Stokes *πράγματι* αποτελεί επέκταση του γνωστού μας θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού μίας μεταβλητής σε περισσότερες μεταβλητές.

3.1.1 Το θεώρημα του Green

Μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος Stokes είναι η περίπτωση όπου η επιφάνεια S είναι επίπεδη, υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση F έχει πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^2$. Σε αυτή την περίπτωση το πεδίο ορισμού της παραμετρικοποίησης Φ της S, το D, ταυτίζεται με την S, και η Φ είναι η ταυτοτική: $\Phi(u,v) = (u,v)$ (όπου παραλείψαμε την τρίτη, μηδενική συντεταγμένη (μιλώντας αυστηρά ταυτίζουμε το $\mathbb{R}^2$ με το $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$, ή αλλιώς ταυτίζουμε τα (u,v) με τα $(u,v,0)$).

Όπως και στην Παρατήρηση 3.1 υπολογίζουμε ότι $T_u \times T_v = k$, οπότε σε αυτή την περίπτωση

$$\oint_S \nabla \times F = \iint_D \langle \nabla \times F(u,v), k \rangle \, du dv.$$

Τώρα, αν $F = (P,Q) = (P,Q,0)$ υπολογίζουμε την παράσταση $\langle \nabla \times F(u,v), k \rangle$ με την ορίζουσα (1) και βρίσκουμε (άσκηση) ότι

$$\langle \nabla \times F(u,v), k \rangle = \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}.$$

Έτσι, σε αυτή την ειδική περίπτωση, ο τύπος του θεωρήματος Stokes γράφεται ως

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} F,$$

όπου $F = (P,Q)$. Αυτός ο τύπος, ο τύπος που προκύπτει από το θεώρημα Stokes όταν $S \subseteq \mathbb{R}^2$ και $F : S \to \mathbb{R}^2$, ονομάζεται «θεώρημα του Green».

Η παρουσίαση του θεωρήματος Green ως συνέπεια του θεωρήματος Stokes έγινε για καθαρά διδακτικούς λόγους. Όμως, όσο αφορά στις αποδείξεις τους (δες ενότητα 4), πρώτα αποδεικνύουμε την ειδική και ευκολότερη περίπτωση του θεωρήματος Green και στη συνέχεια αποδεικνύουμε το θεώρημα Stokes.

3.1.2 Εφαρμογή: υπολογισμός εμβαδού χωρίου

Παρατηρούμε ότι αν στον τύπο του Green βάλουμε $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$ και $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$ θα ισχύει $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, οπότε

$$\frac{1}{2}\oint_{\partial D} (-y, x) = \iint_D 1 \, dx dy = \text{Εμβαδόν}(D).$$

Έτσι καταλήγουμε στον τύπο

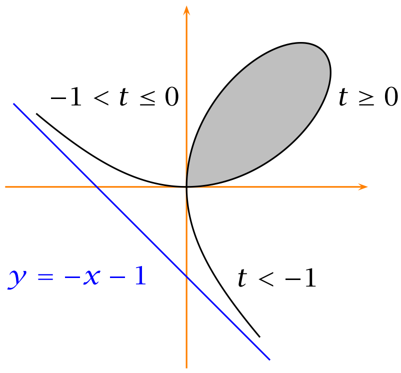
$$\text{Εμβαδόν}(D) = \frac{1}{2}\oint_{\partial D}(-y, x).$$

Οι επιλογές που κάναμε για τα P και Q δεν είναι μοναδικές. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να είχαμε επιλέξει $Q = x$ και $P = 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του φύλλου του Καρτέσιου. Πρόκειται για τον βρόγχο που παράγεται από την καμπύλη με παραμετρικοποίηση

$$\sigma(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right),$$

όπου $t \in [0, \infty)$ (σε καρτεσιανές συντεταγμένες και σε πεπλεγμένη μορφή, η εξίσωση είναι $x^3 + y^3 - 3xy = 0$). Το σχήμα της καμπύλης φαίνεται στο σχήμα 1. Σύμφωνα με τον τύπο του εμβαδού που



Σχήμα 1: Το φύλλο του Καρτέσιου (the folium of Descartes).

βρήκαμε παραπάνω, το εμβαδόν του φύλλου ισούται με

$$\begin{aligned}
\oint_{\sigma}(-y, x) &= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\langle\left(-\frac{3t^2}{1+t^3}, \frac{3t}{1+t^3}\right), \sigma'(t)\right\rangle dt \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\frac{3t}{1+t^3}\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{2}\frac{-3}{1+t^3}\Bigg|_0^{\infty} \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

3.2 Το θεώρημα του Gauss

Θεωρούμε Ω ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ το οποίο έχει κατά τμήματα C^2 σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε επίσης ότι το $\partial\Omega$ είναι προσανατολισμένο με τη θετική φορά, δηλαδή με το «προς τα έξω» από το Ω διάνυσμα. Αν F διανυσματική C^1 συνάρτηση στο Ω τότε:

> το χωρικό (τριπλό) ολοκλήρωμα μιας «κατάλληλης παραγώγου» της F υπολογίζεται από τις τιμές της F στο σύνορο $\partial\Omega$ του χωρίου Ω. Δηλαδή, σε πλήρη αναλογία με τον τύπο (3), ισχύει ένας τύπος της μορφής
>
> $$\iiint_\Omega «F'» = \oiint_{\partial\Omega} F,$$
>
> όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα της F στο $\partial\Omega$.

