Μάθημα 10

30/3/2015

Εφαπτομένη Ευθεία σε παρ. καμπύλη

Εφαπτόμενο Επίπεδο σε επιφάνεια

Σημασία της κλίσης / Ανάδελτα

(A) (1) Εφαπτομένη ευθεία σε παρ. καμπύλη.

(2) i) Εφαπτομένη ευθεία στο γράφημα $G_f = \{(x, f(x)) : x \in I\}$,

$f : I (\subseteq \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

ii) » » σε καμπύλη Στάθμης $S_c = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$

$f : B (\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$

(B) i) Εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα $G_f = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in A\}$.

$f : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$.

ii) Εφαπτόμενο επίπεδο σε επιφάνεια Στάθμης, $S_c = \{(x,y,z) \cdot F(x,y,z) = 0\}$

$F : B (\subseteq \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$

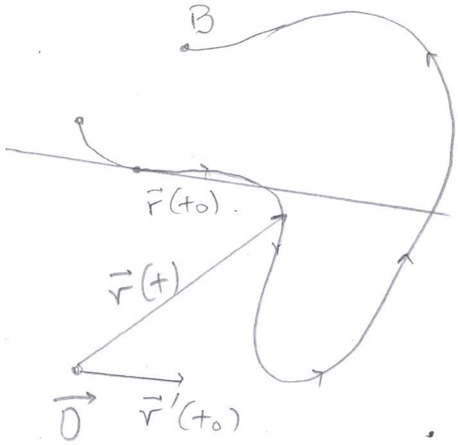
(A) (1) Γ, $\vec{r} = \vec{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_d(t))$

$t \in I$ = διαστ. του $\mathbb{R}$. Για $t_0 \in I$ $\vec{r}\,'(t_0) = (r_1'(t_0), \dots, r_d'(t_0)) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$

Συνήθως, $\vec{r}(t)$ = διάνυσμα θέσης ενός κινητού την χρονική στιγμή t

$\vec{r}\,'(t)$ = διάνυσμα ταχύτητας ενός κινητού τη χρονική στιγμή t.

$\|\vec{r}\,'(t)\|$ = ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t.



$I=[\alpha,\beta]$

$A=\vec r(\alpha)$ Αρχή της Γ

$B=\vec r(\beta)$ Πέρας της Γ

$\vec r(\alpha)=\vec r(\beta)$ Η Γ καλείται κλειστή

πχ

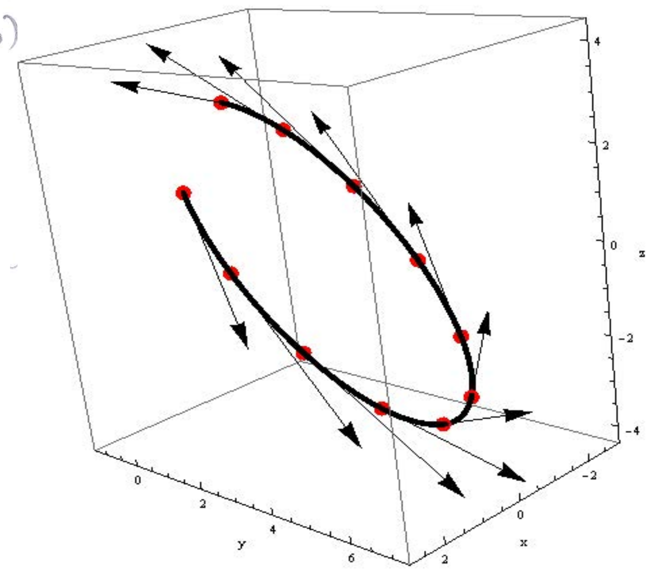
Εφαπτόμενη ευθεία στο $\vec r(t_0)$

$\vec r'(t_0)\neq\vec 0$

$\vec \ell(\lambda)=\vec r(t_0)+\lambda\,\vec r(t_0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

δηλαδή η ευθεία περνά από το $\vec r(t_0)$

// $\vec r'(t_0)$.

