Μάθημα 9ο.

27/03/2015

ΘΜΤ: $f: A(\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο A = ανοικτό.

Έστω $\vec{a}, \vec{b} \in A$ τ.ω. $[\vec{a}, \vec{b}] \subseteq A$

$\vec{\alpha} \neq \vec{b}$

Τότε $\exists\ \vec{z} \in (\vec{a}, \vec{b}) : f(\vec{b}) - f(\vec{\alpha}) = df(\vec{z})\cdot(\vec{b} - \vec{\alpha}) = \nabla f(\vec{z})\cdot(\vec{b} - \vec{\alpha})$

Ασκήσεις

1. $f, g : K(\subseteq \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμες, K = ανοικτό

(α) i) Εάν K = κυρτό και $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in K \Rightarrow f$ = σταθερή

ii) Εάν K = πολυγωνικά συνεκτικό και $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in K \Rightarrow f$ σταθερή

iii) Εάν K = κατά τόξα συνεκτικό και $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in K \Rightarrow f$ σταθερή.

Εάν $\nabla f = \nabla g$ στο $K \Rightarrow f = g + c$ (για κάποιο $c \in \mathbb{R}$)

Ιδιαιτέρως, εάν $\vec{F}$ είναι δ.π. κλίσεων / συντηρητικό

και $\vec{F} = \nabla f = \nabla g$ τότε $f = g + c$.

(β) f = διαφορίσιμη στο K = ανοικτό με $\nabla f = \vec{0}$ στο K, να μην είναι σταθερή (παράδειγμα). —

Λύση

(α) i) $\vec{\alpha} \in K$

$\vec{x} \in K$, $\vec{x} \neq \vec{\alpha}$. Το K κυρτό $\Rightarrow [\vec{\alpha}, \vec{x}] \subseteq K$

$f(\vec{x}) - f(\vec{\alpha}) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} \nabla f(\vec{z})\cdot(\vec{x} - \vec{\alpha}) = 0$, $f(\vec{x}) = f(\vec{\alpha})$

f = σταθερή

ii) $\vec{a} \in K$

$\vec{x} \in K$, $\vec{x} \neq \vec{\alpha}$. Το K = πολυγωνικά συνεκτικό.

$\exists\ \Pi = [\vec{\alpha}, \vec{\alpha}_1] \cup [\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2] \cup \ldots \cup [\vec{\alpha}_k, \vec{x}] \subseteq K$

$$\text{ΘΜΤ}, \left.\begin{aligned} f(\vec{\alpha}_1) &= f(\vec{\alpha}) \\ f(\vec{\alpha}_2) &= f(\vec{\alpha}_1) \\ &\vdots \\ f(\vec{\alpha}_k) &= f(\vec{x}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{a}) \ / f \text{ σταθερή}$$

(β) $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & x \in (1,2) \end{cases}$$

$f'(x) = 0$, f δεν είναι σταθερή στο $K = (0,1) \cup (1,2)$

2. i) $\vec{F}(\vec{r}) = -\dfrac{GMm}{r^3} \cdot \vec{r}$, $V(\vec{r}) = -\dfrac{GMm}{r}$

όπου $\vec{r} = (x,y,z)$ $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{r} \neq \vec{0}$.

Το V είναι η μοναδική συνάρτηση με $\vec{F} = \nabla V$ και $\lim\limits_{r \to +\infty} V(\vec{r}) = 0$.

ii) $\vec{F}_1(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2}\right)$ $\vec{F}_2(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

C^∞ με κοινό Π.Ο. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ($\vec{F}_1, \vec{F}_2$ = αστρόβιλα)

ΝΔΟ ότι α) $\nexists\ \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : \vec{F}_1 = \nabla\varphi$ ($\vec{F}_1$ = όχι π. κλίσεων)

β) $\exists\ f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : \vec{F}_2 = \nabla\varphi$ ($\vec{F}_2$ = π. κλίσεων)

Λύση

i) Γνωρίζουμε $\vec{F} = \nabla V$ (άσκηση 4, Μάθημα 07)

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{F} = \nabla V = \nabla f$

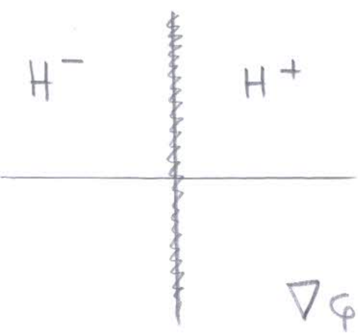
$$\xRightarrow{\text{Ασκ } 1} f(x,y,z) = V(x,y,z) + c = \underbrace{\frac{-GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}}_{\xrightarrow[r\to+\infty]{} 0} + c$$