Το μόνο που μένει να διευκρινιστεί και πάλι, είναι ποια είναι η «κατάλληλη παράγωγος» της F ώστε να ισχύει ο παραπάνω τύπος.

Θεώρημα 3.2 (απόκλισης του Gauss) *Έστω ότι το Ω είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ κλειστό και φραγμένο με κατά τμήματα C^2 σύνορο $\partial\Omega$. Τότε, αν η F με πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^3$ είναι C^1 συνάρτηση στο Ω ισχύει*

$$\iiint_\Omega \langle \nabla, F\rangle = \oiint_{\partial\Omega} F.$$

Η «κατάλληλη παράγωγος» δηλαδή εδώ είναι η ποσότητα $\langle \nabla, F\rangle$. Υπενθυμίζουμε ότι για να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα χρειαζόμαστε μια 1-1 και κατά τμήματα C^2 παραμετρικοποίηση $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \partial\Omega$, της επιφάνειας $\partial\Omega$, οπότε

$$\oiint_{\partial\Omega} F = \iint_D \langle \nabla \times F(\Phi(u,v)), T_u \times T_v\rangle \, du dv,$$

όπου

$$T_u = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial\Phi_3}{\partial u}\right) \quad \text{και} \quad T_v = \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial\Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial\Phi_3}{\partial v}\right).$$

4 Αποδείξεις

4.1 Απόδειξη του θεωρήματος Green

Όπως είπαμε και στο τέλος της υποενότητας 3.1.1 η παρουσίαση του θεωρήματος Green ως συνέπεια του θεωρήματος Stokes έγινε για καθαρά διδακτικούς λόγους. Ξεκινάμε με την απόδειξη του θεωρήματος Green.

Λήμμα 5 *Έστω ότι το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι χωρίο τύπου I, C το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του και $P : D \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Τότε*

$$\oint_C (P,0) = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$$

Απόδειξη: Αφού το χωρίο είναι τύπου I υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις φ_1, $\varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}.$$

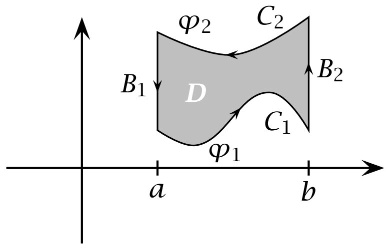
Οπότε το διπλό ολοκλήρωμα, από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, ισούται με

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P(q,u)}{\partial y}\, dydx &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dy \right) dx \\ &= \int_a^b \Big(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)) \Big)\, dx. \end{aligned}$$

Τα $(x,\varphi_1(x))$ για $x \in [a,b]$, παραμετρικοποιούν την C_1 με τη δηλωμένη φορά (δες σχήμα 2), οπότε

$$\int_a^b P(x,\varphi_1(x))\, dx = \oint_{C_1} (P,0).$$

Ομοίως τα $(x,\varphi_1(x))$ για $x \in [a,b]$, παραμετρικοποιούν την C_2 με



Σχήμα 2: Χωρίο τύπου I.

την αντίθετη φορά, οπότε

$$\int_a^b P(x,\varphi_2(x))\, dx = -\oint_{C_2} (P,0).$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dydx = -\oint_{C_1 \cup C_2} (P,0). \tag{6}$$

Επειδή το x είναι σταθερό στα ευθύγραμμα τμήματα B_1 και B_2 συνεπάγεται ότι $\oint_{B_1}(P,0) = \oint_{B_1}(P,0) = 0$: για παράδειγμα, $B_1 = \{(a,y) : \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)\}$, δηλαδή παραμετρικοποιείται από την $\sigma_1(t) = (a,t)$ για $t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]$, και έτσι $\sigma_1'(t) = (0,1)$, συνεπώς

$$\oint_{B_1}(P,0) = \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} \langle (P,0)(a,y),(0,1)\rangle \, dy = 0.$$