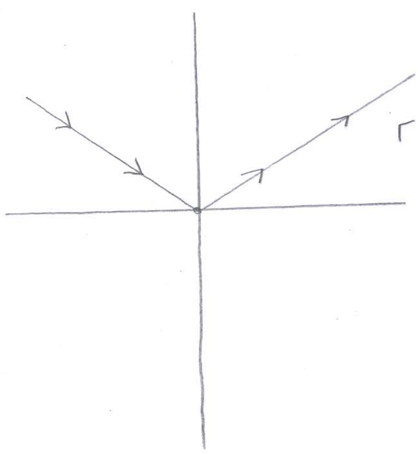


Σημειώσεις

1) Γ μπορεί να έχει C^1-παραμ.

και μια όχι C^1-παραμ.

πχ.



$\vec r_1(t)=(t,|t|)$, $t\in\mathbb{R}$

$\nexists\ \vec r_1'(0)$

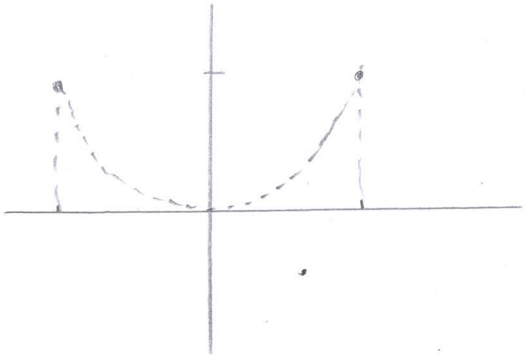
$\vec r_2(t)=(t|t|,t^2)$, $t\in\mathbb{R}$

$\vec r_2'(t)$, C^1

$(\vec r_2(0)=(0,0))$

2) Γ μπορεί να δέχεται λεία παραμέτρηση, $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}, t \in \mathbb{R}$ <u>και</u> μια όχι λεία παραμέτρηση

πχ



$\vec{r}_1(t) = (t, t^2)$

$\vec{r}_1'(0) = (1,0) \neq (0,0)$

$\vec{r}_1'(t) \neq (0,0)$

Εφαπτόμενη ευθεία στο $\vec{r}(t_0)$

- $\vec{r}_2(t) = (t^3, t^6)$, $t \in \mathbb{R}$

$\vec{r}_2'(0) = (0,0)$

<u>Ασκήσεις</u>

1) $\vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, t)$ $t \in \mathbb{R}$

i) Κίνηση γίνεται στην επιφάνεια κυλίνδρου

ii) $\|r'(t)\| =$ σταθ. $t \in \mathbb{R}$

iii) Εφ. ευθεία στο $r'(0)$.

Λύση i) $x(t) = \sigma\upsilon\nu t$

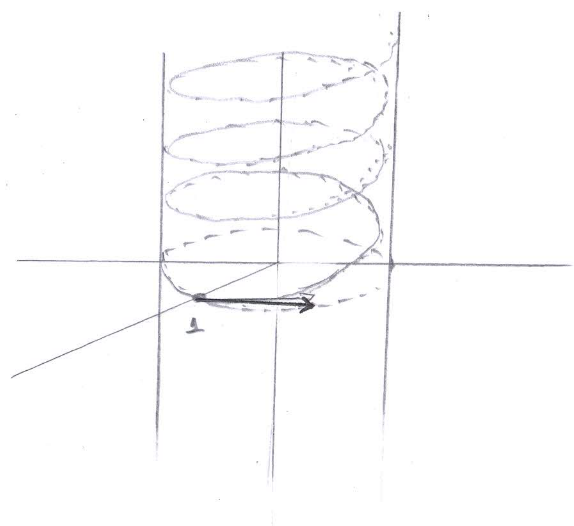
$y(t) = \eta\mu t$

$z(t) = t$

$x^2(t) + y^2(t) = 1$

$z \in \mathbb{R}$

Κύλινδρος



ii) $\vec{r}'(t) = (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t, 1)$

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2}$

iii) $\left.\begin{array}{l} \vec{r}(0) = (1,0,0) \\ r'(0) = (0,1,1) \end{array}\right\}$ $\vec{\ell}(\lambda) = (1,0,0) + \lambda(0,1,1) = (1,\lambda,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) $\exists \vec{r} = \vec{r}(t)$, $\exists \vec{r}'(t)$, $t \in I$

