Όρια, Συνέχεια

$\vec{f}: A\ (\subseteq \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^m\ (d, m \geq 1)$, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$

Ορισμοί

i) Έστω $\vec{a} \in A'$, $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, \vec{a}) > 0$:

αν $\vec{x} \in A$ και $0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$ τότε $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$.

ii) Έστω $\vec{a} \in A \longrightarrow \vec{a}$ μεμονωμένο σημείο

$\vec{a} \in A'$

- $\vec{a} =$ μ.σ. λέμε ότι η $\vec{f}$ είναι συνεχής στο $\vec{a}$
- $\vec{a} \in A'$, λέμε ότι η $\vec{f}$ είναι συνεχής στο $\vec{a} \iff \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$.

$\vec{f}$ συνεχής στο $A \iff \vec{f}$ συνεχής $\forall \vec{a} \in A$.

iii) $\vec{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τ.ω. αν $\vec{x}, \vec{y} \in A$, $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$ τότε $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| < \varepsilon$

Αρχή της Μεταφοράς (ΑΜ)

i) $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \iff$ αν $\vec{x}_n \in A$, $\vec{x}_n \neq \vec{a}$ και $\lim_n \vec{x}_n = \vec{a}$ τότε $\lim_n \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{b}$

ii) $\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{a} \in A \iff$ για κάθε ακολουθία $\vec{x}_n \in A$ με $\lim_n \vec{x}_n = \vec{a}$ τότε $\lim_n \vec{f}(\vec{x}_n) = \vec{f}(\vec{a})$

iii) $\vec{f}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $A \iff$ εάν $\vec{x}_n, \vec{y}_n \in A$ και $\lim_n (\vec{x}_n - \vec{y}_n) = \vec{0}$ τότε $\lim_n (\vec{f}(\vec{x}_n) - \vec{f}(\vec{y}_n)) = \vec{0}$.

(οι αποδείξεις όπως για $d = m = 1$)

Πρόταση

i) $\lim_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \iff \lim_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} f_j(\vec{x}) = b_j$, $j=1,\dots,m$.

ii) $\vec{f}=(f_1, f_2, \dots, f_m)$ συνεχής στο $\vec{\alpha}\in A \iff f_j$ συνεχής στο $\vec{\alpha}$, $j=1,\dots,m$.

iii) $\vec{f}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $A \iff f_j$ ομοιομ. συνεχής στο A, $j=1,2,\dots,m$

(ΑΠΟΔ. όπως για τις συντεταγμένες ακολουθίες μιας ακολουθίας)

Άλγεβρα ορίων/συνέχειας. Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύει ανάλογες ιδιότητες για την (+) <u>και</u> τον <u>βαθμωτό</u> πολλαπλασιασμό, όπως στο $\mathbb{R}$.

<u>Ειδικά</u>, εάν $f: A(\subseteq\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha\in A'$

$f(\vec{x})\neq 0$, $\vec{x}\in A$, $\lim_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} f(\vec{x}) = b \neq 0$.

Τότε $\lim_{\vec{x}\to\vec{\alpha}} \frac{1}{f(\vec{x})} = \frac{1}{b}$

- Επίσης, σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής.

Lip-συνεχής συνάρτηση

$\vec{f}: A(\subseteq\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ είναι L-συνεχής $\iff$

$\exists M>0 : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \leq M \|\vec{x}-\vec{y}\|$, $\vec{x},\vec{y}\in A$.

$\vec{f}$ L-συνεχής $\iff f_j$ L-συνεχής, $j=1,\dots,m$.

Προφανώς, εάν η $\vec{f}$ είναι L-συνεχής $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ $\vec{f}$ ομοιομ. συνεχής.

Γραμμική Συνάρτηση

$\vec{T}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\vec{T} = (T_1,\dots,T_m)$, $T_j: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

Η $\vec{T}$ είναι γραμμική συνάρτηση $\iff \vec{T}(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda\vec{T}(\vec{x}) + \mu\vec{T}(\vec{y})$

$\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^d$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$\vec{T}$ γραμμική $\Longleftrightarrow T_j$ γραμμική, $j=1,2,\dots,m$.