Προσθέτοντας τα μηδενικά ολοκληρώματα στις B_1 και B_2 στην (6) παίρνουμε

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy = -\oint_C (P,0).$$

□

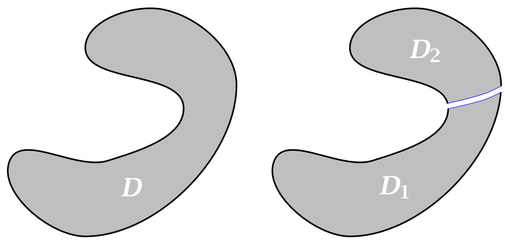
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται και το ακόλουθο:

Λήμμα 6 *Έστω ότι το $D \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι χωρίο τύπου ΙΙ, C το θετικά προσανατολισμένο σύνορό του και $Q : D \to \mathbb{R}$ μια C^1 συνάρτηση. Τότε*

$$\oint_C (0,Q) = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx dy.$$

□

Τα δύο παραπάνω λήμματα έχουν πολύ ισχυρούς περιορισμούς για το χωρίο D. Συγκεκριμένα απαιτούν το χωρίο να είναι τύπου Ι και τύπου ΙΙ αντίστοιχα. Μπορούμε να αποδείξουμε τα ίδια αποτελέσματα σε γενικότερα χωρία Αντί να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό για τα επιτρεπτά χωρία προτιμάμε να βασιστούμε σε εικόνες. Ένα



Σχήμα 3: Χωρίο όχι τύπου Ι στο οποίο ισχύει το θεώρημα Green.

χωρίο όπως το πρώτο χωρίο στο σχήμα 3 δεν είναι τύπου Ι. Όμως μπορούμε να το κόψουμε σε δύο τμήματα, το D_1 και το D_2 τα οποία είναι τύπου Ι. Έτσι σύμφωνα με το Λήμμα 5 ισχύουν οι σχέσεις

$$\oint_{\partial D_1}(P,0) = -\iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy$$

και

$$\oint_{\partial D_2}(P,0) = -\iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx dy.$$

Το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στα δεξιά κάνει

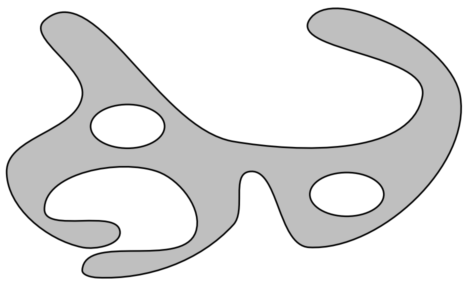
$$-\iint_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy - \iint_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = -\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$$

Για το άθροισμα στα αριστερά, παρατηρούμε ότι το κομμάτι του συνόρου στο οποίο κόψαμε το D, τα σύνορα που στο σχήμα εμφανίζονται με μπλε χρώμα έχουν μεταξύ τους αντίθετο προσανατολισμό όταν τα D_1 και D_2 έχουν και τα δύο τον θετικό προσανατολισμό. Οπότε, όταν προσθέσουμε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα στο ∂D_1 και στο ∂D_2, θα έχουμε απαλοιφή των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων πάνω στις μπλε καμπύλες. Έτσι το αποτέλεσμα θα είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στο ∂D. Αποδείξαμε με αυτόν τον τρόπο ότι και σε τέτοια χωρία, που δεν είναι τύπου I ισχύει

$$\oint_{\partial D} (P, 0) = -\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy.$$

Ανάλογη είναι η κατάσταση σε σχέση με το Λήμμα 6. Αν το χωρίο κόβεται σε κομμάτια τύπου II τότε το Λήμμα 6 συνεχίζει να ισχύει.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι το χωρίο μπορεί να είναι ιδιαίτερα περίπλοκο και να απαιτείται να κοπεί σε πολλά τμήματα, όπως για παράδειγμα το χωρίο του σχήματος 4. Για την παρακάτω



Σχήμα 4: Χωρίο που απαιτεί πολλά κοψίματα ώστε κάθε τμήμα του να είναι τύπου I ή τύπου II.

απόδειξη του θεωρήματος Green θα υποθέσουμε ότι στο χωρίο D ισχύουν και το Λήμμα 5 και το Λήμμα 6.

Απόδειξη του θεωρήματος Green: Έστω ότι το D είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ στο οποίο ισχύουν και τα δύο παραπάνω λήμματα. Αν

$F = (P, Q)$ τότε

$$\begin{aligned}
\iint_D \langle \nabla \times F, k \rangle &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \oint_{\partial D} (0, Q) + \oint_{\partial D} (P, 0) \\
&= \oint_{\partial D} (P, Q) \\
&= \oint_{\partial D} F,
\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

6.1 Απόδειξη του θεωρήματος Stokes

Θα αποδείξουμε το θεώρημα Stokes στην περίπτωση που η επιφάνεια παραμετρικοποιείται από μια C^2 παραμετρικοποίηση. Στην αντίθετη περίπτωση το θεώρημα αποδεικνύεται κόβοντας την επιφάνεια σε τμήματα όπου το καθένα περιγράφεται από μία παραμετρικοποίηση και στο τέλος αθροίζουμε τους τύπους από κάθε τμήμα της, όπως κάναμε και στο θεώρημα του Green για χωρία που έπρεπε να κοπούν για να περιγραφούν ως τύπου I ή II.

