Γραμμικές εξισώσεις διαφορών $1^{ης}$ τάξης

(1)

27/2/2024

Εξετάζουμε την εξίσωση διαφορών (με $A\neq 0$)

$$y_{k+1} = A y_k + B \quad , k\in \mathbb{N}_0.$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση για $k=0,1,2,\dots$

$k=0$: $\quad y_1 = A y_0 + B$

$k=1$: $\quad y_2 = A y_1 + B = A(Ay_0+B)+B = A^2 y_0 + AB + B.$

$k=2$: $\quad y_3 = A y_2 + B = A(A^2 y_0 + AB + B) + B$

$$= A^3 y_0 + A^2 B + AB + B.$$

Επαγωγικά:

$$y_k = A^k y_0 + A^{k-1}B + A^{k-2}B + \dots + B$$

$$= A^k y_0 + B(1+A+\dots+A^{k-1}).$$

Έχουμε: $\quad 1+A+A^2+\dots+A^{k-1} = \left.\begin{cases} \dfrac{1-A^k}{1-A} & A\neq 1 \\ k & A=1. \end{cases}\right\}$

Άρα $\quad y_k = \left.\begin{cases} A^k y_0 + \dfrac{1-A^k}{1-A}B & (A\neq 1) \\ \cancel{= A^k y_0 + kB} & \\ = y_0 + kB & (A=1). \end{cases}\right\}$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η εξίσωση $y_{k+1} = 2y_k + 1 \quad , k\in\mathbb{N}_0$

Θέτοντας $A=2$, $B=1$: $\quad y_k = 2^k y_0 + \dfrac{1-2^k}{1-2}\cdot 1$

$$\Rightarrow y_k = 2^k y_0 + (2^k-1) = (y_0+1)2^k - 1.$$

Αν $y_0 = -1 \Rightarrow y_k = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ (σ.ι).

$y_0 \neq -1 \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lim y_k &= +\infty \quad \text{αν } y_0 > -1 \\ &= -\infty \quad \text{αν } y_0 < -1 \end{aligned}\right\}.$

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση $y_{k+1} = 0.5 y_k + 2$. Εδώ

$A = 0.5$, $B = 2$ και

$$y_k = 0.5^k y_0 + \frac{1 - 0.5^k}{1 - 0.5} 2 = 0.5^k y_0 + 4(1 - 0.5^k).$$

$$= (y_0 - 4) 0.5^k + 4$$

Αν $y_0 = 4 \Rightarrow y_k = 4 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ (σ.ι)

$y_0 \neq 4 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} y_k = 4$

Παράδειγμα: $y_{k+1} = -y_k + 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. $(A = -1, B = 1)$

$$y_k = (-1)^k y_0 + \frac{1 - (-1)^k}{1 - (-1)} = (-1)^k y_0 + (1/2)(1 - (-1)^k).$$

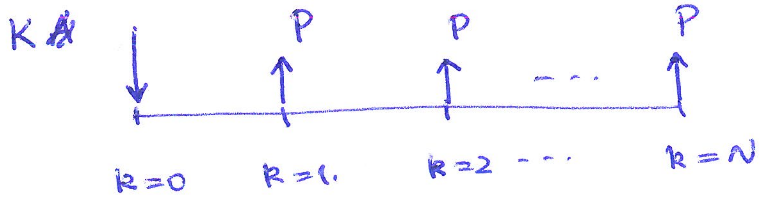
$$\Rightarrow y_k = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)(-1)^k + \frac{1}{2}$$

Αν $y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow y_k = \frac{1}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ (σ.ι).

$y_0 \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (k = 2n)&: \; y_k = y_0 \\ (k = 2n+1)&: \; y_k = 1 - y_0 \end{aligned}\right\}.$

Δηλ η λύση ταλαντώνεται (με σταθερό πλάτος) μεταξύ των τιμών y_0 και $1 - y_0$.

<u>Παράδειγμα</u>: Αν κάποιος πάρει δάνειο $\cancel{A}$ K με επιτόκιο ε την περίοδο που πρέπει να εξοφληθεί σε N ισόποσες δόσεις, πόση είναι η δόση ανά περίοδο;



Αν y_k το ποσό που απομένει μετά από k περιόδους

$$y_{k+1} = y_k + \varepsilon y_k - P \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Συνοριακές συνθήκες $y_0 = K$, $y_N = 0$. Επομένως

$$y_{k+1} = \underbrace{(1+\varepsilon)}_{A} y_k \underbrace{-P}_{B}$$

$$\Rightarrow y_k = A^k y_0 + \frac{1-A^k}{1-A} B =$$

$$= (1+\varepsilon)^k K - \frac{1-(1+\varepsilon)^k}{1-(1+\varepsilon)} P$$

$$= (1+\varepsilon)^k K + \frac{P}{\varepsilon}\left[1-(1+\varepsilon)^k\right].$$

$k = N \Rightarrow y_k = 0$:

$$0 = (1+\varepsilon)^N K + \frac{P}{\varepsilon}\left[1-(1+\varepsilon)^N\right].$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\varepsilon}\left[(1+\varepsilon)^N - 1\right] = K(1+\varepsilon)^N \Rightarrow P = \frac{K\varepsilon(1+\varepsilon)^N}{(1+\varepsilon)^N - 1}.$$

$$\Rightarrow P = \frac{K\varepsilon}{1-(1+\varepsilon)^{-N}}.$$

Σημεία Ισορροπίας / Ευστάθεια

Έστω η εξίσωση διαφορών : $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Ορισμός</u>: Το σημείο α είναι σημείο ισορροπίας αν είναι σταθερό σημείο της f, δηλ. $\alpha = f(\alpha)$.

(Ισοδύναμα αν $y_0 = \alpha \Rightarrow y_k = \alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$).

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $y_{k+1} = A y_k + B$, $A, B \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Αν α είναι σημείο ισορροπίας, τότε

$$\alpha = A\alpha + B \Leftrightarrow (1-A)\alpha = B \Leftrightarrow \alpha = \frac{B}{1-A} \quad , A \neq 1$$

δηλ $\alpha = B/(1-A)$ είναι το μοναδικό σ.ι.

Όταν $A = 1$ η εξίσωση δεν έχει σ.ι. (εκτός αν $B = 0$)

οπότε κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι σ.ι.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω: $y_{k+1} = (y_k + 4) y_k + 2$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Τα σ.ι. είναι οι λύσεις της εξίσωσης:

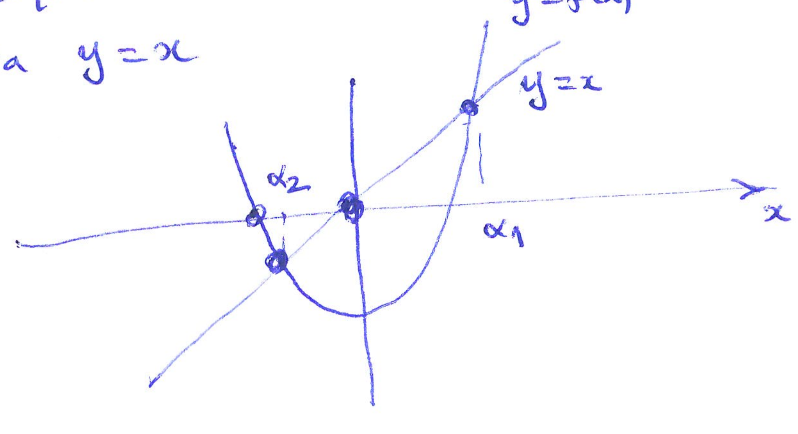
$$\alpha = (\alpha + 4)\alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha+1)(\alpha+2) = 0 \Rightarrow \alpha = -1 \text{ κ } \alpha = -2$$