$\vec{r}'(t) \in$ επιφάνεια της $S(\vec{0}, \alpha)$, $(\alpha > 0)$

Τότε $\vec{r}'(t) \perp \vec{r}(t)$, $t \in I$.

Λύση.

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

$\vec{r}(t) \in$ επιφ. $S(\vec{0}, \alpha)$

$\|\vec{r}(t)\| = \alpha$

$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = \alpha^2$

$2(x(t) \cdot x'(t) + y(t) \cdot y'(t) + z(t) \cdot z'(t)) = 0$, $t \in I$

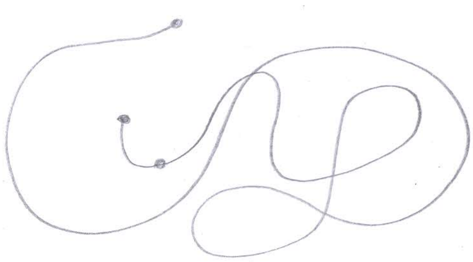
$\Rightarrow r'(t) \circ r'(t) = 0$.

3) $\vec{r} : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $r'(t) \neq \vec{0}$, $t \in [\alpha, \beta]$ <u>Παλιό Θέμα</u>

ΝΔΟ <u>δεν</u> υπάρχει $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^3$ και $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $t_i \neq t_j$, $i \neq j$

με $\vec{r}(t_n) = \vec{y_0}$ $t_n \in [\alpha, \beta]$

Δηλαδή, από σημείο του $\mathbb{R}^3$ η $\vec{r}$ μπορεί να περάσει πεπερασμένο το πλήθος χρονικές στιγμές.



Λύση

Έστω $\exists \vec{y_0} \in \mathbb{R}^3$ και $t_n \in [\alpha, \beta] : t_i \neq t_j$

$i \neq j$, $n \in \mathbb{N}$: $\vec{r}(t_n) = \vec{y_0}$

$t_n \in [\alpha, \beta]$, $n \in \mathbb{N}$ $\xRightarrow{B-W}$ $\exists$ (t_{k_n}) υπακολουθία :

$t_{k_n} \longrightarrow t_0 \in [\alpha, \beta]$.

$\vec{r}$ = συνεχής, $\vec{y_0} = \vec{r}(t_{k_n}) \xrightarrow[n]{} \vec{r}(t_0)$, $\vec{r}(t_0) = \vec{y_0}$

$$\vec{r}'(t_0) \overset{AM}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{\vec{r}(t_{k_n}) - \vec{r}(t_0)}{t_{k_n} - t_0} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\vec{y_0} - \vec{y_0}}{t_{k_n} - t_0} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{r}'(t_0) = \vec{0}$$

<u>ΑΤΟΠΟ.</u>

(A) (2)

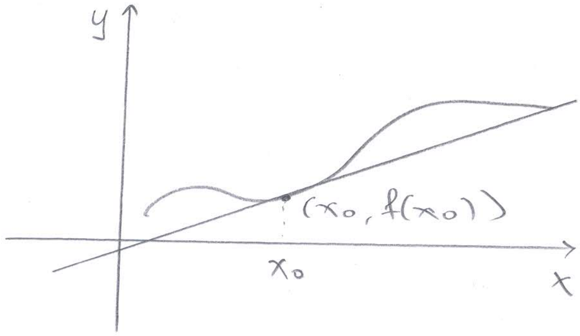
i) $G=\{(x,f(x)) : x\in I\}$, $f: I(\subseteq \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in I$, $\exists\, f'(x_0)$

Εφαπτομένη ευθεία στο $(x_0,f(x_0))\in G$

είναι $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

Κάθετο : $(-f'(x_0),1)$.