Ας θέσουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό. Η F αφού έχει πεδίο τιμών στο $\mathbb{R}^3$ έχει τρεις συνιστώσες συναρτήσεις, δηλαδή γράφεται $F = (F_1, F_2, F_3)$, όπου οι F_1, F_2 και F_3 είναι C^1 συναρτήσεις από την επιφάνεια S στο $\mathbb{R}$. Έστω ότι η επιφάνεια S περιγράφεται από την παραμετρικοποίηση $\Phi(u, v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ με

$$\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$$

όπου οι Φ_1, Φ_2, Φ_3 είναι C^2 συναρτήσεις από το D στο $\mathbb{R}$, και για το D *υποθέτουμε επίσης ότι ισχύει το θεώρημα του Green*. Θέτουμε επίσης $\sigma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ παραμετρικοποίηση του ∂D, $\varphi(t) = \Phi(\sigma(t))$ παραμετρικοποίηση του ∂S, και υποθέτουμε ότι όλες οι προηγούμενες παραμετρικοποιήσεις διατηρούν τον θετικό προσανατολισμό.

Τέλος, σημειώνουμε ότι θα χρειαστούμε τον κανόνα της αλυσίδας στην παραγώγιση για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Η απόδειξη θα γίνει αποδεικνύοντας πρώτα το θεώρημα στην ειδική περίπτωση όπου $F_2 = F_3 = 0$, οπότε $F = (F_1, 0, 0)$. Στη συνέχεια αλλάζοντας κυκλικά τους δείκτες (ή επαναλαμβάνοντας τις ίδιες πράξεις) θα προκύψουν τύποι για τις περιπτώσεις όπου $F = (0, F_2, 0)$ και $F = (0, 0, F_3)$. Στο τέλος θα προσθέσουμε αυτούς τους τρεις τύπους.

Ξεκινάμε την απόδειξη του θεωρήματος του Stokes από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\oiint_S \nabla \times F = \iint_D \langle (\nabla \times F)(\Phi(u, v)), T_u \times T_v \rangle,$$

όπου
$$T_u = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\right) \quad \text{και} \quad T_u = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}, \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\right).$$
Υπολογίζουμε το $\nabla \times F$ με τη σχετική ορίζουσα (δες την ορίζουσα παρακάτω) και το βρίσκουμε ίσο με $\frac{\partial F_1}{\partial z} j - \frac{\partial F_1}{\partial y} k$. Έτσι

$$\oiint_S \nabla \times F = \oiint_S \left(0, \frac{\partial F_1}{\partial z}, -\frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \tag{7}$$
$$= \iint_D \left\langle \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} (\Phi(u,v)), \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right\rangle du dv$$
$$= \iint_D \Bigg(-\frac{\partial F_1}{\partial z}(\Phi(u,v)) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_3}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\right)$$
$$-\frac{\partial F_1}{\partial y}(\Phi(u,v)) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\right)\Bigg) du dv. \tag{8}$$

Κρατάμε αυτή την έκφραση και στρεφόμαστε τώρα στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Σκοπός μας είναι με τη βοήθεια της σύνθεσης με την Φ να περάσουμε από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο ∂S στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο ∂D ώστε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Green. Έχουμε

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} F &= \int_a^b \left\langle F(\varphi(t)), \varphi'(t) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle F\big(\Phi(\sigma(t))\big), \frac{d}{dt}\big(\Phi(\sigma(t))\big) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle F\big(\Phi(\sigma(t))\big), \left(\frac{d}{dt}\Phi_1(\sigma(t)), \frac{d}{dt}\Phi_2(\sigma(t)), \frac{d}{dt}\Phi_3(\sigma(t))\right) \right\rangle dt, \end{aligned}$$

το οποίο, επειδή $F = (F_1, 0, 0)$ ισούται με
$$\int_a^b F_1\big(\Phi(\sigma(t))\big) \frac{d}{dt}\Phi_1(\sigma(t))\, dt.$$
Από τον κανόνα αλυσίδας ισχύει
$$\frac{d}{dt}\Phi_1(\sigma(t)) = \left\langle \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(\sigma(t)), \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(\sigma(t))\right), \sigma'(t) \right\rangle.$$

Έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} F &= \int_a^b \left[F_1\Big(\Phi(\sigma(t))\Big) \cdot \left\langle \Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(\sigma(t)), \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(\sigma(t)) \Big), \sigma'(t) \right\rangle \right] dt \\
&= \int_a^b \left\langle \Big((F_1 \circ \Phi) \Big(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Big) \Big) (\sigma(t)), \sigma'(t) \right\rangle dt \\
&= \oint_{\partial D} \Big((F_1 \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, (F_1 \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Big) = \oint_{\partial D} \Psi,
\end{aligned}$$

