ΑΠ III 2/03/2015 (Μαθ. 20)

$\mathbb{R}^d$: $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ διαν. χώρος διάστασης d
$(d \in \mathbb{N}, d \geq 1)$

Ευκλείδεια νόρμα: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2}$

(II) Εισαγωγικά : Στοιχεία Τοπολογίας στον $\mathbb{R}^d$
Σύνολα μεταξύ ευκλείδιου χώρου, Σύνολα στάθμης
Καμπύλες, Επιφάνειες (γενικά)

Στοιχεία τοπολογίας, Ακολουθίες, ∂ B-W, Συμπάγεια

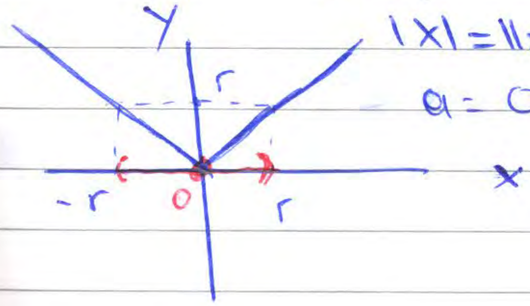
ΟΡΙΣΜΟΙ:

- $S(\vec{a}, r)$: ανοικτή σφαίρα κέντρου $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$, ακτίνας $r (r>0)$
  $S(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r \}$

- $B(\vec{a}, r)$: κλειστή σφαίρα κέντρου $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$, ακτίνας $r (r \geq 0)$
  $B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r \}$

Γεωμετρική αναπαράσταση των σφαιρών για $d = 1, 2, 3$.

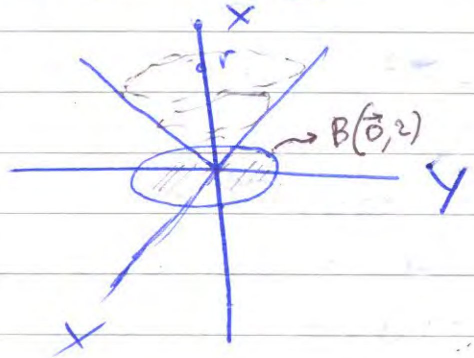
Για $d = 1$: $S(a, r) = (a-r, a+r)$
$B(a, r) = [a-r, a+r]$



$|x| = \|x\|$
$a = 0$

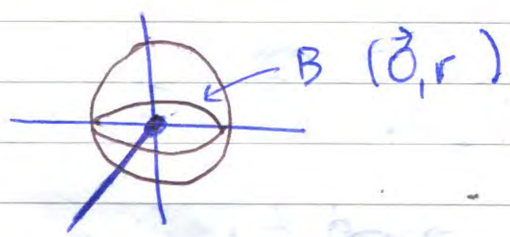
· Για $d=2$ $\vec{a}=(a,0)$

$\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$



· Για $d=3$

$\|(x,y,z)\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le r$



ΟΡΙΣΜΟΙ

$A\subseteq\mathbb{R}^d$, $B\subseteq\mathbb{R}^d$, $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^d$

· A είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^d \iff \forall \vec{a}\in A\ \exists S(\vec{a},r)\subseteq A$.

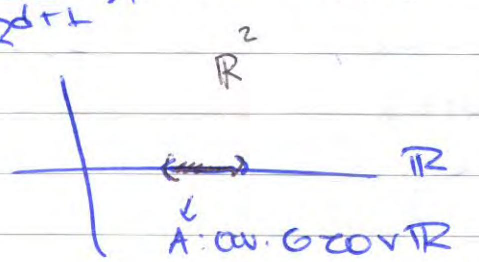
· B είναι κλειστό $\iff \mathbb{R}\setminus B$ ανοικτό

· Γ είναι φραγμένο $\iff \exists M>0 : \|\vec{x}\|\le M,\ \vec{x}\in\Gamma$

$\iff \exists M>0\ \ \Gamma\subseteq B(\vec{0},M)$.

Σημείωση: Αν $A\subseteq\mathbb{R}^d$: ανοικτό στον $\mathbb{R}^d \not\Rightarrow$ A: ανοικτό στον $\mathbb{R}^{d+1}$ (γενικά)

π.χ.



A. όχι αν. ως ευθεία στον $\mathbb{R}^2$

ΟΡΙΣΜΟΙ: Παίρνουμε $A \subseteq \mathbb{R}^d$

1) $a \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του $A \iff \exists\, S(\vec{a}, r) \subseteq A$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του A συμβολίζεται με A° εσωτερικό του συνόλου.