. $G_f : \vec{r}(x)=(x,f'(x))$ $x\in I$

$\vec{\ell}(\lambda)=\vec{r}(x_0)+\lambda\,\vec{r}'(x_0)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$x(\lambda)=x_0+\lambda$

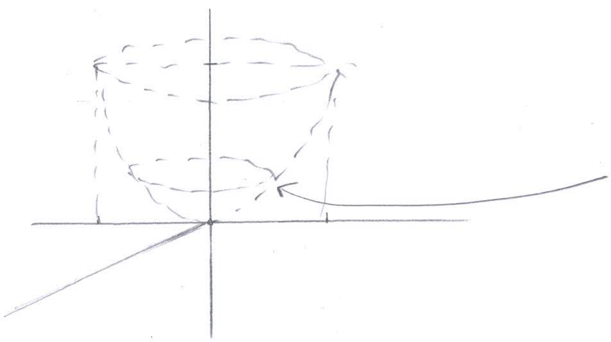
$y(\lambda)=f(x_0)+\lambda\cdot f'(x_0)$

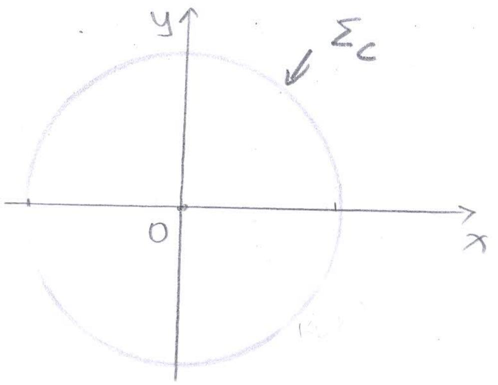
$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ / Κάθετο $(-f'(x_0),1)$

(A) (2)

ii) $F: A(\subseteq\mathbb{R}^2)\longrightarrow\mathbb{R}$, C^1

$\Sigma_c=\{(x,y) : F(x,y)=c\}\ni(x_0,y_0)$





Υπόθεση. $\nabla F(x_0,y_0) \neq \vec{0}$

Έστω $\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq \vec{0}$

ΘΠΣ $\quad \exists\, f : (x_0-\delta, x_0+\delta) \to G$

$f(x_0)=y_0$

Δηλαδή, η καμπύλη S_G είναι τοπικά το γράφημα μιας συνάρτησης

Εφαπτομένη στο G_f, (x_0,y_0):

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad (1)$

$F(x, f(x)) = G, \quad x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\nabla F(x_0, f(x_0)) \cdot (1, f'(x_0)) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, f(x_0)) + f'(x_0)\frac{\partial F(x_0, f(x_0))}{\partial y} = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}} \qquad (2)$$

Εφαπτομένη στην S_G στο $(x_0,y_0)\in S_G$ είναι $((1)-(2))$

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x_0-y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

$$\nabla F(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0) = 0$$

Άρα, $\nabla F(x_0,y_0) \perp$ εφ. ευθεία

Ορίζουμε, $\nabla F(x_0,y_0) \perp S_G$.

Ιδιαιτέρως $\quad F(x,y) = y - \varphi(x)$

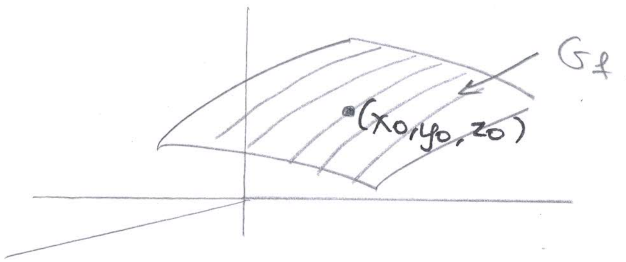
$\nabla F(x_0,y_0) = (-\varphi'(x_0), \cancel{+}1)$