Εάν $f(x,y,z) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$, τότε $c=0$, άρα $f=V$.

ii) $f(x,y) = -\text{τοξεφ}\,\frac{y}{x}$, $x \neq 0$

$\nabla f = \vec{F}_1$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$

$\exists\, \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{F}_1 = \nabla \varphi$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



$H^+ = \{(x,y) : x > 0\}$, $H^- = \{(x,y) : x < 0\}$ ανοικτά και κυρτά.

$\nabla \varphi = \nabla f$ στο H^+ = ανοικτό + κυρτό $\longrightarrow \varphi(x,y) = f(x,y) + c_1$ στο H^+

$\nabla \varphi = \nabla f$ στο H^- = " + " $\longrightarrow \varphi(x,y) = f(x,y) + c_2$ στο H^-

$\varphi(x,1) = -\text{τοξεφ}\,\frac{1}{x} + c_1, \quad x > 0$

$\varphi(x,+1) = -\text{τοξεφ}\,\frac{1}{x} + c_2, \quad x < 0$

Όμως, φ συνεχής στο $(0,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} (\varphi(x,1)) = \lim\limits_{x\to 0^-} (\varphi(x,1))$

$$\| $$

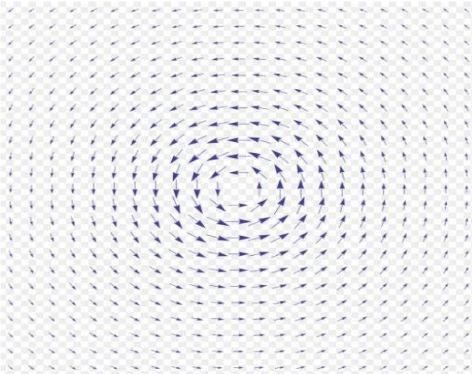
$$-\frac{\pi}{2} + c_1 = \frac{\pi}{2} + c_2 \implies c_1 - c_2 = \pi$$

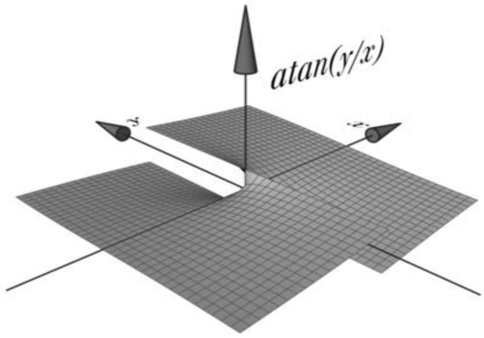
Δουλεύουμε για $\varphi(x,-1)$, καταλήγουμε $c_2 - c_1 = \pi$

$$\left.\begin{array}{l} c_1 - c_2 = \pi \\ c_2 - c_1 = \pi \end{array}\right\} \implies 2\pi = 0$$

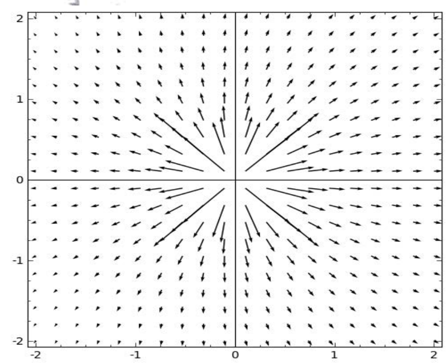
Άτοπο

Άρα $\exists\, \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R} : \vec{F}_1 = \nabla \varphi$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.





ii) (β) $\vec{F}_2(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



$f(x,y) = \dfrac{1}{2} \ln (x^2+y^2) + C$. $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\nabla f = \vec{F}_2$ στον $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Το ii) (α) θα λυθεί και με επικαμπύλια ολοκληρώματα (Θ. Green)

Θεώρημα Αντίστροφης συνάρτησης

Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ C^1 και στο $x_0 \in (a,b)$ έχουμε $f'(x_0) \neq 0$.