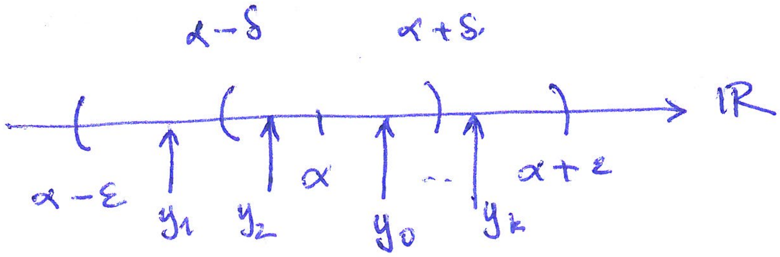
Άρα υπάρχουν δύο σταθερές λύσεις της εξίσωσης,

$y_k = -1$ και $y_k = -2$, $k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Γεωμετρικά τα σ.ι. είναι τα σημεία τομής του γραφήματος της $y = f(x)$ με την ευθεία $y = x$



<u>Ορισμός:</u> Το σ.ι. α είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.



Το α είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν μπορούμε να περιορίσουμε την ακολουθία y_k σε διάστημα κέντρου α και αυθαίρετης ακτίνας $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρής) περιορίζοντας την αρχική τιμή y_0 σε κατάλληλο διάστημα κέντρου α και ακτίνας $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

<u>Ορισμός:</u> Αν ένα σ.ι. α δεν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov), τότε λέγεται ασταθές σ.ι.

<u>Ορισμός:</u> Το σ.ι. α είναι ελκυστής (σημείο έλξης) αν υπάρχει $\eta > 0 : |y_0 - \alpha| < \eta \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_k = \alpha$. Αν $\eta = \infty$, τότε το α είναι ολικός ελκυστής (ολικό σημείο έλξης).

<u>Ορισμός:</u> Το σ.ι. α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ~~ασταθές~~ ευσταθές κατά Lyapunov <u>και</u> σημείο έλξης. Αν $\eta = \infty$ (στον ορισμό του σημείου έλξης) τότε το α είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα: Το σ.ι. $\alpha = \frac{B}{1-A}$ της εξίσωσης διαφορών

$$y_{k+1} = Ay_k + B \quad , A \neq 1, k \in \mathbb{N}_0$$

είναι ολικά ασ. ευσταθές αν $|A|<1$ και έχουμε $\lim_{k\to\infty} y_k = \alpha$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}$. Αν $|A|>1$ το α είναι ασταθές και $\lim_{k\to\infty} |y_k| = \infty$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}, y \neq \alpha$. Τέλος αν $A=-1$, τότε $y_0 = y_2 = y_4 = \dots$ και $y_1 = y_3 = y_5$ και το α είναι ευσταθές κατά Lyapunov.

Απόδειξη: Αν $A \neq 1$ η λύση της εξίσωσης είναι

$$y_k = A^k y_0 + \frac{1-A^k}{1-A} B = A^k\left(y_0 - \frac{B}{1-A}\right) + \frac{B}{1-A}$$

$$\Rightarrow y_k = (y_0 - \alpha) A^k + \alpha.$$

Συνεπώς $y_k - \alpha = (y_0 - \alpha)A^k \Rightarrow |y_k - \alpha| = |A|^k |y_0 - \alpha|$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varepsilon$. Αν $|A|<1$ τότε $|y_0 - \alpha| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |y_k - \alpha| = |A|^k |y_0 - \alpha| \leq |y_0 - \alpha| < \delta = \varepsilon$ και το α είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Επίσης

$$|A|<1 \Rightarrow y_k \to \alpha \quad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

και το α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

Αν $|A|>1$ το α είναι ασταθές σ.ι. Γιατί, αν ήταν ευσταθές κατά Lyapunov, τότε για $\varepsilon=1$ θα υπήρχε $\delta>0$ τ.ω. $\forall y_0: |y_0-\alpha|<\delta \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$

Επομένως, και για το $y_0 = \alpha + \frac{\delta}{2}$ θα είχαμε $|y_k - \alpha| < 1$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Όμως,

$$|y_k-\alpha| = |A|^k\,|y_0-\alpha| = |A|^k\,\frac{\delta}{2} < 1 \qquad \forall k\in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow\ |A|^k < \frac{2}{\delta} \qquad \forall k\in \mathbb{N}_0$$

που είναι αδύνατον καθώς $|A|^k \to \infty$ καθώς ~~$k\to\infty$~~. $|A|>1$.

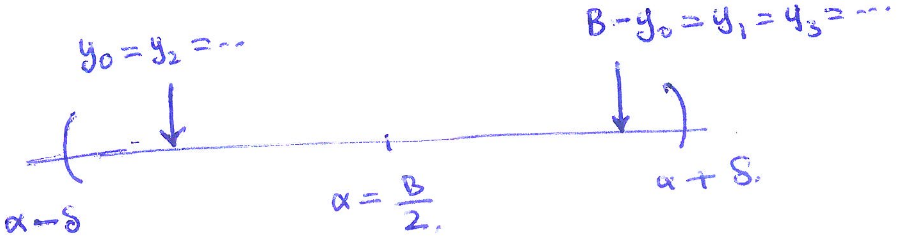
Άρα α είναι ασταθές σ.ι.

Τέλος στην περίπτωση $A=-1$, το σ.ι. α είναι

$$\alpha = -\alpha + B \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{B}{2}$$

Επίσης: $y_{k+2} = -y_{k+1} + B = -(-y_k+B)+B = y_k$

δηλ. $y_0 = y_2 = \dots = y_{2k}$ και $y_1 = y_3 = \dots\, y_{2k+1} = -y_0 + B$.



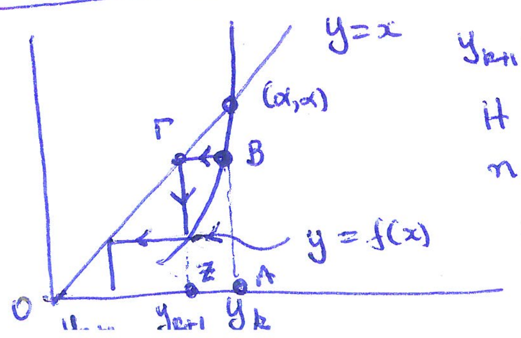
Έστω $\varepsilon>0$ και $\delta=\varepsilon$. Τότε

$$|y_0-\alpha|<\delta \iff |y_0-\alpha|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |y_{2k}-\alpha|<\varepsilon & \forall k\in\mathbb{N}_0 \\ |y_{2k+1}-\alpha|<\varepsilon & \forall k\in\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Επομένως $|y_k-\alpha|<\varepsilon$ $\forall k\in\mathbb{N}_0$ και το σύστημα είναι ευσταθές κατά Lyapunov.

Γεωμετρική-γραφική μέθοδος χαρακτηρισμού σ.ι.