(B) i) $f: A(\subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$

$G_f = \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in A\}$

Επιφάνεια του Γραφήματος της f

$\exists\, df(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \in G_f$



Εφαπτομενο επιπεδο

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Κάθετο: $\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), +1\right)$ στο εφαπτόμενο επιπεδο του G_f.

ii) $F: B(\subseteq \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1

$S_c = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = c\} \ni (x_0, y_0, z_0)$

$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$

Εστω $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$

Τοπικά στο (x_0,y_0,z_0) η S_c είναι το γράφημα μιας $f = C^1$

$f: S((x_0,y_0),\delta) \longrightarrow (z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon)$

(ΘΠΣ)

Εφαπτόμενο επίπεδο G_f στο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0)$

Ανάλογα με το (A) (2) (ii)

Εφαπτόμενο επίπεδο της S_c στο (x_0,y_0,z_0).

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x_0-y_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

$\nabla F(x_0,y_0,z_0) \perp$ εφαπτόμενο επίπεδο

Ορισμός

S_c , $F: A\ (\subseteq \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}$, $F = C^1$

$\nabla F(\vec{x_0}) \neq \vec{0}$ / $\nabla F(\vec{x_0}) \perp$ εφαπτόμενο (ευθεία ή επίπεδο)

Ορίζουμε $\nabla F(\vec{x_0}) \perp S_c$

Πρόταση

$S_c = \{(x,y) : F(x,y) = c\}$ $F = C^1$

$\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0)$, $(x_0,y_0) \in S_c$

Έστω $\vec{r} : I \longrightarrow S_c$, $\vec{r}(t_0) = (x_0,y_0)$ και $\exists\ \vec{r}'(t_0)$

Τότε $\nabla \vec{F}(x_0,y_0) \perp \vec{r}'(t_0)$

Απόδειξη

$F(\vec{r}(t)) = c$, $t \in I$

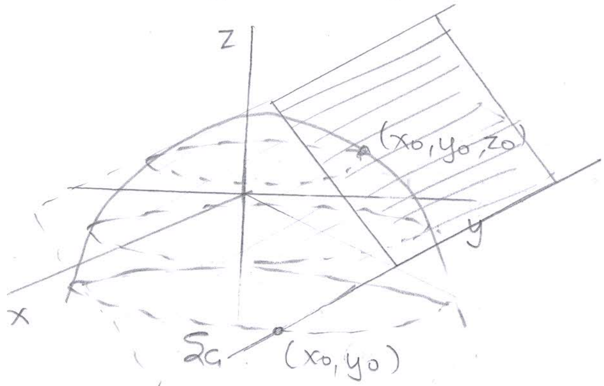
Κανόνας Αλυσίδας $\nabla F(\vec{r}(t_0)) \circ \vec{r}'(t_0) = 0$

ΣΥΝΟΨΗ

i) $G_f = \{(x,y,F(x,y)) : (x,y)\in A\}$, $F: A\ (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

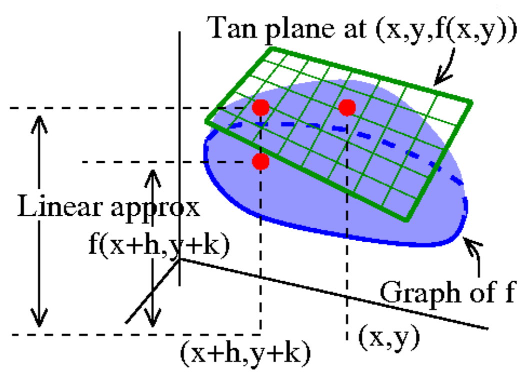
$\exists\, dF(x_0,y_0)$

Εφαπτόμενο επίπεδο G_F, $z = T(x,y) = F(x_0,y_0) + \nabla F(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$ στο $(x_0,y_0,F(x_0,y_0))$ (*)