Αντιστοιχία $\vec{T}$ με πίνακα Π

- $d=m=1$ $T(x)=ax$, $x\in\mathbb{R}$

  $a=T(1)$ / $T \longleftrightarrow (a)$ πίνακας $-(1\times 1)$

- $d\geq 2$, $m=1$ / $\vec{x}=x_1\cdot\vec{e}_1+x_2\cdot\vec{e}_2+\dots+x_d\vec{e}_d$

$T:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}$ γραμμική.

$$T(\vec{x})=x_1\cdot T(\vec{e}_1)+\dots+x_d T(\vec{e}_d)=(T(\vec{e}_1),\dots,T(\vec{e}_d))\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}$$

$T\longleftrightarrow (T(\vec{e}_1),T(\vec{e}_2),\dots,T(\vec{e}_d))$ $(1\times d)$-πίνακας

$\exists\, \vec{a}=(T(\vec{e}_1),\dots,T(\vec{e}_d)) : \underline{T(\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{x}}$.

- $\vec{T}(\vec{x})=(T_1(\vec{x}),T_2(\vec{x}),\dots,T_m(\vec{x}))$

$$=(T_1(\vec{e}_1)\cdot x_1+T_1(\vec{e}_2)x_2+\dots+T_1(\vec{e}_d)x_d,\dots,T_m(\vec{e}_1)x_1+\dots+T_m(\vec{e}_d)x_d)$$

$$=\begin{pmatrix}T_1(\vec{e}_1) & T_1(\vec{e}_2) & \dots & T_1(\vec{e}_d)\\ & \vdots & & \\ T_m(\vec{e}_1) & T_m(\vec{e}_2) & \dots & T_m(\vec{e}_d)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_d\end{pmatrix}$$

Π-$(m\times d)$-πίνακας $\vec{T}=\Pi\vec{x}$

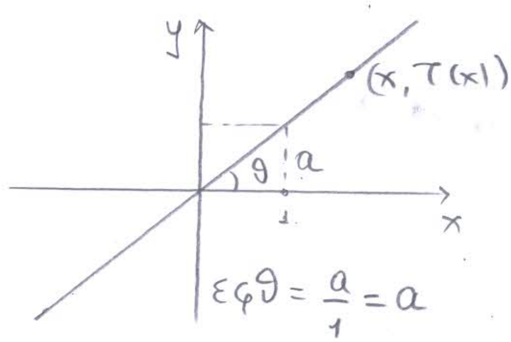
Γεωμετρική Ερμηνεία του Π για ειδικές περιπτώσεις.