$y_{k+1} = f(y_k) = (AB) = (\Gamma Z) = OZ$

Η ακολουθία συγκλίνει στο (α,α) ή αποκλίνει και το α είναι ευσταθές ή ασταθές, αντίστοιχα.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω α σ.ι. της $y_{k+1}=f(y_k)$, $k\in\mathbb{N}_0$ και έστω ότι η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο α. Τότε

(i) $|f'(\alpha)|<1 \Rightarrow$ Το α είναι ασ. ευσταθές σ.ι.

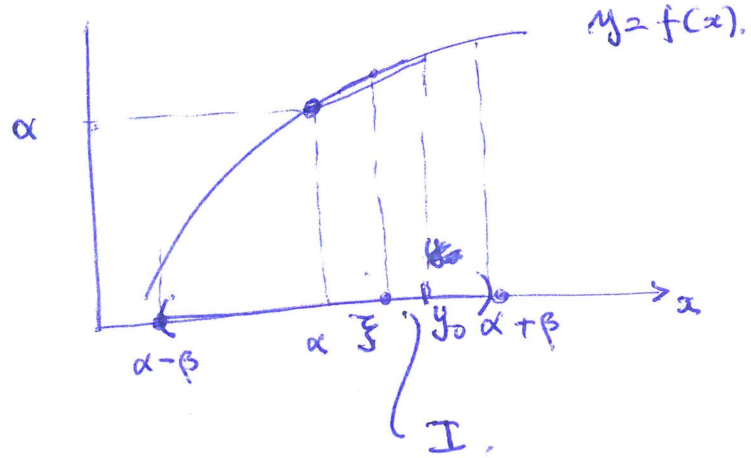
(ii) $|f'(\alpha)|>1 \Rightarrow$ Το α " ασταθές σ.ι.

12/3/24

<u>Απόδειξη</u>:

(i) Έστω ότι $|f'(\alpha)|<M<1$. Λόγω συνέχειας της f' υπάρχει διάστημα $I=(\alpha-\beta,\alpha+\beta)$ τ.ω.

$$|f'(y)|\le M<1 \qquad \forall y\in I.$$



Αν $y_0\in I$, $y_0>\alpha$, τότε $\exists\, \xi\in(\alpha,y_0)$:

$$f(y_0)-f(\alpha)=f'(\xi)(y_0-\alpha)$$

(από το Θεώρημα Μέσης Τιμής). Παρόμοια, αν $y_0\in I, y_0<\alpha$, τότε $\exists\, \xi\in(y_0,\alpha)$ με την ίδια ιδιότητα. Σε κάθε περίπτωση: $\exists\, \xi\in I: f(y_0)-f(\alpha)=f'(\xi)(y_0-\alpha)$ και επομένως:

$$|\underbrace{f(y_0)}_{y_1}-\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}|=\underbrace{|f'(\xi)|}_{\le M}\cdot|y_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow |y_1-\alpha|\le M|y_0-\alpha|<|y_0-\alpha|$$

και επομένως $y_1\in I$. Επαγωγικά,

$$|y_k - \alpha| \leq \underbrace{M^k \overbrace{|y_0-\alpha|}^{<\delta}}_{\leq \varepsilon} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Δοθέντος $\varepsilon>0$, θέτουμε $\delta=\varepsilon$. Τότε αν $|y_0-\alpha|<\delta$,

$$|y_k-\alpha| \leq M^k |y_0-\alpha| < M^k \delta = M^k \varepsilon < \varepsilon \quad (k\geq 1)$$
$$= \varepsilon \quad (k=0)$$

~~και $|y_k-\alpha| \geq \varepsilon$~~

Επομένως, $|y_k-\alpha|<\varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ και το σ.ι. α είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Επιπλέον $\forall y_0 \in I$

$$|y_k-\alpha| \leq M^k |y_0-\alpha| \to 0 \quad \text{καθώς } k\to\infty$$

και το α είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

(ii) Υποθέτουμε ότι $|f'(\alpha)|>1$. Θα δείξουμε ότι το α είναι ασταθές σ.ι. Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists \varepsilon>0$: $\forall y_0$ με $|y_0-\alpha|<\varepsilon$, $y_0\neq\alpha$, $\exists k \in \mathbb{N}$:

$|y_k-\alpha| \geq \varepsilon$.

Αν $|f(\alpha)|>1$, τότε λόγω συνέχειας της f', $\exists$ διάστημα $I_\varepsilon=(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ και σταθερά $M>1$ τ.ω. $|f'(y)| \geq M > 1$ $\forall y \in I_\varepsilon$. Θα δείξουμε ότι $\forall y_0 \in I_\varepsilon, y_0\neq\alpha$, $\exists k\in\mathbb{N}$ για το οποίο $y_k \notin I_\varepsilon$.

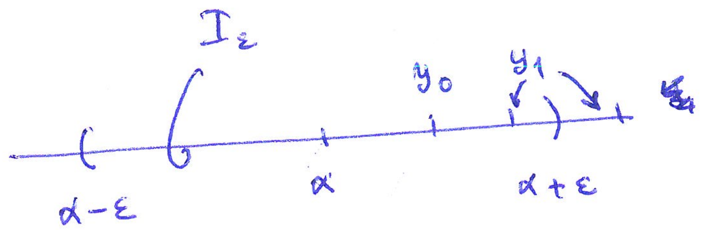
Έστω $y_0 \in I_\varepsilon$, $y_0\neq\alpha$. Από το ΘΜΤ:

$$|f(y_0)-f(\alpha)| = |f'(\xi)|\cdot|y_0-\alpha|$$

για κάποιο $\xi\in(\alpha,y_0)$ ή $\xi\in(y_0,\alpha)$. Επομένως

$$|y_1-\alpha| = \underbrace{|f'(\xi)|}_{\geq M}\cdot|y_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow |y_1-\alpha| \geq M|y_0-\alpha| > |y_0-\alpha|$$



Αν $y_1 \notin I_\varepsilon$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την διαδικασία και έχουμε

$$|y_2-\alpha| \geq M|y_1-\alpha| \geq M^2|y_0-\alpha|$$

Εφόσον $M>1$, $M^i\to\infty$ καθώς $i\to\infty$ και είναι προφανές ότι μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων (έστω k) θα έχουμε $y_i\in I_\varepsilon, i=0,1,\dots,k-1$ και $y_k\notin I_\varepsilon$ □

Παράδειγμα: Έστω η μη-γραμμική εξίσωση $y_{k+1} = 1.5y_k - 0.5y_k^2$. Θέτουμε $y=f(x)=1.5x-0.5x^2$

Η λύση της $x=f(x)$ είναι:

$$x=1.5x-0.5x^2 \Rightarrow 0.5x-0.5x^2=0$$

$$\Rightarrow 0.5x(1-x)=0 \Rightarrow x=0 \text{ ή } x=1$$

Επομένως $\alpha_1=0$, $\alpha_2=1$. Επίσης $f'(x)=1.5-x$ και $f'(\alpha_1)=f'(0)=1.5$ και $f'(\alpha_2)=f'(1)=0.5$

Άρα $\alpha_1=0$ ασταθές σ.ι. και $\alpha_2=1$ ασ. ευσταθές σ.ι.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η εξίσωση διαφορών

$$y_{k+1} = \frac{a\,y_k}{b+y_k} \qquad a>b>0$$

Σημεία ισορροπίας:

$$f(x)=x \iff \frac{ax}{b+x} = x \iff bx+x^2 = ax$$

$$\iff x^2+(b-a)x=0 \Rightarrow x_1=0\ ,\ x_2=a-b$$

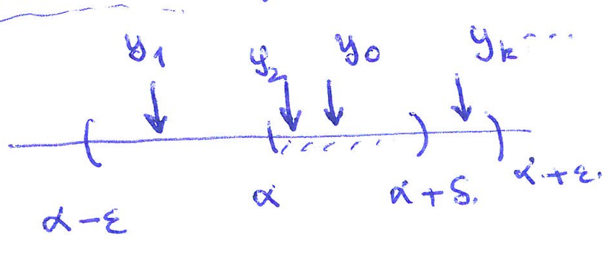
$$f'(x) = \frac{a(b+\cancel{x})-a\cancel{x}}{(b+x)^2} = \frac{ab}{(b+x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x_1)=f'(0)=\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b}>1 \Rightarrow x_1=0 \text{ ασταθές σ.ι.}$$

$$f'(x_2)=f'(a-b)=\frac{ab}{a^2}=\frac{b}{a}<1 \Rightarrow x_2=a-b$$
ασ. ευσταθές

Στην συνέχεια αναλύουμε την περίπτωση $f'(\alpha)=1$.