όπου θέσαμε

$$\Psi = \Big((F_1 \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}, (F_1 \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Big) =: (\Psi_1, \Psi_2).$$

Συνεπώς σε αυτό το σημείο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Green, οπότε

$$\oint_{\partial D} \Psi = \iint_D \langle \nabla \times \Psi, k \rangle \, du dv,$$

δηλαδή

$$\oint_{\partial S} F = \iint_D \langle \nabla \times (\Psi_1, \Psi_2), k \rangle \, du dv.$$

Υπολογίζοντας το τελευταίο εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \times (\Psi_1, \Psi_2), k \rangle &= \left\langle \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ \Psi_1 & \Psi_2 & 0 \end{vmatrix}, k \right\rangle \\
&= \frac{\partial \Psi_2}{\partial u} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial v} \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \Big((F_1 \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Big) - \frac{\partial}{\partial v} \Big((F_1 \circ \Phi) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \Big) \\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial u} F_1(\Phi(u,v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + F_1(\Phi(u,v)) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u \partial v} \Big) \\
&\quad - \Big(\frac{\partial}{\partial v} F_1(\Phi(u,v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + F_1(\Phi(u,v)) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u \partial v} \Big).
\end{aligned}$$

Οι όροι με τις παραγώγους δεύτερης τάξης διαγράφονται, οπότε καταλήγουμε στην

$$\langle \nabla \times (\Psi_1, \Psi_2), k \rangle = \Big(\frac{\partial}{\partial u} F_1(\Phi(u,v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \Big) - \Big(\frac{\partial}{\partial v} F_1(\Phi(u,v)) \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \Big).$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας βρίσκουμε ότι η τελευταία παράσταση είναι ίση με

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\Phi(u,v))\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}+\frac{\partial F_1}{\partial y}(\Phi(u,v))\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}+\frac{\partial F_1}{\partial z}(\Phi(u,v))\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}$$
$$-\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(\Phi(u,v))\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}+\frac{\partial F_1}{\partial y}(\Phi(u,v))\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}+\frac{\partial F_1}{\partial z}(\Phi(u,v))\frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\right)\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}.$$

Ελέγχουμε εύκολα (άσκηση) ότι αυτοί οι όροι είναι οι ίδιοι που εμφανίζονται στην (8), και άρα με τη βοήθεια της (7) έχουμε δείξει ότι

$$\oint_{\partial S}(F_1,0,0)=\oiint_{\partial S}\left(0,\frac{\partial F_1}{\partial z},-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Με όμοιες πράξεις ή εναλλάσσοντας τους δείκτες και τις θέσεις των ποσοτήτων μέσα στα διανύσματα κυκλικά ($x\to y\to z\to x$), βλέπουμε ότι

$$\oint_{\partial S}(0,F_2,0)=\oiint_{\partial S}\left(-\frac{\partial F_2}{\partial z},0,\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)$$

και

$$\oint_{\partial S}(0,0,F_3)=\oiint_{\partial S}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y},-\frac{\partial F_3}{\partial x},0\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις τελευταίες σχέσεις οδηγούμαστε στην

$$\oint_{\partial S}(F_1,F_2,F_3)=\oiint_{\partial S}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Εύκολα ελέγχεται με την γνωστή μας ορίζουσα, ότι το διάνυσμα μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι το $\nabla\times F$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

6.2 Απόδειξη του θεωρήματος Gauss

Ας υποθέσουμε για να απλοποιήσουμε λίγο την απόδειξη ότι το σύνορο του Ω είναι C^2. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο ισχυρισμούς που δεν θα αποδείξουμε σε αυτό το μάθημα. Όμως, πρώτον θα είναι πειστικοί, και δεύτερον ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να καταφύγει σε ένα βιβλίο διαφορικής γεωμετρίας για τις πλήρεις λεπτομέρειες.

Θα είναι ευκολότερο για την απόδειξη αντί να χρησιμοποιήσουμε τα x, y και z για τις συντεταγμένες ενός διανύσματος τον $\mathbb{R}^3$ να γράφουμε x_1, x_2, x_3. Έτσι αν $F=(F_1,F_2,F_3)$ το ζητούμενο είναι να αποδείξουμε ότι

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3=\oiint_{\partial\Omega}(F_1,F_2,F_3).$$

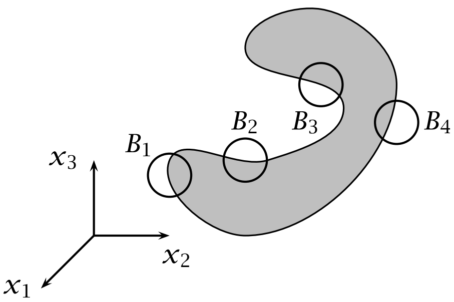
Οι δύο ισχυρισμοί στους οποίους αναφερθήκαμε παραπάνω είναι οι εξής:

Ισχυρισμός 1 Το Ω είναι δυνατόν να γραφτεί ως ένωση ευκλείδειων δίσκων αρκετά μικρής ακτίνας, ώστε αν B ένας τέτοιος δίσκος ο οποίος τέμνει το σύνορο του Ω, τότε το $B \cap \Omega$ να γράφεται (όπως φαίνεται στο σχήμα 5) με τη βοήθεια του γραφήματος μιας συνάρτησης $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, είτε ως

(I) $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_2 > \varphi(x_1, x_3)\}$ ή $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_2 < \varphi(x_1, x_3)\}$, είτε ως

(II) $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 > \varphi(x_1, x_2)\}$ ή $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 < \varphi(x_1, x_2)\}$ είτε ως

(III) $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_1 > \varphi(x_2, x_3)\}$ ή $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_1 < \varphi(x_2, x_3)\}$.



$$
\begin{aligned}
B_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in B_1 : x_2 > \varphi_1(x_1, x_3)\} \\
B_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in B_2 : x_3 < \varphi_2(x_1, x_2)\} \\
B_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in B_3 : x_3 > \varphi_3(x_1, x_2)\} \\
B_4 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in B_4 : x_2 < \varphi_4(x_1, x_3)\}
\end{aligned}
$$

για διαφορετικές συναρτήσεις φ_1, φ_2, φ_3 και φ_4 από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$.

Σχήμα 5: Διάφορες περιπτώσεις τομών ευκλείδειων δίσκων με το σύνορο του Ω.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 5, το αν η περιγραφή θα είναι όπως στην περίπτωση (I) ή στην περίπτωση (II) ή στην (III) έχει να κάνει με το που βρίσκεται ο δίσκος B σε σχέση με το σύνορο του Ω.

Το ότι το παραπάνω είναι εφικτό σχετίζεται με το ότι το Ω είναι κλειστό και φραγμένο καθώς και με το ότι το σύνορό του είναι C^2. Δεν θα μπούμε όμως σε λεπτομέρειες απόδειξης.

Ισχυρισμός 2 Το παρακάτω είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο το οποίο ονομάζεται *διαμέριση της μονάδας*.

Έστω B_1, $B_2, \ldots, B_N$ οι ευκλείδειοι δίσκοι που περιγράφει ο Ισχυρισμός 1. Υπάρχουν συναρτήσεις ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_N$ οι οποίες είναι C^1 και ικανοποιούν τις εξής συνθήκες

- $\sum_{j=1}^{N} \psi_j = 1$ πάνω στο Ω.
- $\psi_j \Big|_{\mathbb{R}^3 \setminus B_j} = 0$, για κάθε $j = 1, 2, \ldots, N$.

Αυτός ο ισχυρισμός δεν είναι τόσο δύσκολος όσο ίσως ακούγεται. Απλά βρίσκει κανείς συναρτήσεις που να ικανοποιούν τη δεύτερη συνθήκη και πάνω στο Ω να έχουν θετικό άθροισμα (κάντε ένα σχήμα). Τέλος διαιρούμε κάθε συνάρτηση με το άθροισμά τους ώστε να ικανοποιείται και η πρώτη συνθήκη!

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ξεκινήσουμε την απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\, dx_1 dx_2 dx_3 &= \oiint_{\partial\Omega} (F_1, 0, 0) \\
\iiint_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\, dx_1 dx_2 dx_3 &= \oiint_{\partial\Omega} (0, F_2, 0) \\
\iiint_\Omega \frac{\partial F_3}{\partial x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3 &= \oiint_{\partial\Omega} (0, 0, F_3),
\end{aligned}$$

διότι μετά, απλώς θα προσθέσουμε κατά μέλη. Η απόδειξη αυτών είναι ίδια οπότε αρκεί, για παράδειγμα, να αποδείξουμε την τελευταία. Απλοποιώντας περαιτέρω, θα γράφουμε f αντί για F_3 οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \oiint_{\partial\Omega} (0, 0, f).$$

Θα κάνουμε ακόμα μια απλοποίηση:

Έστω B_j, $j = 1, 2, \ldots, N$ ένας από τους δίσκους του Ισχυρισμού 1, και ψ_j οι αντίστοιχες συναρτήσεις από τον Ισχυρισμό 2. Αν αποδείξουμε ότι

$$\iiint_\Omega \frac{\partial(\psi_j f)}{\partial x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \oiint_{\partial\Omega} (0, 0, \psi_j f),$$