2) $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$. $\vec{x}_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του A $\iff \forall \varepsilon > 0 \ (S(\vec{x}_0, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}_0\}) \cap A \neq \emptyset$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης το συμβολίζουμε με A'

• Αν $\vec{a}_0 \in A$ ή $\vec{a}_0 \notin A'$ το $\vec{a}_0$ καλείται μεμονωμένο σημείο.

Το $\mathbb{R}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία, το $\mathbb{Q}$. Το $\mathbb{Q}$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία αφού $\forall q \in \mathbb{Q}$ $\exists (q-\varepsilon, q+\varepsilon)$ που μέσα του $\exists\, q' \neq q$.

3) $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο επαφής του $A \iff \forall \varepsilon > 0 \ S(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Το σύνολο των σημείων επαφής συμβολίζεται $\bar{A} = A' \cup A$

4) Το $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ είναι συνοριακό σημείο του $A \iff$
$\forall \varepsilon > 0$ $S(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
$S(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^d \setminus A) \neq \emptyset$

Το σύνολο των συνοριακών σημείων συμβολίζεται με
$\partial A = \mathrm{bd}\, A = \bar{A} \cap (\mathbb{R}^d \setminus A)$

Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^d$

Θεωρούμε $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d$

$f(n) = \vec{a}(n) = \vec{a}_n \in \mathbb{R}^d$, $n = 1, 2, \dots$ Κάθε 2ε 2010α

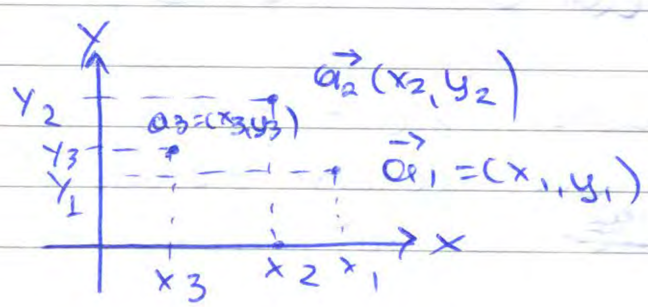
f ονομάζεται ακολουθία.

$\vec{a}_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^d)$

$\vec{n} = (a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{d,n})$

$(a_n^i)_{n=1}^{\infty}$ $i = 1, 2, \dots, d$ i-στη ακολουθία της $(\vec{a}_n)_n$

Πχ



~~[illegible]~~

Υπακολουθίες

$(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$. $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ γνήσια αύξουσα

$1 \to \phi(1) = k_1 \to (\vec{a}_{k_1})$

$2 \to \phi(2) = k_2 \to \vec{a}_{k_2}$ ....

$k_\nu \geq \nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ $k_1 < k_2 < k_3 \ldots$

$(\vec{a}_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ υπακ. της $(\vec{a}_n)_{n=1}^{\infty}$.

Σύγκλιση ακολουθιών.

$(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^d$. $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a}$ $(\vec{a}_n \to \vec{a}) \iff$

$\lim\limits_{n\to\infty} \|\vec{a}_n - \vec{a}\| = 0 \iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|a_n - a\| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \iff$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \vec{a}_n \in S(\vec{a}, \varepsilon) \ \forall n \geq n_0$

Πρόταση: $\vec{a}_n = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d) \in \mathbb{R}^d$ ~~[illegible]~~ και
$\vec{a} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^d$.

Τα εξής είναι ισοδύναμα: i) $\lim\limits_n \vec{a}_n \Rightarrow \vec{a}$

ii) $\lim\limits_n a_n^j \Rightarrow b_j$ για $j = 1, 2, \ldots$

αποδ

i) $\to$ ii) $|a_n^j - b^j| \leq \|\vec{a}_n - \vec{a}\| \to 0$. Άρα $a_n^j \to b^j$ γι[α] $j = 1, 2, \ldots, d$.

ii) $\to$ i) $\|\vec{a}_n - \vec{a}\| = \left[(a_n^1 - b^1)^2 + \ldots + (a_n^d - b^d)^2\right]^{1/2} \to 0$

Σημείωση: Ισχύουν οι ιδιότητες για τις πράξεις στον $\mathbb{R}^d$, ανάλογα με τις ιδιότητες των πράξεων για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$. / Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε συγκλ. ακολουθία στον $\mathbb{R}^d$ είναι φραγμένη

ΠΡΟΣΟΧΗ: Σε παραγώγιση δεν βάζουμε πάνω διάνυσμα, γιατί δεν έχει φυσικό

Παραδείγματα

1) $\vec{a}_n = \left(\sqrt[n]{n}, \frac{n}{2n+1}, n^2 \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) \to \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$

2) $\vec{a}_n = (n^2, \sqrt[n]{2})$ δεν συγκλίνει (λόγω του $n^2 \to +\infty$)

Ασκήσεις / Προτάσεις

1) $S(\vec{a}, r)$ $(r>0)$ είναι ανοικτό σύνολο.