<u>Ορισμός</u>: Το σ.ι. α της εξίσωσης $y_{k+1}=f(y_k)$, $k\in\mathbb{N}_0$ λέγεται <u>άνω ημιευσταθές</u> αν $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ τ.ω. $y_0\in(\alpha,\alpha+\delta) \Rightarrow |y_k-\alpha|<\varepsilon\ \forall k\in\mathbb{N}_0$. Αν επιπλέον $\exists\eta>0$ τ.ω. $y_0\in(\alpha,\alpha+\eta) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} y_k=\alpha$, τότε το α είναι <u>ασυμπτωτικά</u> άνω ημιευσταθές.



Παρόμοια ορίζουμε "κάτω ημιευστάθεια":

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : y_0 \in (\alpha - \delta, \alpha) \Rightarrow |y_k - \alpha| < \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

και ασυμπτωτική κάτω ημιευστάθεια.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω α σ.ι. της $y_{k+1} = f(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, δηλ. $\alpha = f(\alpha)$. Τότε

(i) Έστω $f \in C^{2k}(\mathbb{R})$. Αν $f'(\alpha)=1$ και $\underbrace{f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k-1)}}_{\text{άρτιος}}(\alpha) = 0$

και $f^{2k}(\alpha) \neq 0$, τότε το α είναι

- Ασυμπτωτικά κάτω ημιευσταθές αν $f^{2k}(\alpha) > 0$
- " άνω " αν $f^{2k}(\alpha) < 0$

(ii) Έστω $f \in C^{2k+1}(\mathbb{R})$. Αν $f'(\alpha) = 1$ και $\underbrace{f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k)}(\alpha)}_{\text{περιττός}} = 0$ και $f^{(2k+1)}(\alpha) \neq 0$,

τότε το α είναι

- Ασυμπτωτικά ευσταθές αν $f^{(2k+1)}(\alpha) < 0$
- Ασταθές αν $f^{(2k+1)}(\alpha) > 0$.

"<u>Απόδειξη</u>": (i) Έστω ότι $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) = \cdots = f^{(2k-1)}(\alpha) = 0$ και $f^{(2k)}(\alpha) > 0$. Από το Θεώρημα Taylor για $\delta > 0$

~~"αρκούντως μικρό"~~

$$f(\alpha+\delta) = \underbrace{f(\alpha)}_{\alpha} + \underbrace{f'(\alpha)}_{1}\delta + \cancel{\frac{f''(\alpha)\delta^2}{2!}} + \cdots \cancel{\frac{f^{2k-1}(\alpha)\delta^{2k-1}}{(2k-1)!}} + \frac{f^{2k}(\xi)\delta^{2k}}{(2k)!}$$

όπου $\xi \in (\alpha, \alpha+\delta)$. Αν επιλέξουμε το δ "αρκούντως μικρό" τότε λόγω συνέχειας της $f^{(2k)}$ έχουμε ότι $f^{(2k)}(\xi) > 0$ και:

$$f(\alpha+\delta) = \alpha + \delta + \underbrace{\frac{f^{(2k)}(\xi)\,\delta^{2k}}{(2k)!}}_{>0}$$

$$\Rightarrow \underline{f(\alpha+\delta) > \alpha+\delta.}$$

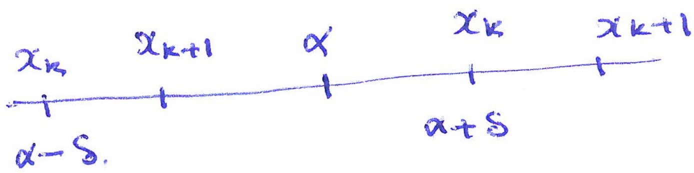
Παρόμοια, για κάποιο $\xi \in (\alpha-\delta, \alpha)$ και $\delta > 0$ αρκούντως μικρό:

$$f(\alpha-\delta) = \alpha - \delta + \underbrace{\frac{f^{(2k)}(\xi)\,\delta^{2k}}{(2k)!}}_{>0}$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha - \delta < f(\alpha-\delta) < \alpha}$$

Άρα: $x_k = \alpha+\delta > \alpha \Rightarrow x_{k+1} > x_k$

$x_k = \alpha-\delta < \alpha \Rightarrow \alpha-\delta < x_{k+1} < \alpha.$



Παρόμοια για (i)β και (ii). ∎

<u>Πόρισμα</u>: (i) Έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$, $\alpha = f(\alpha)$, $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) > 0$. Τότε το α είναι κάτω ημιευσταθές.

(ii) Έστω $\alpha = f(\alpha)$, $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) < 0$. Τότε το α είναι άνω ημιευσταθές.

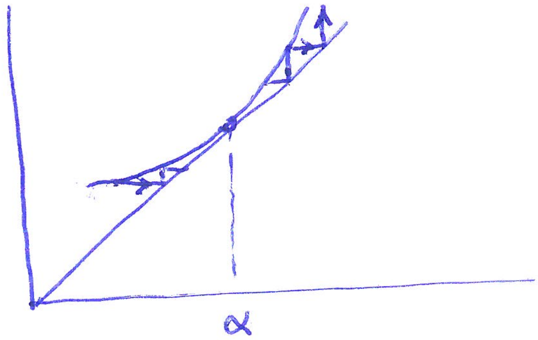
(iii) Έστω $f \in C^3(\mathbb{R})$, $f'(a)=1$, $f''(a)=0$, $f'''(a)<0$

Τότε το α είναι <u>ασυμπτωτικά ευσταθές</u>

(iv) Έστω $f \in C^3(\mathbb{R})$, $f'(a)=1$, $f''(a)=0$, $f'''(a)>0$

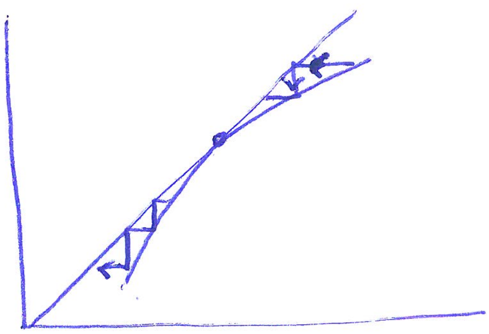
Τότε το α είναι <u>ασταθές</u>.