$S_{F(x_0,y_0)} = \{(x,y) : F(x,y) = F(x_0,y_0)\}$, $\nabla F(x_0,y_0) \neq 0$

Εφαπτ. ευθεία (*) : $\nabla F(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) = 0$



ii) $G_F = \{(x,y,z,F(x,y,z)),\ (x,y,z)\in B\}$

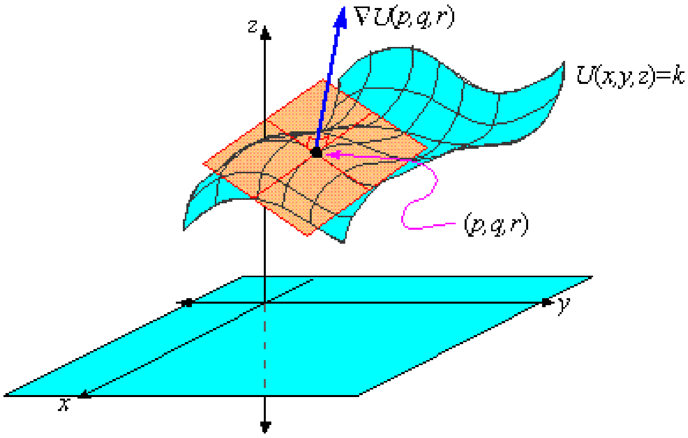
$F: B\ (\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$

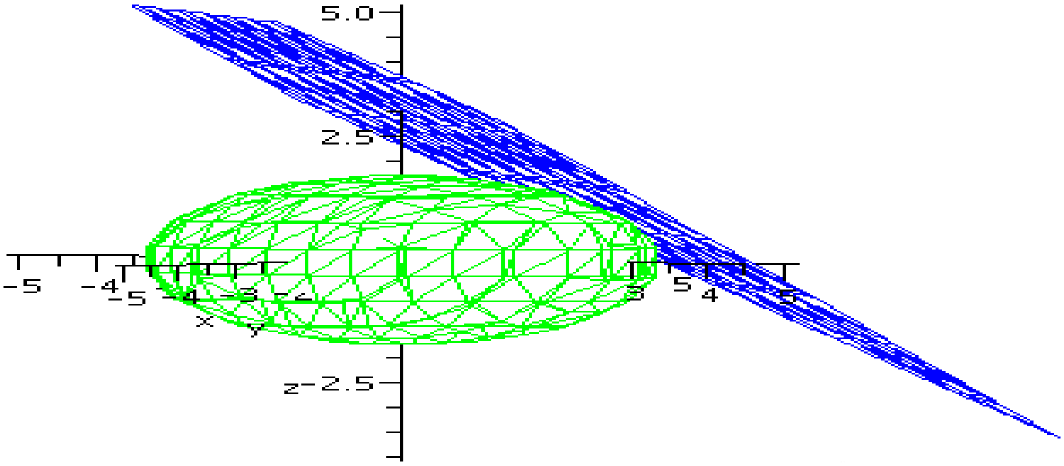
Εφαπτόμενο επίπεδο G_f, $(x_0,y_0,z_0,F(x_0,y_0,z_0))$ και $\exists\, \vec{r}\,'(t_0)$

Είναι $w = T(x,y,z) = F(x_0,y_0,z_0) + \nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$S_{F(x_0,y_0,z_0)} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = F(x_0,y_0,z_0)\}$

Εφαπτόμενο Επίπεδο : $\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$.

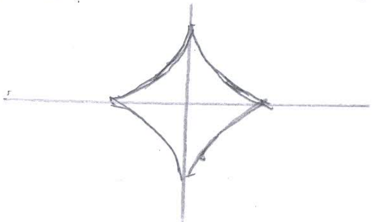


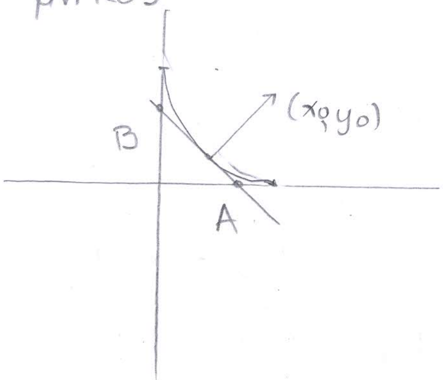


Ασκήσεις (Από Παλιά Θέματα)