$d=m=1$. $T(x)=a\cdot x$

$y=a\cdot x$, $x\in\mathbb{R}$

$a=T(1)$

είναι η κλίση της $y=a\cdot x$

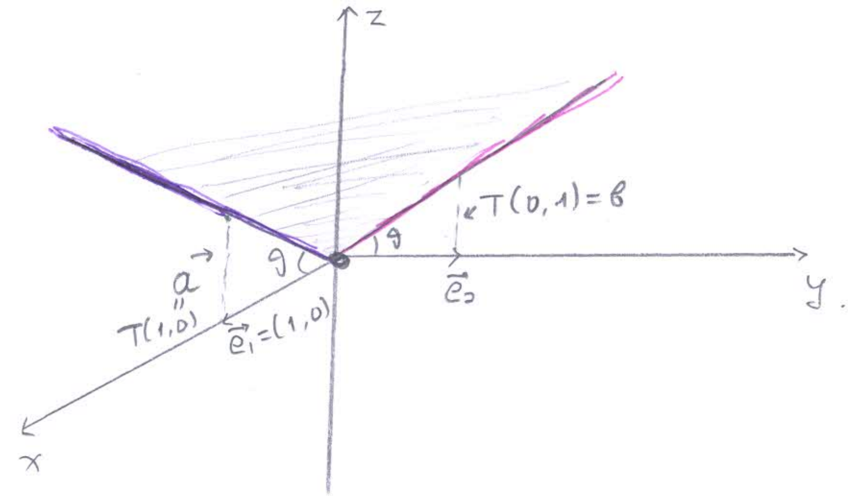


$d=2,\ m=1.$

$T(x,y)=ax+by$

$a=T((1,0))$ | $z=ax+by$

$b=T((0,1))$



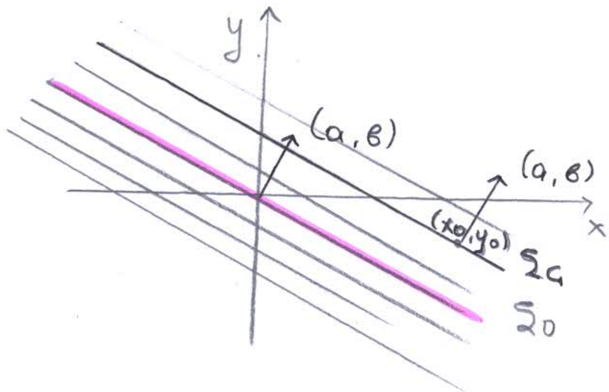
Η τομή του γραφήματος της $z=ax+by$ με το επίπεδο $y=0$, δίνει ευθεία στο $y=0$ με κλίση $\underline{\underline{a}}$ / Ανάλογα με την τομή για $x=0$.

$(a,b)\neq(0,0),\ c\in\mathbb{R}$

$S_c=\{(x,y)\ :\ ax+by=c\}$

$(x_0,y_0)\in S_c$

$(a,b)\perp S_c$



Άσκηση

$\vec{T}=(T_1,\dots,T_m):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ είναι L-συνεχής (γραμμική) (άρα και ομ. συνεχής).

Λύση Αρκεί να το αποδείξουμε για $m=1$.

Έστω $T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ γραμμική $\exists\ \vec{a}\in\mathbb{R}^d : T(\vec{x})=\vec{a}\cdot\vec{x},\ \vec{x}\in\mathbb{R}^d$

$$|T(\vec{x}_1)-T(\vec{x}_2)| \overset{T\ \text{γραμ.}}{=\!=} |T(\vec{x}_1-\vec{x}_2)| = |\vec{a}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)| \overset{C-S}{\leq} \|\vec{a}\|\,\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|$$

Ασκήσεις

1) $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R},\ \varphi(\vec{x})=\|\vec{x}\|$. ΝΔΟ L-συνεχής.

$|\varphi(\vec{x})-\varphi(\vec{y})| = \big|\|\vec{x}\|-\|\vec{y}\|\big| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|$ (τριγωνική ιδιότητα)

2) $pr_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R},\ pr_i(x_1,\dots,x_d)=x_i,\ i=1,\dots,d$ ΝΔΟ L-συνεχής.

Λύση $|pr_i(\vec{x})-pr_i(\vec{y})| = |x_i-y_i| \leq \|\vec{x}-\vec{y}\|$

ή $pr_i(\vec{x})=\vec{e_i}\cdot\vec{x}$ γραμμική $\Longrightarrow$ L-συνεχής (Από προηγούμενη Άσκηση)

3) $\vec{f}(x,y,z) = \left(\eta\mu(e^{x^2}+10+z^5),\ \log(x^4+y^6+1)+\tau o\xi\epsilon\varphi(e^x+z)\right)$

συνεχής στον $\mathbb{R}^3$.

Λύση

$x = pr_1((x,y,z))$ $\qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

$y = pr_2((x,y,z))$ $\qquad \eta\mu(e^{x^2}+10+z^5) = \eta\mu\left(e^{pr_1^2(x,y,z)} + 10 + (pr_3(x,y,z))^5\right)$

$z = pr_3((x,y,z))$ $\qquad$ (... και ούτω καθ' εξής...)

4) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{(x^2+y^2)}, & (x,y)\neq(0,0) \\ a & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Υπάρχει $\underline{a\in\mathbb{R}}$: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχής;

Λύση. $\exists$; $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{(x^2+y^2)}$;

$(x,y)\to(0,0) \iff x^2+y^2\to 0 \iff t = x^2+y^2 \to 0^+$

$\lim\limits_{t\to 0^+} t^t = 1$ Άρα $\lim\limits_{(0,0)} (x^2+y^2)^{(x^2+y^2)} = 1$

Άρα $\underline{a=1}$.

5) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ a, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

;$\exists a\in\mathbb{R}$: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ συνεχής

Λύση $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}$

Α' τρόπος.

$$\left|\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|^2\cdot|y|}{\|(x,y)\|^2} \leq \frac{\|(x,y)\|^2\,\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|^2} = \|(x,y)\| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

Β' τρόπος

$$\left|\frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y| \leq 1\cdot|y| \leq \|(x,y)\| \xrightarrow[(0,0)]{} 0$$

6) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ a & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) η f είναι φραγμένη

ii) $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f(x,y)$

Λύση

i) $$\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}\quad\left(|x|^2-2|x||y|+|y|^2=(|x|-|y|)^2\geq 0\right)$$

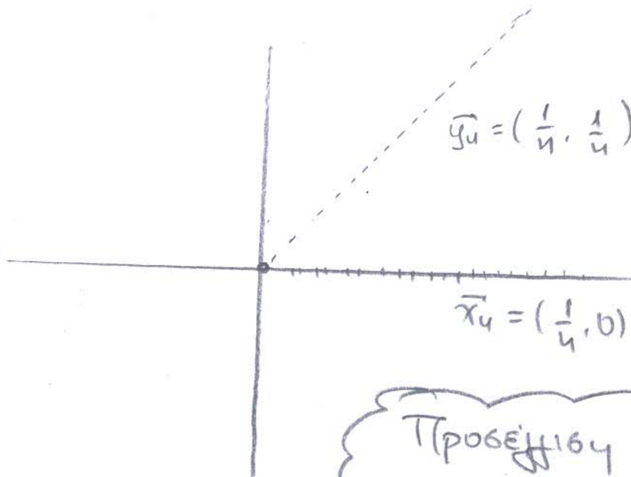
ii) Α' τρόπος

$\vec{x_n}=\left(\frac{1}{n},0\right)\longrightarrow(0,0)$

$f(\vec{x_n})\longrightarrow 0$

$\vec{y_n}=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\longrightarrow(0,0)$

$f(\vec{y_n})=\frac{1}{2}\xrightarrow[n]{}\frac{1}{2}$

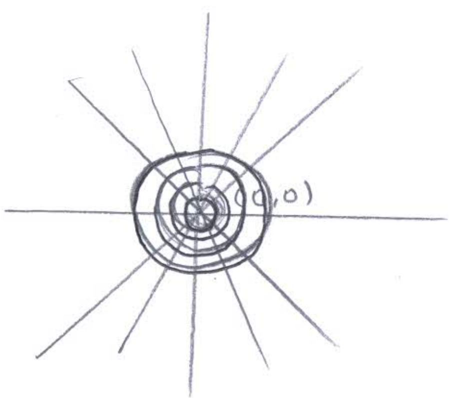


Προσέγγιση με ακολουθίες

Α.Μ. δεν υπάρχει το όριο στο $(0,0)$

Β' τρόπος

Προσέγγιση με ευθείες



$y=\lambda\cdot x\quad(\lambda\in\mathbb{R})$

$$f(x,\lambda x)=\frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2x^2}=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

$x\longrightarrow 0\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,\lambda x)=\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$

για διάφορα λ έχουμε διαφορετικό όριο (εξαρτάται από το λ)

Γ' τρόπος $\begin{cases}x=r\,\text{συν}\theta\\ y=r\,\text{ημ}\theta\end{cases},\ r>0\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\longrightarrow 0$

Προσέγγιση με κύκλους

$f(r\,\text{συν}\theta,\ r\,\text{ημ}\theta)=\text{συν}\theta\cdot\text{ημ}\theta\xrightarrow[r\to 0]{}\text{συν}\theta\cdot\text{ημ}\theta$

για διάφορες τιμές του θ έχουμε διαφορετικά όρια

7) $\lambda \in \mathbb{R}$ η $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^\lambda} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ είναι συνεχής

Λύση

$\lambda \leq 0$ $\lambda = -\mu,\ \mu \geq 0$ $f(x,y) = xy(x^2+y^2)^\mu$ συνεχής.

$0 < \lambda < 1$ $|f(x,y)| = \dfrac{xy}{\|(x,y)\|^{2\lambda}} \leq \dfrac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^{2\lambda}} = \|(x,y)\|^{2(1-\lambda)} \xrightarrow[(0,0)]{} 0$

$0 < \lambda < 1$ συνεχής.