Τότε i) $\exists\, \delta, \varepsilon > 0$: η $f : (x_0-\delta, x_0+\delta) \to (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$ να είναι 1-1 και επί

ii) $(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1} = (J_{x_0}(f))^{-1}$

Εάν $f'(x_0) = 0$ $\nexists$ $f^{-1} = C^1$ σε περ. του $f(x_0)$

Θεώρημα Αντίστροφης συνάρτησης

$\vec{f} : A (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^d$, C^1 και $\vec{x}_0 \in A$ = ανοικτό

με $\det J_{\vec{x}_0}(\vec{f}) \neq 0$

Τότε i) $\exists\, \delta, \varepsilon > 0$ η $f : S(\vec{x}_0, \delta) \to S(\vec{f}(\vec{x}_0), \varepsilon)$ $(S(\vec{x}_0,\delta) \subseteq A)$

η f 1-1 και επί

ii) $J_{\vec{f}(\vec{x}_0)}(f^{-1}) = (J_{\vec{x}_0}(\vec{f}))^{-1}$ / $\det J_{\vec{x}_0}(\vec{f}) = 0$ η $\vec{f}$ δεν αντιστρέφεται κατά το τρόπο C^1

Ασκήσεις Παλιών Θεμάτων

1) $\vec{f}(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

i) ΝΔΟ η $\vec{f}$ αντιστρέφεται τοπικά για $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

ii) $J_{\vec{f}(\vec{x_0},\vec{y_0})}(\vec{f}^{-1})$ $\quad (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

iii) ΝΔΟ η $\vec{f}$ δεν αντιστρέφεται ολικά.

Λύση

i) $$J_{(x_0,y_0)}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2) \\ \frac{\partial (2xy)}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}(2xy) \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}$$

Άρα $\det J_{(x_0,y_0)}(\vec{f}) = 4(x_0^2+y_0^2) \neq 0$.

ii) $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ $\quad J_{\vec{f}(x_0,y_0)}(\vec{f}^{-1}) = \left(J_{f(x_0,y_0)} \vec{f} \right)^{-1} = \frac{1}{4(x_0^2+y_0^2)} \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ -2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}$

iii) $\vec{f}(-x,-y) = \vec{f}(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}^2$

η $\vec{f}$ δεν είναι 1-1 στον $\mathbb{R}^2$

2) $\vec{f}(x,y) = (e^{x+y}\eta\mu y, e^{x+y}\sigma\upsilon\nu y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

i) ΝΔΟ η $\vec{f}$ αντιστρέφεται τοπικά στο $(1,0)$

ii) $J_{(0,e)}(\vec{f}^{-1})$

Λύση $\vec{J}_{(1,0)}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix}$, $\det J_{(1,0)}(\vec{f}) = -e^2 \neq 0$

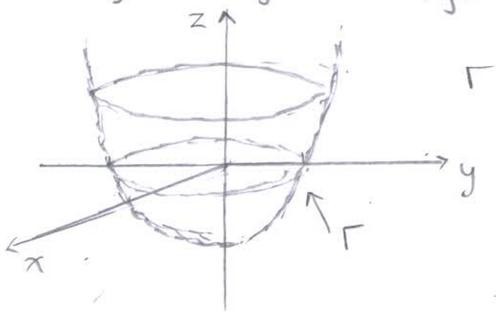
$\exists$ $S((1,0),\delta)$, $S(\vec{f}(1,0),\varepsilon)$:

$\vec{f} : S((1,0),\delta) \longrightarrow S((0,e),\varepsilon)$ 1-1 επί, δηλαδή $\exists (\vec{f}^{-1})$ τοπικά.

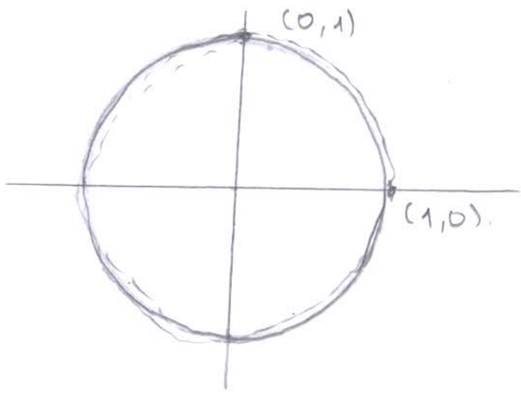
ii) $J_{(0,e)}(\vec{f}^{-1}) = \left(J_{(1,0)}(\vec{f})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{e^2}\begin{pmatrix} e & -e \\ -e & 0 \end{pmatrix}.$

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης

$F(x,y) = x^2+y^2-1 \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$



$\Gamma: S_0 = \{(x,y) : F(x,y)=0\} = \{(x,y) : x^2+y^2=1\}$



• $(0,1)$ S_0 είναι τοπικά το γράφημα της $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ $x\in[-1,1]$