(i) $\underbrace{\alpha = f(\alpha)}_{}$, $\overset{f'(\alpha)=1}{}$ $f''(\alpha)>0$ (Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω).



Κάτω ημιευσταθές

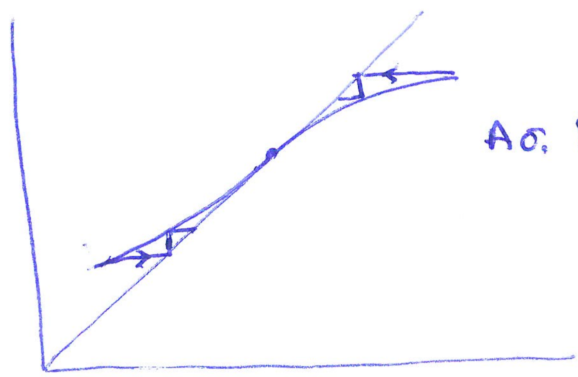
(ii) $\alpha = f(\alpha)$, $f'(\alpha)=1$, $f''(\alpha)<0$ (Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω).



Άνω ημιευσταθές

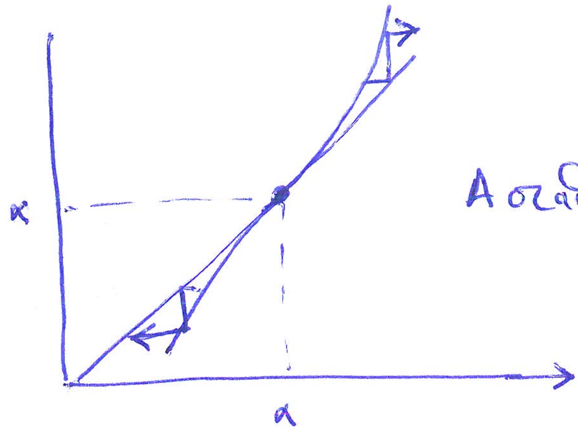
(iii).

$$\left.\begin{aligned} &\alpha=f(\alpha)\\ &f'(\alpha)=1\\ &f''(\alpha)=0\\ &f'''(\alpha)<0 \end{aligned}\right\}$$



Ασ. Ευσταθές

(iv) $\left.\begin{array}{l} f(\alpha)=\alpha \\ f'(\alpha)=1 \\ f''(\alpha)=0 \\ f'''(\alpha)>0 \end{array}\right\}$



Ασταθές

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η ε.δ. $y_{k+1} = y_k - y_k^3$.
Έχουμε $f(x) = x - x^3$ και λύνοντας την εξίσωση
$x = f(x) \Rightarrow x - x^3 = x \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (μοναδικό σ.ι.). Επίσης:

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -6x \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -6 < 0$$

και άρα σ.ι. $\alpha = 0$ είναι ασταθές

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω η εξίσωση διαφορών
$y_{k+1} = y_k^4 - 2y_k^3 + 3y_k - 1$. Έχουμε
$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 1$,
και σημεία ισορροπίας είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$x = f(x) \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 3x - 1 = x$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(x^2+1) - 2x(x^2-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(x^2+1-2x) = 0 \Rightarrow (x^2-1)(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-1)^3 = 0$$

Επομένως έχουμε γιά την συνάρτηση g:

$$g(\alpha)=\alpha\ ,\ g'(\alpha)=1\ ,\ g''(\alpha)=0\ ,\ g'''(\alpha)=2Sf(\alpha)$$

Από το προηγούμενο Θεώρημα (η πόρισμα)

$Sf(\alpha)<0 \Rightarrow \alpha$ ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι

$Sf(\alpha)>0 \Rightarrow \alpha$ ασταθές σ.ι.

(για την g και άρα και γιά την f). □

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η ε.δ. $y_{k+1}=y_k^2+3y_k\ ,\ k\in\mathbb{N}$

Τα σημεία ισορροπίας λύσεις της $f(x)=x$, $f(x)=x^2+3x$, δηλ

$$x^2+3x=x \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow \underline{x=0} \text{ η } \underline{x=-2}$$

$f'(x)=2x+3 \Rightarrow f'(0)=3 \Rightarrow x=0$ ασταθές σ.ι.

$$f'(-2)=-4+3=-1$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Θεώρημα με

$f''(x)=2\ ,\ f'''(x)=0$ έχουμε

$$-2f'''(-2)-3\left[f''(-2)\right]^2=0-3\cdot 2^2=-12<0$$

και συνεπώς το $x=-2$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Επίσης:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3 \Rightarrow f'(-1) = -4-6+3 = -7$$

$\Rightarrow \alpha = -1$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Επίσης

$$f'(1) = 4-6+3 = 1$$

$$f''(x) = 12x^2 - \cancel{6}\,12 \Rightarrow f''(1) = \cancel{12-6=}\ 12-12=0$$

$$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(1) = 24 > 0.$$

και επομένως σ.ι. $\alpha = 1$ είναι επίσης ασταθές.

Παράδειγμα: Έστω $y_{k+1} = y_k^2 + 5y_k + 4$

Έχουμε: $f(x) = x^2 + 5x + 4$ και

$$x = f(x) \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = x \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$$

$\Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$ μοναδικό σ.ι.

Επίσης:

$$f'(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(-2) = -4 + 5 = 1.$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

και $\alpha = -2$ είναι ασ. κάτω ημιασταθές.

Θεώρημα: Έστω α σ.ι. της $y_{k+1} = f(y_k)$ καί $f'(\alpha) = -1$.

Έστω ότι: $Sf(x) = \dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2$ (παράγωγος Schwartz). ~~Έστω επίσης~~ Τότε:

(i) $Sf(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha$ ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

(ii) $Sf(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha$ ασταθές σ.ι.

Απόδειξη: Έστω $g = f \circ f := f^2$ και έστω η εξίσωση διαφορών $y_{k+1} = g(y_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε ισχύουν

- $\alpha = f(\alpha) \Rightarrow \alpha = g(\alpha)$ $(g(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha)$.

- α ασ. ευσταθές σ.ι. γιά την $y_{k+1} = g(y_k) = f(f(y_k))$

$\Rightarrow \alpha$ " " " " $y_{k+1} = f(y_k)$ (άσκηση!)

Έχουμε: $Sf(\alpha) = \dfrac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} - \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right]^2$

$$\Rightarrow Sf(\alpha) = -f'''(\alpha) - \frac{3}{2}\left[f''(\alpha)\right]^2$$

Επίσης:

$$g'(x) = \left[f(f(x))\right]' = f'(x)\, f'(f(x))$$

$$\Rightarrow g'(\alpha) = f'(\alpha)\, f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}) = \left[f'(\alpha)\right]^2 = (-1)^2 = 1$$

Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο πόρισμα γιά την συνάρτηση g.