$\lambda = 1$ (Α6.6) δεν υπάρχει το όριο της f στο $(0,0)$, f ασ στο $(0,0)$

$\lambda > 1$ $y = x$ $f(x,x) = \dfrac{x^2}{2^\lambda \cdot x^{2\lambda}} = \dfrac{1}{2^\lambda} \cdot \dfrac{1}{x^{2(\lambda-1)}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$

Άρα δεν υπάρχει το όριο της f στο $(0,0)$, f ασ. στο $(0,0)$

8) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής; και είναι φραγμένη; (από το $\frac{1}{2}$)

$\dfrac{|\alpha| \cdot |\beta|}{\alpha^2 + \beta^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Λύση

Α' τρόπος

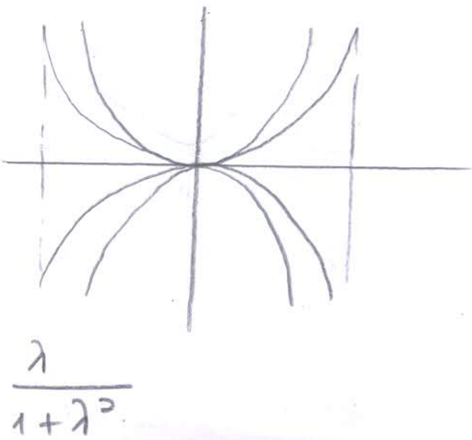
$\vec{x_n} = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \xrightarrow[n]{} (0,0)$, $f(\vec{x_n}) = 0 \xrightarrow[n]{} 0$ Δεν υπάρχει το όριο.

$\neq$

$\vec{y_n} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \to (0,0)$, $f(\vec{y_n}) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n]{} \frac{1}{2}$

Β' τρόπος

$y = \lambda \cdot x^2$



$f(x, \lambda x^2) = \dfrac{\lambda x^4}{x^4 + \lambda^2 x^4}$

$= \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$

Σημαντικές Παρατηρήσεις

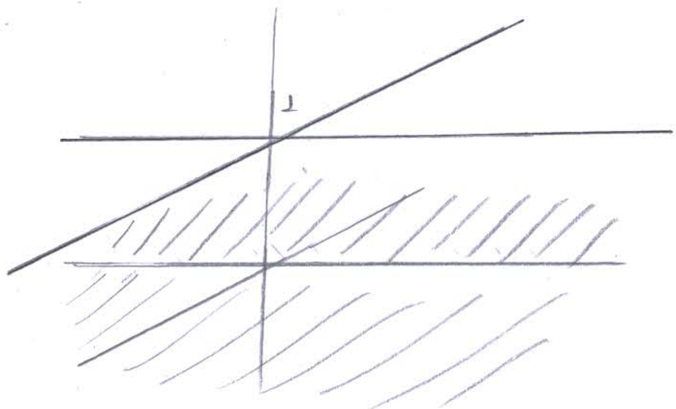
1) Χωριστά συνεχής $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

Εάν η $\begin{matrix} g(x)=f(x,x_0) \\ h(y)=f(x_0,y) \end{matrix}$ είναι συνεχείς $\not\Longrightarrow$ f συνεχής.

πχ. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} g(x)=f(x,0)=0 \\ h(y)=f(0,y)=0 \end{matrix}\right|\ \text{συνεχείς.}$$

$$F(x,y)=\begin{cases} 1 & x\cdot y=0 \\ 0 & x\cdot y\neq 0 \end{cases}$$



2) Διαδοχικά Όρια:

$f:\mathbb{R}^2\setminus\{x_0,y_0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ και $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$

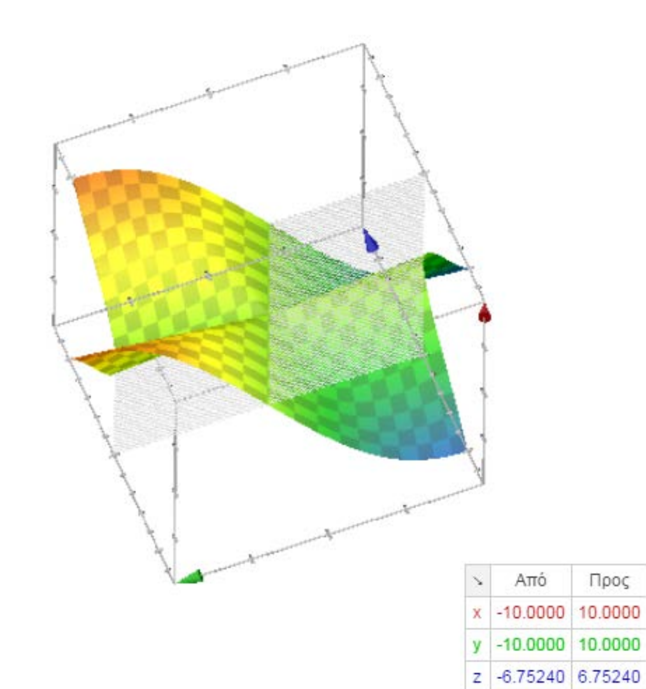
$\not\Longrightarrow \exists \lim\limits_{(x_0,y_0)} f(x,y)$ / πχ. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot y}{x+y} \\ 0 \end{cases}$