2) B κλειστό $\iff$ για $\vec{b}_n \in B$ και $\lim_n \vec{b}_n = \vec{b} \in \mathbb{R}^d$ έχουμε ότι $\vec{b} \in B$

3) $\vec{x}_0 \in B' \iff \exists\, \vec{b}_n \in B$ με $\vec{b}_n \neq \vec{x}_0$ τ.ω. $\vec{b}_n \to \vec{x}_0$

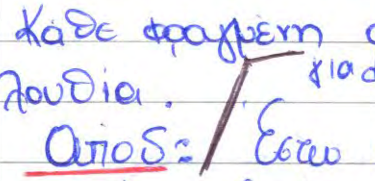
4) B: κλειστό $\iff B' \subseteq B \iff B = \overline{B}$

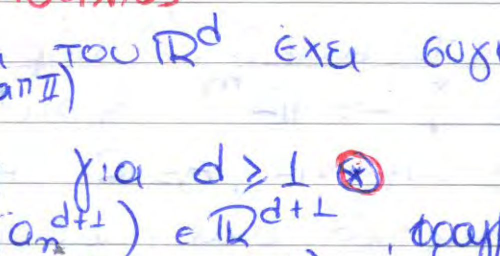
5) $B(\vec{a}, r)$ κλειστό (φραγμένο) σύνολο

$\overline{S}(\vec{a}, r) = B(\vec{a}, r)$, $(r>0)$

6) $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, (όπου $a_i \leq b_i$).

ορθογώνιο. Είναι κλειστό σύνολο.





ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO-WEIERSTRASS

Κάθε φραγμένη ακολουθία του $\mathbb{R}^d$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

για $d=1$ ισχύει (απ Ι)

Αποδ: Έστω ότι ισχύει για $d \geq 1$ (*)

$\vec{a}_n = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^d, a_n^{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$, φραγμένη.

Η $\vec{a}_n$ γράφεται: $(\vec{b}_n, a_n^{d+1})$, $\vec{b}_n \in \mathbb{R}^d$ φραγμένη.

Από (*) $\exists\, \vec{b}_{k_n} \to \vec{b} \in \mathbb{R}^d$.

$(a_{k_n}^{d+1})$ η φραγμ. $\xrightarrow{d=1} \exists\, a_{k_{N_n}} \to \alpha \in \mathbb{R}$

Άρα $\vec{a}_{k_{N_n}} = (\vec{b}_{k_{N_n}}, a_{k_{N_n}}) \to (\vec{b}, a) \in \mathbb{R}^{d+1}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $K \subset \mathbb{R}^d$ συμπαγές $\iff$ για κάθε ακολουθία $(\vec{a}_n)$ του K υπάρχει $(\vec{a}_{k_n})_n$ υπακολ. του $\vec{a}_{k_n} \to \vec{a} \in K$.

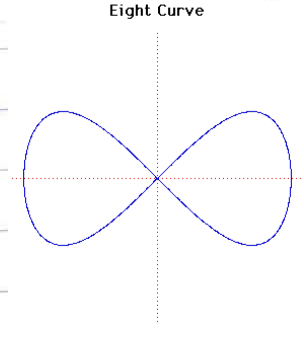
ΘΕΩΡΗΜΑ: $K \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ K: κλειστό κ' φραγμένο.

αποδ. Έστω $\vec{b}_n \in K$, $\lim \vec{b}_n = \vec{b} \in \mathbb{R}^d$.
K = συμπαγές $\Rightarrow$ $\exists \lim b_{k_n} = \vec{a} \in K$.
Άρα $\vec{b} = \vec{a} \in K$, K: κλειστό. (1)
Έστω ότι το K: δεν είναι φραγμένο.
$n \in \mathbb{N}$ $\exists\, \vec{a}_n \in K : \|\vec{a}_n\| \geq n$.
K: συμπαγές $\exists \lim \vec{a}_{k_n} = a \in K$. Άρα $\vec{a}_{k_n}$ φραγμένη (ως συγκλίνουσα). Άρα $\exists\, M>0$ $\|\vec{a}_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$ (2)
($M \in \mathbb{R}$)
από (1) κ (2) $n \leq k_n \leq \|a_{k_n}\| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ άτοπο