$F(x,\sqrt{1-x^2}=f(x)) = 0 \quad x\in[-1,1], \quad F(0,1)=0, \quad f(0)=1$

$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$

• $(1,0)$ S_0 είναι τοπικό γράφημα της $g(y)=\sqrt{1-y^2}$, $y\in[-1,1]$

$F(g(y),y)=0, \quad y\in[-1,1], \quad g(1)=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 2 \neq 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 0.$

Γενικά. $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$S_c = \{(x,y): F(x,y) = c\}$ ισοσ. καμπύλη

$(x_0,y_0) \in S_c$ η S_c είναι τοπικά το γράφημα συνάρτησης;

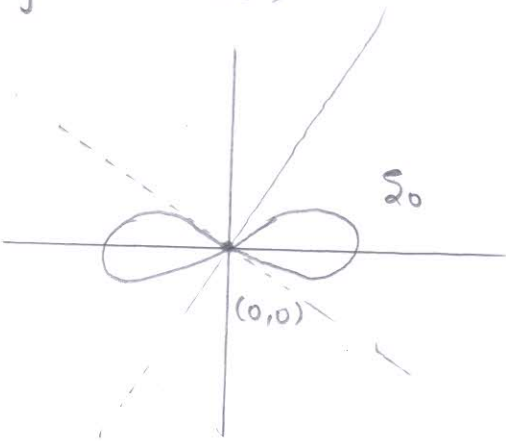
δηλαδή $\exists f: F(x, f(x)) = 0,\ f(x_0) = y_0$

ή $\exists g: F(g(y), y) = 0 \quad g(y_0) = x_0$;;

Δεν γίνεται πάντα!

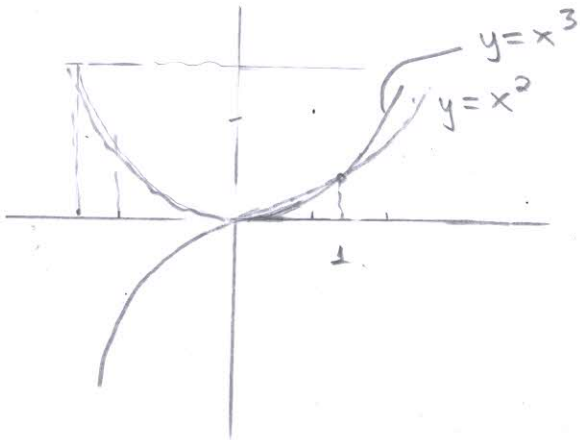
Π.Χ • $F(x,y) = x^4 - a^2(x^2 - y^2) \quad (a>0)$

$S_0: \ x^4 = a^2(x^2 - y^2)$



Τοπ στο (0,0) η S_0 δεν είναι το γράφημα συνάρτησης

• $F(x,y) = (y - x^2)\cdot(y - x^3)$



Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Έστω $F: A\times B \longrightarrow \mathbb{R}$, $F = C^k$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $B \subseteq \mathbb{R}$

και $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in A\times B$ τέτοιο ώστε:

i) $F(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$

ii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$

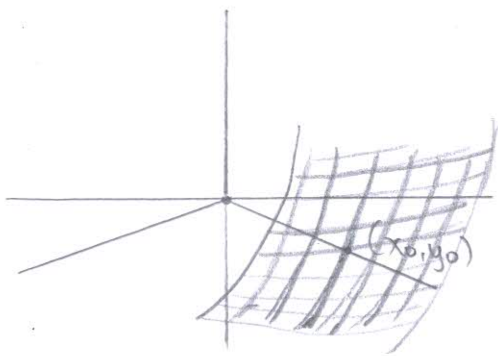
Τότε i) $\exists$ μοναδική $f: S(\vec{x}_0, \delta)\ (\subseteq A) \longrightarrow (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon) \subseteq B$

τ.ω. $f(\vec{x}_0) = y_0$ $F(\vec{x}, f(\vec{x})) = 0$, $\vec{x} \in S(\vec{x}_0, \delta)$

ii) η f είναι C^k στο $S(\vec{x}_0, \delta)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}, f(\vec{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y_i}(\vec{x}, f(\vec{x}))}$

$\vec{x} \in S(\vec{x}_0, \delta)$

Απόδειξη (Η απόδειξη είναι εκτός ύλης).