Έχουμε:

$$g''(x) = \left[f'(x)\, f'(f(x))\right]' =$$

$$= f''(x)\, f'(f(x)) + f'(x)\, f'(x)\, f''(f(x))$$

$$\Rightarrow g''(\alpha) = f''(\alpha)\, \underbrace{f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})}_{-1} + \underbrace{\left[f'(\alpha)\right]^2}_{(-1)^2} f''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})$$

$$\Rightarrow g''(\alpha) = -f''(\alpha) + f''(\alpha) = 0$$

Επίσης:

$$g'''(x) = \left[f''(x)\, f'(f(x)) + \left[f'(x)\right]^2 f''(f(x))\right]'$$

$$= f'''(x)\, f'(f(x)) + f''(x)\, f'(x)\, f''(f(x)) +$$

$$+ 2 f'(x)\, f''(x)\, f''(f(x)) +$$

$$+ \left[f'(x)\right]^2 f'(x)\, f'''(f(x))$$

$$\Rightarrow g'''(\alpha) = f'''(\alpha)\, \underbrace{f'(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})}_{-1} + f''(\alpha)\, \underbrace{f'(\alpha)}_{-1}\, f''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha})$$

$$+ 2 \underbrace{f'(\alpha)}_{-1}\, f''(\alpha)\, f''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha}) + \underbrace{\left[f'(\alpha)\right]^2}_{(-1)^2}\, \underbrace{f'(\alpha)}_{-1}\, f'''(\underbrace{f(\alpha)}_{\alpha.})$$

$$\Rightarrow g'''(\alpha) = -f'''(\alpha) - (f''(\alpha))^2 - 2(f''(\alpha))^2 - f'''(\alpha)$$

$$\Rightarrow g'''(\alpha) = -2f'''(\alpha) - 3(f''(\alpha))^2 = 2\, S f(\alpha)$$

Μετασχηματισμός Ζ

Αν $(y_k): \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε

$$\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots \quad (*)$$

(μονόπλευρος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$).

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι το σύνολο των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία η δυναμοσειρά $(*)$ συγκλίνει. Συνήθως χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκλισης λόγου:

<u>Πρόταση:</u> Έστω ότι $R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right|$. Τότε η συνάρτηση $\hat{y}(z)$ έχει περιοχή σύγκλισης που περιέχει το $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$.

<u>Απόδειξη:</u> Από το κριτήριο λόγου η σειρά συγκλίνει αν (γιά $z \neq 0$):

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{y_{k+1} z^{-(k+1)}}{y_k z^{-k}} \right| < 1 \iff \frac{1}{|z|} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| < 1$$

$$\iff \frac{R}{|z|} < 1 \iff |z| > R$$

<u>Πρόταση:</u> Έστω (y_k) εκθετικά φραγμένη (δηλ. έστω ότι $\exists\, \alpha > 0, M > 0 : |y_k| \le M\alpha^k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$). Τότε η $\hat{y}(z)$ είναι καλά ορισμένη και έχει περιοχή σύγκλισης που περιέχει το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \alpha\}$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω ότι $|y_k| \le M\alpha^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε γιά κάθε $z : |z| > \alpha$,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|y_k|}{|z|^k} \le M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{|z|^k}$$

Έστω $\beta = \dfrac{\alpha}{|z|} < 1$. Τότε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}\right| \le M\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k = \frac{M}{1-\beta} < \infty$$

Μετασχηματισμός Z τυπικών ακολουθιών

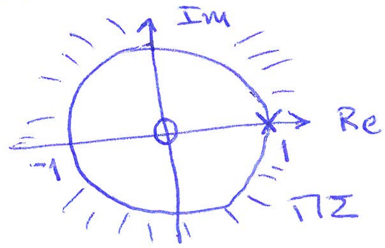
(1) $\left.\begin{aligned} \delta_k &= 1, \quad k=0 \\ &= 0, \quad k\neq 0 \end{aligned}\right\}$ Συνάρτηση "κρούσης"

$\mathcal{Z}\{\delta_k\} = 1$, Περιοχή σύγκλισης $= \mathbb{C}$

(2) $u_k = 1$, $k \ge 0$ (Βηματική συνάρτηση)

$$\mathcal{Z}\{u_k\} = \hat{u}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Περιοχή σύγκλισης $|z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$. Η συνάρτηση $\hat{u}(z)$ έχει πόλο πολλαπλότητας 1 στό $z=1$ και μηδενικό πολλαπλότητας 1 στό $z=0$.



(3) $y_k = k$ $(k \ge 0)$.

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \dots = z^{-1}(1 + 2z^{-1} + \dots)$$

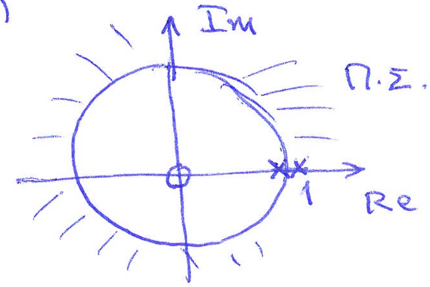
Έστω $S(x) = x + x^2 + x^3 + \dots = \dfrac{x}{1-x}$, $|x| < 1$.

Στήν περιοχή σύγκλισης η δυναμοσειρά παραγωγίζεται κατά όρο και,

$$s'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Επομένως, $\hat{y}(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$, $|z|>1$

Παρατηρούμε ότι η $\hat{y}(z)$ έχει

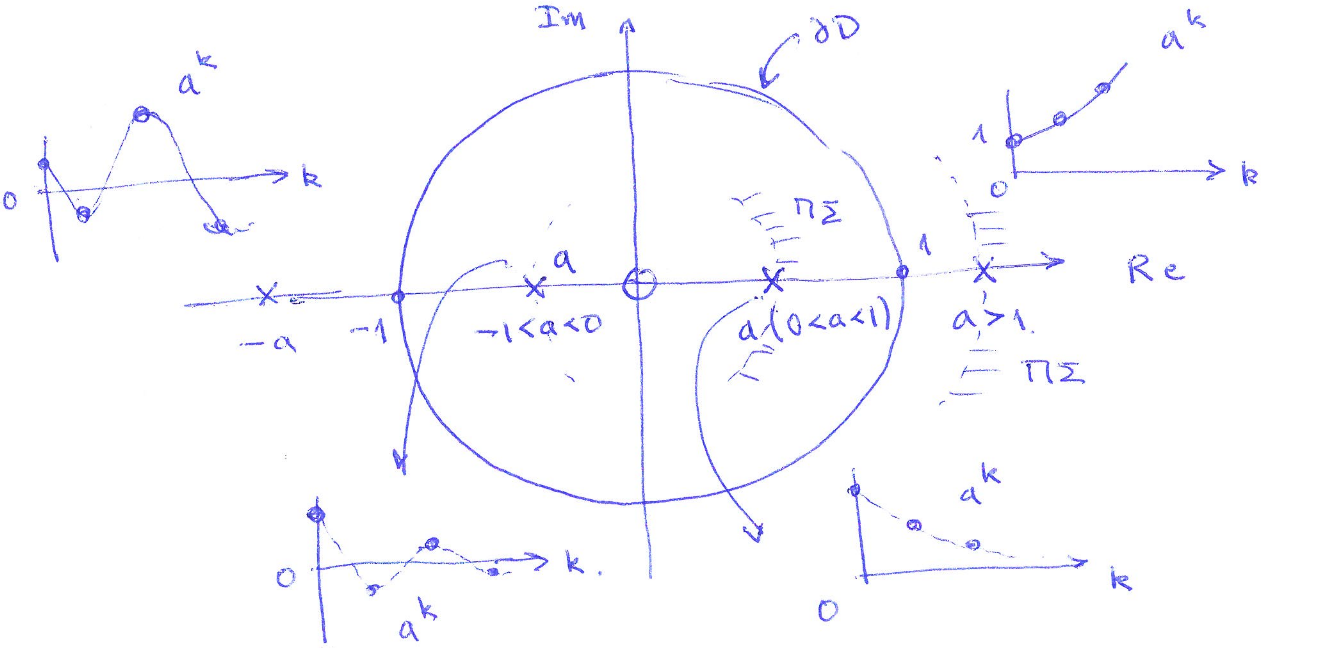


(4) $y_k = a^k$ $(k \geq 0)$ Εκθετική συνάρτηση $(a \in \mathbb{R})$

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a z^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

και περιοχή σύγκλισης $= \{ z \in \mathbb{C} : |az^{-1}| < 1 \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} : |z| > |a| \}$.