για κάθε j μετά θα προσθέσουμε κατά μέλη για όλα τα j, και επειδή το άθροισμα των ψ_j πάνω στο Ω ισούται με 1 θα πάρουμε το ζητούμενο. Τώρα, η ψ_j είναι μηδέν έξω από το B_j σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 2, οπότε η παραπάνω ολοκλήρωση είναι στην πραγματικότητα ολοκλήρωση πάνω στο $B_j \cap \Omega$ και το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι πάνω στο $B_j \cap \partial\Omega$. Δηλαδή ζητάμε να ισχύει

$$\iiint_{B_j \cap \Omega} \frac{\partial(\psi_j f)}{\partial x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \oiint_{B_j \cap \partial\Omega} (0, 0, \psi_j f).$$

Για να μην γράφουμε λοιπόν συνεχώς $\psi_j f$ κάνουμε την εξής απλοποίηση: επειδή η ψ_j μηδενίζεται έξω από το B_j και άρα και η $\psi_j f$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial x_3}\, dx_1 dx_2 dx_3 = \oiint_{B \cap \partial\Omega} (0, 0, f), \tag{9}$$

όπου B ευκλείδειος δίσκος από τον Ισχυρισμό 1 και f μια C^1 συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το B. Παρατηρούμε ότι επειδή η f

είναι συνεχής (ως C^1) είναι αναγκαστικά μηδέν και στο σύνορο του B.

Περίπτωση 1 Το B δεν τέμνει το σύνορο του Ω, δηλαδή είναι μέσα στο εσωτερικό Ω. Αυτή η περίπτωση αντιμετωπίζεται εύκολα, διότι στα αριστερά της (9) ολοκληρώνουμε πρώτα ως x_3, και χρησιμοποιούμε ότι η f είναι μηδέν εκτός του B:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial f}{\partial x_3}\, dx_3 dx_2 dx_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2, x_3) \Big|_{x_3=-\infty}^{x_3=+\infty} dx_2 dx_1 = 0.$$

Αλλά μηδέν είναι και το δεξιό μέρος της (9), αφού $B \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Περίπτωση 2 Το B τέμνει το σύνορο του Ω. Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις I ή II ή III της σελίδας 17. Αν ισχύουν οι περιπτώσεις με τις ανισότητες $<$ η αντιμετώπιση είναι ίδια με τις περιπτώσεις όπου ισχύει η $>$. Επειδή η f βρίσκεται στην τρίτη συντεταγμένη στο $(0, 0, f)$ οι περιπτώσεις I και III αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο. Οπότε θα ασχοληθούμε μόνο με τις περιπτώσεις

$$B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_2 > \varphi(x_1, x_3)\}$$

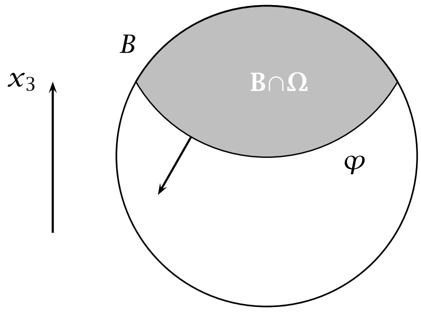
και

$$B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 > \varphi(x_1, x_2)\},$$

Υποπερίπτωση $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 > \varphi(x_1, x_2)\}$.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_3}\, dx_3 dx_2 dx_1 &= \iint_D \left(\int_{\varphi(x_1,x_2)}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) dx_3 dx_2 dx_1 \\ &= \iint_D \Big(-f(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)) \Big)\, dx_2 dx_1. \end{aligned}$$

Δείχνουμε τώρα ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με το



Σχήμα 6: Η περίπτωση $B \cap \Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in B : x_3 > \varphi(x_1, x_2)\}$.

$$\oiint_{B\cap\partial\Omega}(0,0,f).$$

Η παραμετρικοποίηση του $B\cap\partial\Omega$ είναι η $\Phi(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))$ Υπολογίζουμε με την γνωστή ορίζουσα το $T_{x_1}\times T_{x_2}$ και βρίσκουμε:

$$T_{x_1}\times T_{x_2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}j+k.$$

Φανερά $\langle T_{x_1}\times T_{x_2},k\rangle>0$ οπότε (δες σχήμα 6) η Φ αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Συνεπώς

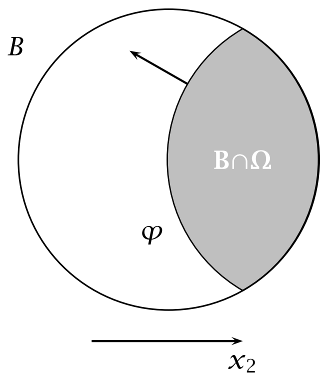
$$\begin{aligned}\oiint_{B\cap\partial\Omega}(0,0,f) &= -\int_D\langle(0,0,f)(\Phi(x_1,x_2),T_{x_1}\times T_{x_2}\rangle\, dx_2dx_1\\ &= \iint_D\Big(-f(x_1,x_2,\varphi(x_1,x_2))\Big)\,dx_2dx_1.\end{aligned}$$

Υποπερίπτωση $B\cap\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)\in B: x_2>\varphi(x_1,x_3)\}$.