Για $d=1$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$

Έστω $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} > 0$, $F = C^k\ (k \geq 1)$

$\exists\, \varepsilon > 0: \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$

$x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, $y \in [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$

Σταθεροποιούμε το $x = x_1 \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1, y) > 0$, $y \in [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon] \implies F(x_1, \cdot)$ γνήσια αύξουσα στο $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$ (1)

$F(x_0, y_0-\varepsilon) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0+\varepsilon)$ (από την (1))

$F(x_0, y_0-\varepsilon) < 0$, $F(x_0, y_0+\varepsilon) > 0$.

$\exists\ 0<\delta<\varepsilon$:

$F(x, y_0-\varepsilon) < 0 < F(x, y_0+\varepsilon)$

$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$x = x_1$ Σταθερό, $x_1 \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$F(x_1, y_0-\varepsilon) < 0 < F(x_1, y_0+\varepsilon)$

$\xrightarrow[(+)\ (1)]{\text{Λήμμα Bolzano}}$ $\exists!\ y_1 \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon) : F(x_1, y_1) = 0$

Ορίζουμε $f(x_1) = y_1$.

Ασκήσεις Παλιών Θεμάτων

1. $F(x,y) = x^3+y^3-3xy \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (C^\infty)$

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ της καμπύλης στάθμης $x^3+y^3-3xy=0 \quad (S_0)$

i) Πλησίον των οποίων η καμπύλη είναι το γράφημα μιας C^∞ συν. $y=f(x)$.

ii) Να υπολογιστεί $f'(a)$

iii) Δείξτε ότι ένα

Λύση

i) (a,b): $a^3+b^3 = 3ab$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = 3b^2-3a = 3(b^2-a)$$

Για (a,b): $\begin{cases} a^3+b^3 = 3ab \\ b^2 \neq a \end{cases}$ (*)

$\exists\ y=f(x)$ τοπικά, $F(x, f(x)) = 0$, $f(a) = b$, $f = C^\infty$.

ii) Έστω (α,β) ικανοποιεί την ⊛

$x^3 + f^3(x) = 3x f(x) \quad x\in(a-\delta, a+\delta)$

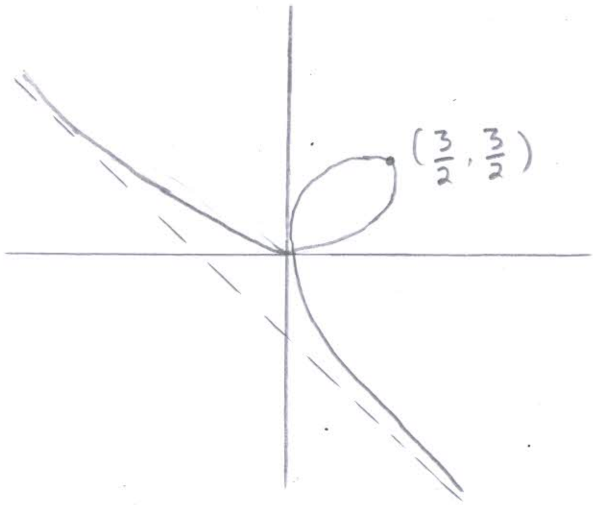
$x^2 + f^2(x)\cdot f'(x) = f(x) + x f'(x)$

$(a,\beta): a^2 + \beta^2 \cdot f'(\alpha) = \beta + a f'(\alpha)$

$f(a)=\beta$

$$f'(\alpha) = \frac{a^2-\beta}{a-\beta^2}$$

Σημείωση Η S_0 $x^3+y^3=3xy$ δόθηκε στον Fermat από τον Decartes κι ονομάζεται Forium του D. Ρώτησε να βρεθεί η εφαπτομένη ευθεία στο $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$



Εφαπτομένη ευθεία $(f'(\frac{3}{2})=-1)$

$y=\frac{3}{2}-(x-\frac{3}{2}) \quad y+x=3$

2) ΝΔΟ $\exists\, y=f(x)$ σε αν. περιοχή U του 1 τ.ω. $f(1)=1$
C^∞

και $x^y+y^x=2$.

Να υπολογιστεί η $f'(1)$

Θέμα Φεβρουαρίου '15.

Λύση $F(x,y)=x^y+y^x-2, \ y,x>0$

$F(1,1)=0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=1\neq 0$ Άρα $\exists f:(1-\varepsilon,1+\varepsilon)\xrightarrow{C^\infty}(1-\varepsilon',1+\varepsilon')$

$f(1)=1, \ F(x,f(x))=0 \quad |x-1|<\varepsilon$

$x^{f(x)}+[f(x)]^x=2 \quad |x-1|<\varepsilon.$

Παραγωγίζουμε ως προς x, βρίσκουμε $f'(1)=-1$.