Παρατηρούμε ότι $\hat{y}(z)$ έχει πόλο στο σημείο $z=a$ και μηδενικό στο σημείο $z=0$. Αν $|a|<1$ (ο πόλος είναι

Εντός του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$) τότε ~~z_k~~ $y_k \to 0$ καθώς $k\to\infty$. Αν $|a|>1$, τότε $|y_k|\to\infty$ καθώς $k\to\infty$, αν $a=1$ τότε έχουμε σταθερή συνάρτηση (περίπτωση 2) και αν $a=-1$ τότε η (y_k) ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση μεταξύ των σημείων 1 και -1. Στην $1^η$ περίπτωση $\partial D = \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\} \subseteq$ Π.Σ. Στις άλλες τρεις περιπτώσεις $\partial D \cap$ Π.Σ. $= \phi$.

(5) $y_k = \rho^k \cos(k\theta) = \frac{1}{2}\rho^k\left(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta}\right)$, $k\in\mathbb{N}_0$.

Λόγω γραμμικότητας του μετασχηματισμού (ιδιότητα I_1),

$$\hat{y}(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho e^{i\theta}z^{-1}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho e^{-i\theta}z^{-1}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}z^{-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\rho e^{-i\theta}z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho e^{-i\theta}z^{-1}+1-\rho e^{i\theta}z^{-1}}{1-\rho\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$$

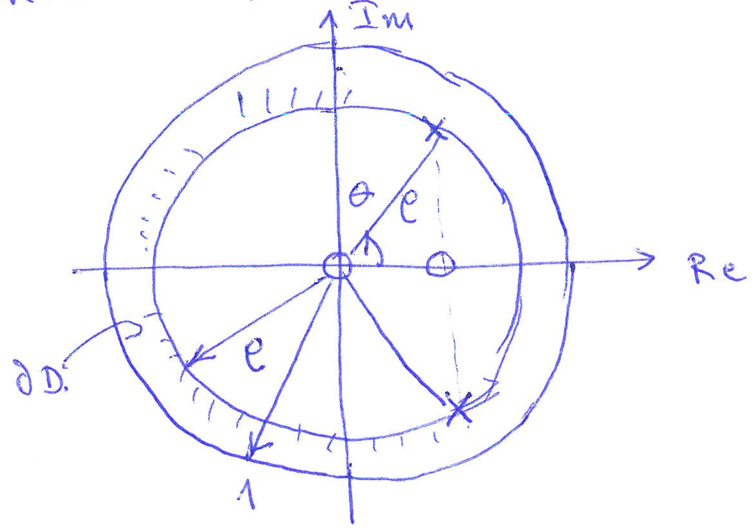
$$= \frac{1}{2}\,\frac{2-\rho\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2-2\rho\cos\theta\, z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\, z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{1-\rho\cos\theta\, z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\, z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} = \frac{z\left(z-\rho\cos\theta\right)}{z^2-2\rho\cos\theta\, z+\rho^2}$$

με περιοχή σύγκλισης $\Pi.\Sigma. = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > \rho \}$

Παρατηρούμε ότι έχουμε μιγαδικούς συζυγείς πόλους $z = \rho e^{\pm i\theta}$ και δύο μηδενικά ($z=0$ και $z=\rho\cos\theta$).



Αν $\rho=1$ οι δύο πόλοι $\in \partial D$. Αν $\rho<1$, τότε $y_k \to 0$ καθώς $k\to\infty$ και αν $\rho>1$, $|y_k| \to \infty$ καθώς $k \to \infty$. Όταν $\rho=1$ η ακολουθία y_k ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση. Παρόμοια,

$$\mathcal{Z}\{\rho^k \sin(k\theta)\} = \frac{\rho \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\theta \, z}{z^2 - 2\rho\cos\theta \cdot z + \rho^2}$$

με $\Pi.\Sigma. = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > \rho \}$:

$$\cancel{\hat{y}(z)=} \quad y_k = \frac{1}{2i}\rho^k \left(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho e^{i\theta} z^{-1}\right)^k - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho e^{-i\theta} z^{-1}\right)^k$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-\rho e^{i\theta} z^{-1}} - \frac{1}{1-\rho e^{-i\theta} z^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{\cancel{1} - \rho e^{-i\theta} z^{-1} - \cancel{1} + \rho e^{i\theta} z^{-1}}{1 - \rho\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{2i} \frac{\rho(e^{i\theta}-e^{-i\theta})z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} = \frac{\rho\sin\theta\, z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} = \frac{\rho\sin\theta\cdot z}{z^2-2\rho\cos\theta z+\rho^2}$$

15/3/2024

Ιδιότητες μετασχηματισμού

(Ι₁) Γραμμικότητα: $Z\{\alpha x_k + \beta y_k\} = \alpha \hat{x}(z) + \beta \hat{y}(z)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με ακτίνα σύγκλισης $R = \max\{R_x, R_y\}$, όπου R_x, R_y οι ακτίνες σύγκλισης των $\hat{x}(z)$ και $\hat{y}(z)$, αντίστοιχα

(Ι₂) Μετατόπιση: ~~(i)~~ Η ιδιότητα ισχύει για τον δίπλευρο μετασχηματισμό $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $Z[(y_k)_{k=-\infty}^{\infty}] = \hat{x}(z) =:$ $= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$ (σειρά Laurent που γενικά συγκλίνει σε δακτύλιο $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$).

Αν $y_k = 0$ για $k<0$, τότε (i) $Z\{y_{k-n}\} = z^{-n}\hat{y}(z)$ $(n \geq 0)$ και (ii) $Z\{y_{k+n}\} = z^n \hat{y}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{n-m}$

Απόδειξη: Για $n \geq 0$

(i) $Z\{y_{k-n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k-n} z^{-k} = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} y_{k-n} z^{-(k-n)}$

Θέτοντας $m = k-n$,

$$Z\{y_{k-n}\} = z^{-n}\sum_{m=-n}^{\infty} y_m z^{-m} = z^{-n}\sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m}$$

(εφόσον $y_m = 0$ για $m = -n, -n+1, \dots, -1$) και άρα $Z\{y_{k-n}\} = z^{-n}\hat{y}(z)$.

(ii) $Z\{y_{k+n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+n} z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} y_{k+n} z^{-(k+n)}$.