3) $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$

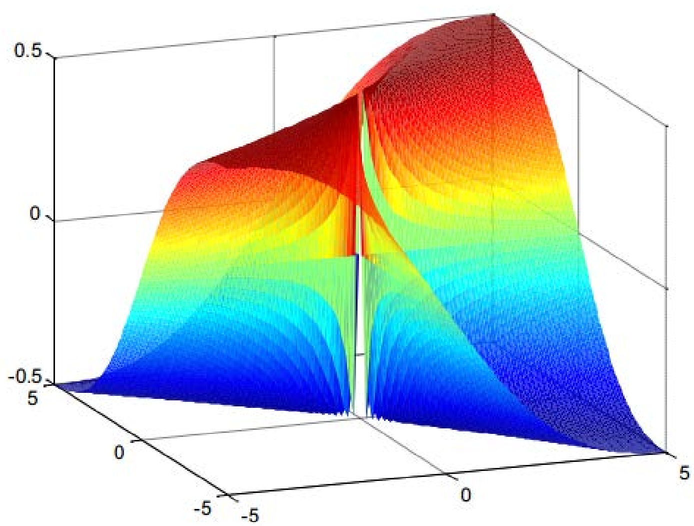
Εάν ο περιορισμός της f σε κάθε ευθεία που περνά από το (x_0,y_0) είναι συνεχής συνάρτηση $\not\Longrightarrow$ f συνεχής στο $(0,0)$.

πχ. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

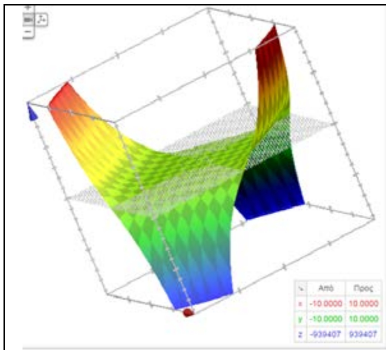
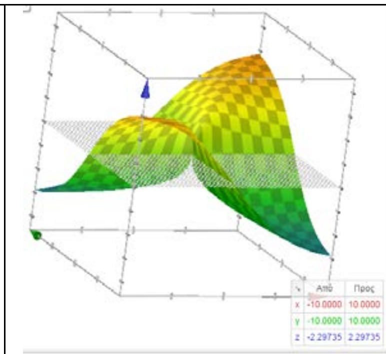
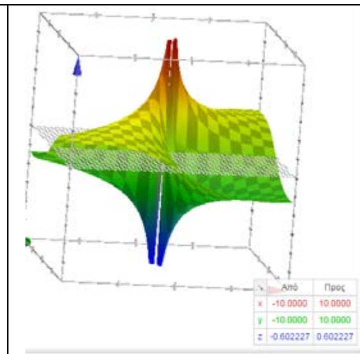
Σχήματα Ασκήσεων



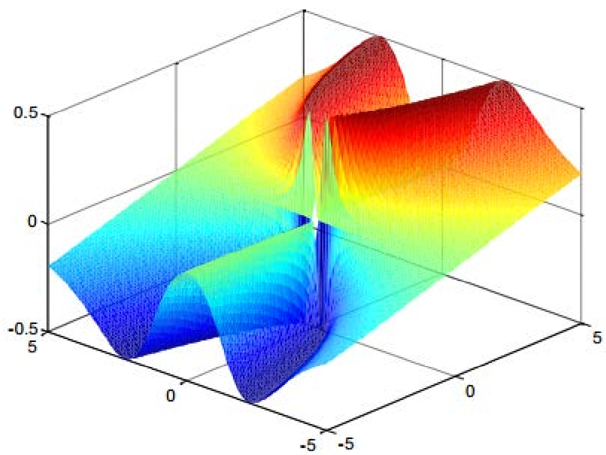
Σχήμα Ασκ. 5



Σχήμα Ασκ. 6

		
λ =-2	λ = 4/5	λ = 5/4

Σχήματα Ασκ. 7 (Για λ = 1 Σχήμα Ασκ. 6)



Σχήμα Ασκ. 8