($\Leftarrow$) K: κλειστό κ' φραγμένο. Έστω $(\vec{a}_n)_n$, $\vec{a}_n \in K$
K = φραγμένο $\Rightarrow (\vec{a}_n)_n$ φραγ. ακολ. $\xrightarrow{B-W}$ $\exists (\vec{a}_{k_n})_n$ υπακ. : $\vec{a}_{k_n} \to \vec{a} \in \mathbb{R}^d$
K = κλειστό, $\vec{a}_{k_n} \in K$, $\vec{a}_{k_n} \to \vec{a}$ άρα $\vec{a} \in K$.
Τελικά K = συμπαγές.

ΑΣΚΗΣΗ (Θέμα 2013)
$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots$ όπου F_n είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$

• Συναρτήσεις μεταξύ ευκλείδιων χώρων:
$\vec{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.
• $n=1, m=1$ $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$. Η f ονομαζ. πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής.
$\mathbb{R} \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}$.
• $n=1, m \geq 2$ $\vec{r} : A(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^m$
$\underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{t}} \xrightarrow{\vec{r}} \vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_m(t))$



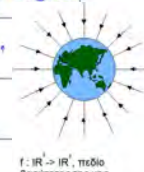
Για $m=3$ $(n=1)$: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Ονομάζεται διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής.

· $n, m \geq 2$ $\vec{f} : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

Εδώ η f ονομάζεται διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών ή διανυσματικό πεδίο.

($f_i : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$



f : IR³ -> IR³, πεδίο βαρύτητος της γης

(*) · $n \geq 2$, $m = 1$. $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \to f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

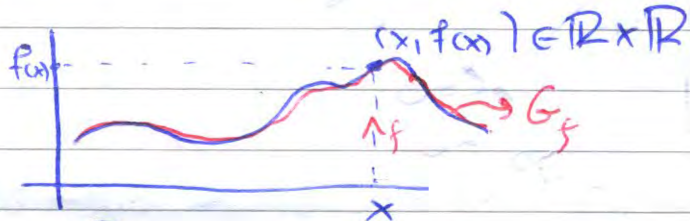
Ονομ. πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών ή βαθμωτό πεδίο

Ένα απλό π.χ. τέτοιας συνάρτησης
Είναι ο υπολ. του βαθμού πτυχίου
$(x_1, x_2, \dots, x_{36}) = \dots =$ βαθμός πτυχίου $= f(x_1, x_2, \dots, x_{36})$

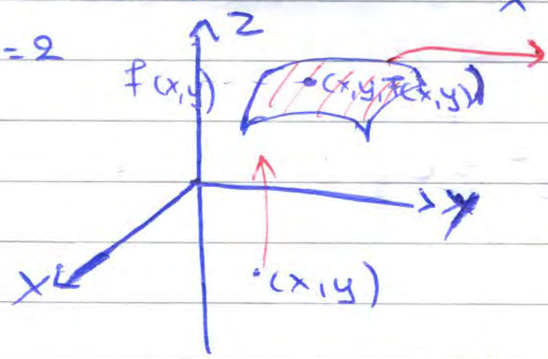
Γράφημα $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$$G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x})) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

π.χ. για $n = 1$



για $n = 2$



n=3
f(x,y,t) = χρώμα , Οι άνεμοι στον πλανήτη Δία (Σ.Υ 1)

Σύνολα στάθμης: $f : A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$.

$c \in \mathbb{R}$ $\Sigma_c = \{\vec{x} \in A : f(\vec{x}) = c\}$ είναι το σύνολο στάθμης της συνάρτησης f.

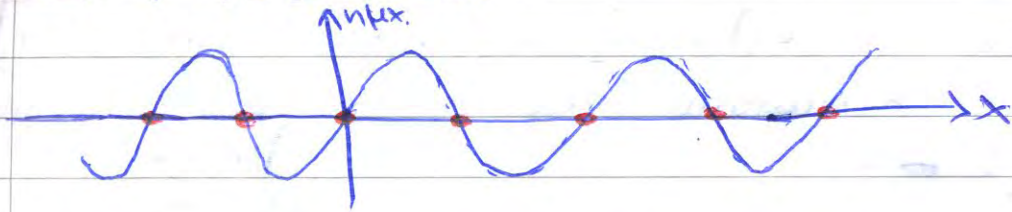
π.χ.

