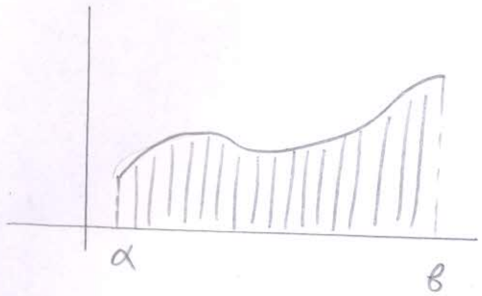
Επικαμπύλια Ολοκληρώματα



$$\int_\alpha^\beta f = E(f, [\alpha,\beta]) \ , \ f \geq 0$$

$$\ell([\alpha,\beta]) = (\beta-\alpha)$$

Γ: παρ $\vec{r}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $\vec{r}: [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^d$

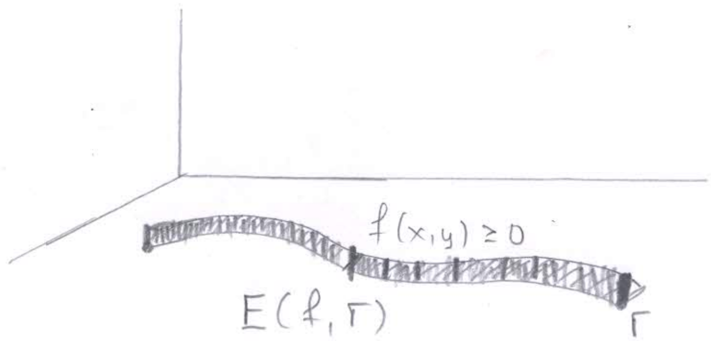
Τι θα θέλαμε να υπολογίσουμε για «καλές» $\vec{r}$

(I) $\ell(\Gamma)$ = μήκος της Γ

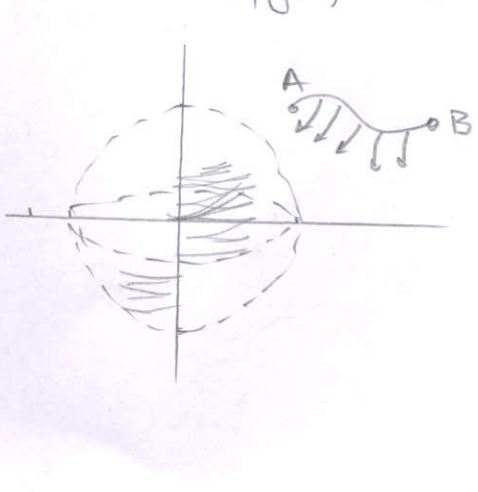
(II) • Γ είναι σε βαθμωτό πεδίο (πχ θερμοκρασίας, πίεσης) να βρούμε το «συνολικό» β.π. πάνω στη Γ, Μέση τιμή

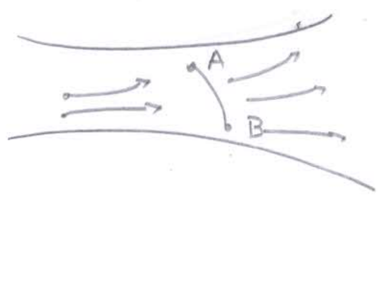
• $\vec{r}(t) \in \Gamma$, $\delta(\vec{r}(t))$ = πυκνότητα μάζας, m = μάζα, ΚΒ, ροπές

• $\mathbb{R}^2$



(III) Γ είναι διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ (πχ. ΔΠ δυνάμεων, Ταχυτήτων, Ροής) W έργο/Ροή κατά μήκος Γ





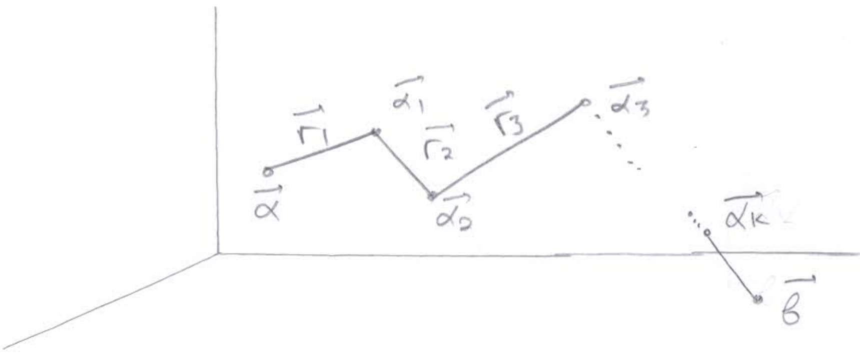
Πως προσεγγίζουμε τα προβλήματα αυτά;

(I) Γ

• Γ $\vec{r}(t) = \vec{\alpha} + t(\vec{\beta} - \vec{\alpha})$, $t \in [0,1]$

$\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$

$\ell(\Gamma) = \|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\| = \|\vec{r}\,'(t)\|$



59

$\ell(\Pi) = \sum_{n=1}^{K+1} \|\vec{r}\,'(t)\|$

Γ $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$

$\Delta = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{K+1} = \beta\}$

$\Pi_\Delta / \ell(\Pi_\Delta) > 0$

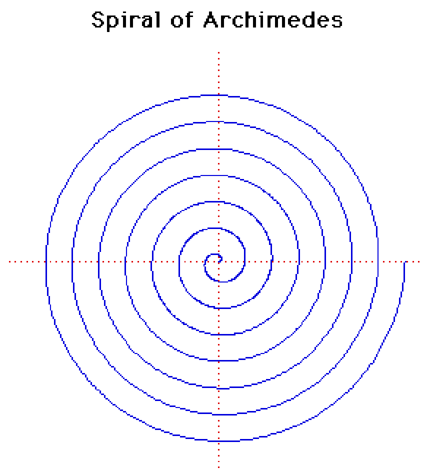
$\ell(\Gamma) =: \sup\{\ell(\Pi_\Delta) : \Delta \in \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]}\} \in [0, +\infty)$

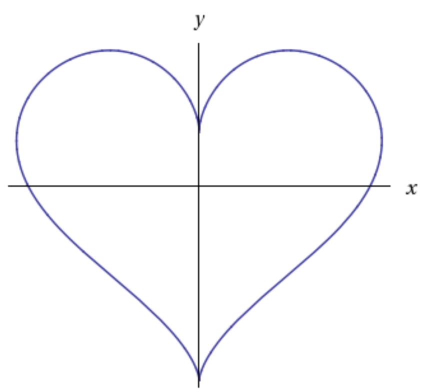
Εάν $\exists\, r'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\ell(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \|r'(t)\|\,dt$

$\underline{\vec{r} = C^1}$

$s(t) = \int_\alpha^t \|r'(z)\|\,dz \qquad \frac{ds(z)}{dz} = \|\vec{r}\,'(z)\| \qquad \ell(\Gamma) = \int_\Gamma ds$

(Ολοκλήρωμα Riemann Stieltjes / Απ Ι, Νρα Γ-Π)





$x(t) = 16\sin^3(t)$

$y(t) = 13\cos(t) - 5\cos(2t) - 2\cos(3t) - \cos(4t)$

(plotted for t from $-\pi$ to π)