3) ΝΔΟ $y\eta\mu x + 3zy^2 + 2xyz = 3$ επιλύεται $z = z(x,y)$ πλησίον του $P = (0,1,1)$ και να υπολογιστούν τα $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$

Λύση.

$F(x,y,z) = y\eta\mu x + 3zy^2 + 2xyz - 3$ / C^∞

$F(0,1,1) = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,1) = \left| 3y^2 + 2xy \right|_{(0,1,1)} = 3 \neq 0$$

Άρα $\exists f: S((0,1),\delta) \to (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, C^∞, $f(0,1) = 1$

και $(x,y) \in S((0,1),\delta)$ $y\eta\mu x + 3f(x,y)\cdot y^2 + 2xy\, f(x,y) = 3$

$$y\sigma\upsilon\nu x + 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,y^2 + 2y\,f(x,y) + 2xy\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

$(0,1) = (x,y)$: $1 + 3\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + 2 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -1 \quad / \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -2$$

Ασκήσεις 5

1) Τα διαν. πεδία είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

$$\vec{F}_1(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

$$\vec{F}_2(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$$

ΝΔΟ i) Τα $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ είναι αστρόβιλα

ii) Το $\vec{F}_2$ είναι δ.π κλίσεων/Συντηρητικό

Το $\vec{F}_1$ δεν είναι δ.π. κλίσεων/Συντηρητικό.

2) Να υπολογισθούν οι $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\vec{F}_i = \nabla f_i$, $i=1,2,3$ όπου

$$\vec{F}_1(x,y,z) = (y-x^2, x+y^2, 0)$$

$$\vec{F}_2(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$

$$\vec{F}_3(x,y,z) = (3x^2yz+y+5, x^3z+x-z, x^3y-y+z)$$

3) Έστω η διαφορική εξίσωση $u_{xx} = u_{tt}$, $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ΝΔΟ. Εαν η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = C^2$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = C^1$ τότε η $u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης με αρχικές συνθήκες $u(x,0) = f(x)$ και $u_t(x,0) = g(x)$.

4) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = C^1$

i) εαν $z = f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ τότε $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

ii) εαν $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$ τότε $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

5) Έστω $f(x,y,z) = e^{2x-y+3z^2}$ και $\vec{g}(r,s,t) = (r+s-t, 2r-3r, \sin(rst))$, $w = f \circ \vec{g}$.

Να υπολογισθεί η $\frac{\partial w}{\partial r}$ κατ' ευθεία και με τον Κανόνα της Αλυσίδας.

6) Έστω $\vec{g}(x,y)=(x^2+1,\, y^2)$, $\vec{f}(u,v)=(u+v,\, u,\, v^2)$
Να υπολογιστούν στο $(1,1)$ οι μερικές παράγωγοι των συντεταγμένων συναρτήσεων της $\vec{f}\circ\vec{g}$, κατ' ευθεία και με τον Κανόνα της Αλυσίδας.

7) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\in C^1$, $\vec{g}(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)$ και $F=f\circ\vec{g}$. ΝΔΟ $\|\nabla f\|^2=\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2$.

8) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\in C^1$, $\vec{g}(s,t)=(e^s\cos t,\, e^s\sin t)$ και $F=f\circ\vec{g}$. ΝΔΟ
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2\right]$$

---

9) ΝΔΟ υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z=f(x,y)$, $(x,y)\in S=S((1,1),\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^2$ με $f(1,1)=1$ και $z^3+yz-xy^2-x^3=0$, $(x,y)\in S$.
Να υπολογιστούν οι $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)$.

10) ΝΔΟ υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in S=S((-3,2),\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^2$ με $\varphi(3,-2)=1$ και $[\varphi(x,y)]^6+x[\varphi(x,y)]^2+5y\varphi(x,y)+y^2+2=0$, $(x,y)\in S$.
Εάν $\vec{\alpha}\in\mathbb{R}^2$, $\|\vec{\alpha}\|=1$ και $D_{\vec{\alpha}}\varphi(3,-2)=0$ να ευρεθούν τα $\vec{\alpha}$.

11) Υπάρχουν σημεία $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ ώστε η $\vec{F}(x,y)=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\, \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ να αντιστρέφεται τοπικά σε αυτά;