1) για $n=1$. $f(x)=ημx$, $x\in\mathbb{R}$

το $Σ_c=\{x: ημx=c\}$.

· αν $|c|>1$ τότε $Σ_c=\emptyset$

αν $|c|\le 1$ τότε:



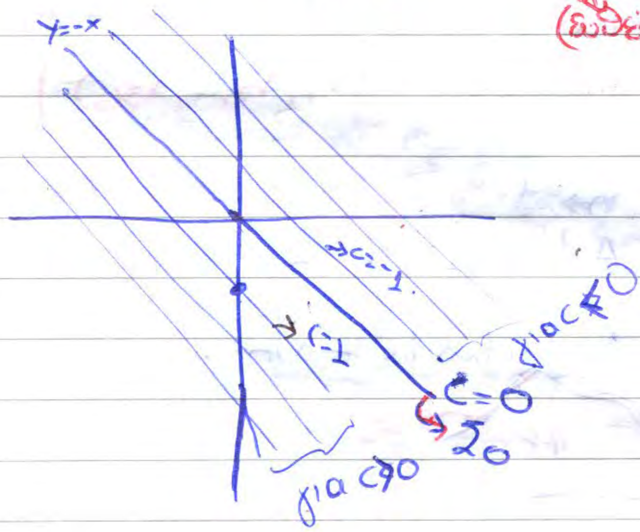
αν π.χ. $c=0$ $Σ_0=\{κπ : κ\in\mathbb{Z}\}$

(όλα τα σημεία x όπου $ημx=0$)

2) για $n=2$ $f(x,y)=-x-y$.

$Σ_c=\{(x,y) : -x-y=c\}$

(ευθεία)



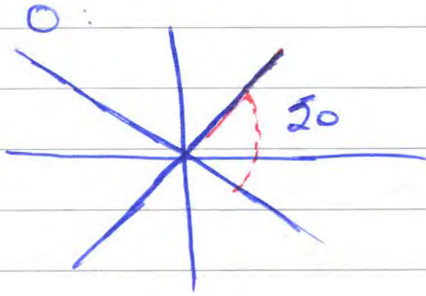
π.χ. για $c=1$: $y=-x-1$.

για $c=-1$ $y=-x+1$

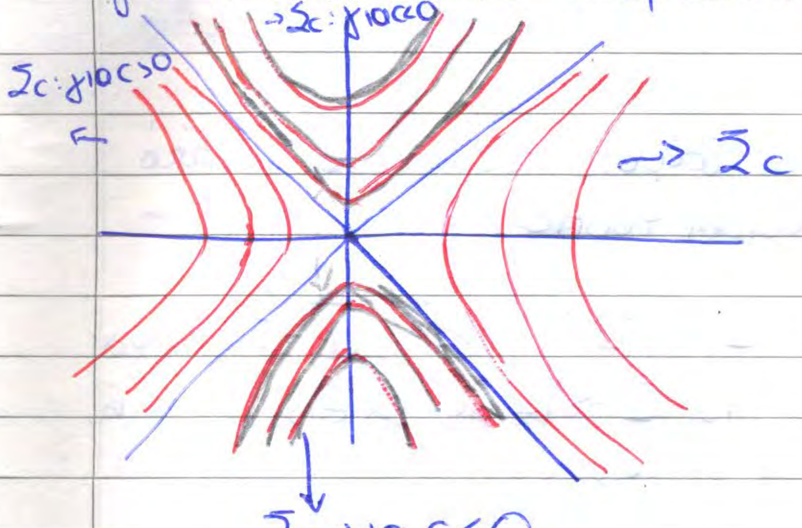
3) $f(x,y)=x^2-y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$Σ_c=\{(x,y) : x^2-y^2=c\}$

· $c=0$:



για $c \neq 0$ έχουμε υπερβολές



4) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- $c<0$: $\Sigma_c = \emptyset$
- $c=0$ $\Sigma_c = \{(0,0,0)\}$
- $c>0$ $\Sigma_c = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} = c\}$

Το εξωτερικό αυτής της σφαίρας είναι το Σ_c.

Συνεχής συνάρτηση: $\vec{f} : A (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$

$\vec{a} \in A$: $\vec{f}$ συνεχής στο $\vec{a} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon, \vec{a}) > 0$: $\| f(\vec{x}) - f(\vec{a}) \| < \varepsilon$ για $\| \vec{x} - \vec{a} \| < \delta$, $\vec{x} \in A$.

$\vec{f}$: συνεχής στο $\vec{a} \iff f_1, f_2, \dots, f_m$ συνεχείς στο $\vec{a}$.