

[07] Δίδεται το σύστημα  $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k$ ,  $\underline{y}_k = C \underline{x}_k$ , όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 1 \ 0].$$

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του  $A$  που είναι ή εδύζιτες / ή μη πραγματικές.

(β) Να υπολογισθεί:  $\{ \underline{y}_k : k \geq 0 \}$  αν  $\underline{x}(0) = \underline{0}$  και  $\underline{u}_j = 1, j \neq 0$   
 $= 0 \quad j = 0$

(α)  $P(\lambda) =: [\lambda I - A \mid B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1/2 & 1 \end{array} \right]$

$$\text{Rank}[P(\lambda)] < 3 \Leftrightarrow \lambda = -1/2.$$

$$Q(\lambda) = \left[ \begin{array}{ccc|c} \lambda I - A & & & \\ \hline & & & C \\ \hline \lambda-1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda+1/2 & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda+1/2 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & \end{array} \right]$$

$$\text{Rank}[Q(\lambda)] < 3 \Leftrightarrow \lambda = -1/2$$

(β)  $\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B \underline{u}_j = CA^{k-1} B =$

$$= [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$