[Θ4] Έστω η εξίσωση διαφορών : $x_{k+1} = 2x_k - x_k^2$

(α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας

(β) Να χαρακτηριστούν οι ιδιότητες ευστάθειας κάθε σημείου ισορροπίας.

(γ) Δείξτε ότι:

(i) Αν $x_0 = 2$ ή $x_0 = 0$, τότε $x_k = 0 \ \forall k \geq 1$

(ii) Αν $x_0 > 2$ τότε $x_{k+1} < x_k < 0 \ \forall k \geq 1$

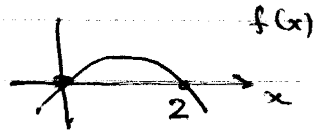
(iii) Αν $x_0 \in (0,2)$ τότε $x_k \in (0,1) \ \forall k \geq 1$ και $\lim_{k\to\infty} x_k = 1$

(α) Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x = 2x - x^2$
$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$ ή $\underline{x = 1}$.

(β) $f(x) = 2x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - 2x$. Επομένως $f'(0) = 2$
(0 ασταθές σ.ι.), $f'(1) = 0$ (1 ευσταθές σ.ι., δηλ. τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές).

(γ) Αν $x_0 = 2$, τότε $x_1 = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0$ (σημείο ισορροπίας) και επομένως $x_k = 0 \ \forall k \geq 2$. Αν $x_0 = 0$ τότε $x_k = 0 \ \forall k \geq 1$ εφόσον 0 είναι σ.ι.

$x_{k+1} = 2x_k - x_k^2 < x_k \Leftrightarrow x_k^2 - x_k > 0 \Leftrightarrow x_k(x_k - 1) > 0$
$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} x_k \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.



Αν ~~xxx~~ $x_0 > 2 \Rightarrow x_1 < 0$
$\overset{(*)}{\Rightarrow} x_2 < x_1 < 0$

και γενικά $x_{k+1} < x_k < \dots < x_2 < x_1 < 0$. Επομένως αν $x_0 > 2$ η ακολουθία $(x_k) \to -\infty$ (αν $x_k \to \alpha$ πεπερασμένο τότε θα υπήρχε σημείο ισορροπίας $\alpha > 2$).

Αν $x_0 \in (0,2)$ τότε $x_1 \in (0,1) \Rightarrow x_2 \in (0,1)$ κ.λ.π.
Επομένως ~~αν~~ $x_0 \in (0,2) \Rightarrow x_k \in (0,1) \ \forall k \geq 1$. Από την (*)