1) ΝΔΟ το τμήμα της εφαπτομένης ευθείας στην $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $(\alpha>0)$ με $x,y>0$ έχει σταθερό μήκος

Λύση





$$F(x,y)=x^{2/3}+y^{2/3}-a^{2/3}$$

$$F(x_0,y_0)=0$$

Εφαπτομένη ευθεία $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(x-x_0, y-y_0)=0$

δηλαδή $\frac{x}{\sqrt[3]{x_0}}+\frac{y}{\sqrt[3]{y_0}}=a^{2/3}$ $\quad(x_0^{2/3}+y_0^{2/3}=a^{2/3})$

A: $(x_0^{1/3}\alpha^{2/3}, 0)$ $\quad (AB)=\left(x_0^{2/3}\alpha^{4/3}+y_0^{2/3}\alpha^{4/3}\right)^{1/2}=a^{2/3}\cdot(\alpha^{2/3})^{1/2}$

B: $(0, y_0^{1/3}\cdot\alpha^{2/3})$ $\quad =\alpha$

2) Εφαπ. επιφ. $S: \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=6$ στο $(4,1,9)$

ΚΑΙ το κάθετο

Λύση $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-6$, $x,y,z>0$

$F(4,1,9)=0$

$\nabla F(4,1,9)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{6}\right)\perp S$

Εφαπτόμενο επίπεδο: $\frac{1}{4}(x-4)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{6}(z-9)=0$

3) Εφαπτόμενο επίπεδο, $S: 6\omega(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz=4$

στο $P(0,1,2)$ ΚΑΙ το κάθετο

Λύση $F(x,y,z)=6\omega(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz=4$

$\nabla F(0,1,2)=(2,2,1)$, $F(0,1,2)=0$

Εφαπτόμενο Επίπεδο: $2x+2y+z=4$

→ Ασκήσεις (5): 12, 13, 14, 15 / Βλέπε Συμπληρωματικό Υλικό Εφαπτόμενο Επίπεδο στο Torus / Ντονατς / Λουκουμάς

12) α) Έστω K ο κύκλος (περιφέρεια) κέντρου $(0,0)$, ακτίνας 1.
Να ευρεθεί η εφαπτομένη ευθεία και το μοναδιαίο κάθετο στον K, στο σημείο $P=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

i) Θεωρώντας το K ως παραμετροιμένη καμπύλη

ii) Θεωρώντας τοπικά στο P τον K, ως γράφημα συνάρτησης

iii) Θεωρώντας τον K ως ισοσταθμική καμπύλη.

β) Έστω η επιφάνεια S της σφαίρας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας 1. Να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο και το μοναδιαίο κάθετο στην S, στο $Q=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

i) Θεωρώντας την S τοπικά στο Q, ως γράφημα συνάρτησης

ii) Θεωρώντας την S ως ισοσταθμική επιφάνεια.

13) ΝΔΟ τα γραφήματα των $z=f(x,y)=x^2+y^2$, $z=g(x,y)=-x^2-y^2+xy^3$ εφάπτονται στο $(0,0,0)$

14) Έστω η επιφάνεια S : $\eta\mu(x+y)+\epsilon\varphi(x+z)=1$ και $P=\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$
Να υπολογιστεί το μοναδιαίο κάθετο της S στο P.

15) Έστω $F(x,y,z)=x^2y+ye^x-z$

i) Να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο στην $\Sigma_0=\{(x,y,z): F(x,y,z)=0\}$ στο $P=(0,1,1)$

ii) Να ευρεθεί το $\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^3$, $\|\vec{\alpha}\|=1$, ώστε να έχουμε την μέγιστη μεταβολή της F στο $Q=(0,-1,2)$.