Η παραμετρικοποίηση της επιφάνειας του $\partial\Omega$ μέσα στο B είναι τώρα η $\Phi(x_1,x_3)=(x_1,\varphi(x_1,x_3),x_3)$ και υπολογίζοντας με την ορίζουσα βρίσκουμε ότι

$$T_{x_1}\times T_{x_3}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}i-j+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}.$$

Προφανώς $\langle T_{x_1}\times T_{x_3},j\rangle=-1<0$, άρα (δες σχήμα 7) η παραμετρικοποίηση διατηρεί τον προσανατολισμό. Θέλοντας να υπολογίσουμε



Σχήμα 7: Η περίπτωση $B\cap\Omega=\{(x_1,x_2,x_3)\in B: x_2>\varphi(x_1,x_3)\}$.

το $\iiint_{B\cap\Omega}\partial f/\partial x_3\,dx_3dx_2dx_1$ θα ήταν εύκολη δουλειά αν μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x_3, αφού θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, όπως στην προηγούμενη υποπερίπτωση. Όμως τώρα δεν ξέρουμε πού κινείται το x_3 αλλά το x_2 (συγκεκριμένα $x_2 > \varphi(x_1, x_3)$). Παρόλα αυτά θα επιμείνουμε: η πρώτη ολοκλήρωση πρέπει να γίνει ως προς μεταβλητή που γνωρίζουμε τα άκρα μεταβολής. Οπότε θα επιχειρήσουμε να αλλάξουμε το ∂x_3 σε ∂x_2 στην προς ολοκλήρωση ποσότητα. Για να το πετύχουμε αυτό αλλάζουμε μεταβλητή. Θέτουμε $x_2 = \varphi(x_1, x_3) + t$. Όταν $x_2 = \varphi(x_1, x_3)$ το $t = 0$. Και βεβαίως $dx_2 = dt$. Έτσι

$$\begin{aligned}
\iiint_{B\cap\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_3}\, dx_3 dx_2 dx_1 &= \iint_D \left(\int_{\varphi(x_1,x_3)}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_2\right) dx_1 dx_2 \\
&= \iint_D \left(\int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_2) + t, x_3)\, dt\right) dx_2 dx_3 \\
&= \iiint_{\mathbb{R}^2\times(0,\infty)} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3)\, dt dx_1 dx_3.
\end{aligned} \tag{10}$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(f(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3)\Big) &= \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3)\right\rangle \\
= \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) &+ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_3).
\end{aligned}$$

Άρα η προς ολοκλήρωση ποσότητα στην (10) γράφεται:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_3}\Big(f(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3)\Big) \\
&\quad - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3)\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_3).
\end{aligned}$$

Έτσι από την (10) προκύπτουν δύο ολοκληρώματα. Το πλεονέκτημα από αυτή τη διαδικασία είναι ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα περιέχει την $\partial f/\partial x_2$, και για το x_2 ξέρουμε άκρα ολοκλήρωσης! Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι το

$$\iint_D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_3}\Big(f(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3)\Big)\, dx_3 dx_2 dx_1 = 0,$$

αφού η f είναι μηδέν έξω από το B.

Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι το

$$\iiint_{\mathbb{R}^2\times(0,\infty)} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_3)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \varphi(x_1, x_3) + t, x_3)\right) dx_1 dx_3 dt.$$

Επανερχόμαστε τώρα στη μεταβλητή x_2 αλλάζοντας ξανά μεταβλητή, θέτοντας $t = x_2 - \varphi(x_1, x_3)$. Οπότε παίρνουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x_1, x_3)\right)\left(\int_{\varphi(x_1,x_3)}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_2}\, dx_2\right) dx_1 dx_3 \\
&\qquad = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} f(x_1, \varphi(x_1, x_3), x_3).
\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα όμως είναι ίσο με το $\oiint_{B\cap\partial\Omega}(0,0,f)$, διότι

$$\begin{aligned}
\oiint_{B\cap\partial\Omega}(0,0,f) &= \iint_{\mathbb{R}^2} \langle (0,0,f)(x_1,\varphi(x_1,x_3),x_3), T_{x_1}\times T_{x_3}\rangle \, dx_1 dx_3 \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \left\langle \big(0,0,f(x_1,\varphi(x_1,x_3),x_3)\big), \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, -1, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right\rangle \, dx_1 dx_3 \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\; f(x_1,\varphi(x_1,x_3),x_3).
\end{aligned}$$

□

Αντωνης Τσολομυτης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών, 832 00, Καρλόβασι, Σάμος. Email: antonis.tsolomitis@gmail.com