Θέτοντας $m = k+n$,

$$Z\{y_{k+n}\} = z^n \sum_{m=n}^{\infty} y_m z^{-m} = z^n\left[\sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{-m}\right]$$

$$= z^n \hat{y}(z) - \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{n-m}$$

(I$_3$) Θεώρημα <u>αρχικής τιμής</u>: Αν $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$ και το όριο $\lim_{z\to\infty} \hat{y}(z)$ ορίζεται, τότε $\lim_{z\to\infty} \hat{y}(z) = y_0$

<u>Απόδειξη</u>: Αν $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$, τότε

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots$$

Παίρνοντας το όριο $z\to\infty$, $\lim_{z\to\infty} \hat{y}(z) = y_0$

(I$_4$) Θεώρημα <u>τελικής τιμής</u>: Αν $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$ και η μιγαδική συνάρτηση $(z-1)\hat{y}(z)$ είναι αναλυτική γιά $|z|>1$, τότε $\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1} (z-1)\hat{y}(z)$

(I$_5$) Ιδιότητα <u>συνέλιξης</u>: Έστω $(x_k),(y_k) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
Ορίζουμε $(\omega_k) = (x_k) * (y_k)$ ως:

$$\omega_k = \sum_{m=0}^{k} x(k-m)\, y(m) \qquad (k\geq 0).$$

Τότε $\hat{\omega}(z) = \hat{x}(z)\cdot\hat{y}(z)$ και $\Pi.\Sigma_{\hat{\omega}} \supseteq \Pi\Sigma_{\hat{x}} \cap \Pi\Sigma_{\hat{y}}$

(I$_6$) $\mathcal{Z}\{a^k x_k\} = \hat{x}\left(\frac{z}{a}\right)$ με $\Pi.\Sigma. = (\Pi.\Sigma_{\hat{x}})\cdot|a|$.

(I$_7$) <u>Αντίστροφος μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$</u>

1η μέθοδος: (μέθοδος μερικών κλασμάτων - ρητής συνάρτησης).

<u>Παράδειγμα</u>: (Ακολουθία Fibonacci). Έστω Π.Α.Τ.

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k \quad , \quad y_0 = 0,\ y_1 = 1$$

Έχουμε:

$$\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} = \mathcal{Z}\{y_{k+1}\} + \mathcal{Z}\{y_k\} \quad \Rightarrow$$

$$z^2 \hat{y}(z) - z^2 y_0 - z y_1 = z\hat{y}(z) - z y_0 + \hat{y}(z)$$

$$\Rightarrow (z^2 - z - 1)\hat{y}(z) = z^2 \cancelto{0}{y_0} + z(\underbrace{y_1}_{1} - \cancelto{0}{y_0}) = z$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}$$

$$z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \begin{cases} z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Άρα
$$\frac{1}{z^2 - z - 1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \cancel{\frac{1}{z_1 - z_2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{z_1 - z_2}\right)}{z - z_1} + \frac{\frac{1}{z_2 - z_1}}{z - z_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{z - z_1} - \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{z - z_2}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow y_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k, \quad k \geq 0$$

<u>Μέθοδος 2η</u> (Ολοκληρωτικά υπόλοιπα).

Έστω $\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \dots + y_k z^{-k} + \dots$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) z^{k-1} = y_0 z^{k-1} + y_1 z^{k-2} + \dots + y_k z^{-1} + y_{k+1} z^{-2} + \dots$$

(Σειρά Laurent με κέντρο το σημείο $z=0$. Έστω C κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας R που περικλείει όλους τους πόλους της συνάρτησης $\hat{y}(z) z^{k-1}$. Τότε, από το Θεώρημα Cauchy,

$$y_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \hat{y}(z)\, z^{k-1}\, dz = \sum_i \text{Ολοκ Υπόλοιπα}\left(\hat{y}\, z^{k-1}, z_i\right)$$

όπου το άθροισμα είναι ως προς τους πόλους της $\hat{y}(z)\, z^{k-1}$.

Έστω ότι $\hat{y}(z)\, z^{-k} = \dfrac{h(z)}{g(z)}$, h, g πρώτα πολυώνυμα.

Υπάρχουν δύο πιθανότητες:

- Η $g(z)$ έχει απλή ρίζα (ισοδύναμα $\hat{y}(z)\, z^{-k}$ έχει απλούς πόλους). Τότε

$$\text{Ολοκ. Υπόλοιπο}\left(\hat{y}(z)\, z^{k-1}, z_i\right) = \lim_{z \to z_i} \left[(z - z_i) \frac{h(z)}{g(z)}\right]$$

- Η $g(z)$ έχει ρίζα πολλαπλότητας > 1. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλ. υπόλοιπο σε πόλο z_i πολλαπλότητας r δίνεται από:

$$\text{Ολοκ. Υπόλοιπο}\left(\hat{y}(z)\, z^{k-1}, z_i\right) = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \to z_i} \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}} \left[(z - z_i)^r \frac{h(z)}{g(z)}\right].$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της συνάρτησης:

$$\hat{y}(z) = \frac{z(z-1)}{(z-2)^2 (z+3)}.$$

Έχουμε: $\hat{y}(z)\, z^{k-1} = \dfrac{z^k (z-1)}{(z-2)^2 (z+3)}$ που έχει έναν απλό πόλο στο $z = -3$ και έναν πόλο πολλαπλότητας 2 στο $z = 2$

Άρα $y_k = \underbrace{\text{Ολ.Υπ}\left(\tilde{y}(z) z^{k-1}, -3\right)}_{K_1} + \underbrace{\text{Ολ.Υπ}\left(\tilde{y}(z) z^{k-1}, 2\right)}_{K_2}$.

$$= \oint_{|z|=R} \tilde{y}(z) z^{k-1} dz, \qquad R = R_0 > 3$$

$$= \oint_{|z|=R} \frac{z^k (z-1)}{(z-2)^2 (z+3)} dz.$$

$$K_1 = \lim_{z \to -3} \left[\cancel{(z+3)} \frac{z^k (z-1)}{(z-2)^2 \cancel{(z+3)}} \right] = \frac{(-3)^k (-3-1)}{(-3-2)^2}$$

$$= -\frac{4}{25} (-3)^k.$$

$$K_2 = \cancel{\lim_{z}} \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} \left[\cancel{(z-2)^2} \frac{\overbrace{z^k (z-1)}^{z^{k+1} - z^k}}{\cancel{(z-2)^2} (z+3)} \right].$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{\left[(k+1) z^k - k z^{k-1}\right](z+3) - (z^{k+1} - z^k) \cdot 1}{(z+3)^2}$$

$$= \frac{\left[(k+1) 2^k - k\, 2^{k-1}\right](5) - \cancel{2}\, 2^{k+1} + 2^k}{5^2}$$

$$= \frac{1}{25} \left[\cancel{2t}\, 10(k+1) - 5k - 4 + 2 \right] 2^{k-1}$$

$$= \frac{1}{25} (5k+8)\, 2^{k-1} \qquad \cancel{k \geq 0}.$$

$$= \frac{5k+8}{50} 2^k$$

Άρα $y_k = K_1 + K_2 = -\frac{4}{25} (-3)^k + \frac{5k+8}{50} 2^k$

Διακριτά Συστήματα Εισόδων - Εξόδων

Ορίζεται ως τελεστής που απεικονίζει διανυσματικά ακολουθία εισόδων $\underline{u} = (\underline{u}_k)_{k\in \mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots)$ ή διανυσματικά $\underline{u} = (\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\dots \underline{u}_{-1}, \underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots)$ σε διανυσματικά ακολουθία εξόδων $\underline{y} = (\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots)$ ή $\underline{y} = (\underline{y}_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\dots, \underline{y}_{-1}, \underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots)$. Συμβολικά γράφουμε: $\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t$, $t\in\mathbb{N}_0$ ή $t\in\mathbb{Z}$. (όπου t ο διακριτός δείκτης χρόνου).

<u>Ορισμός</u>: Το σύστημα λέγεται "αιτιατό" (causal) εάν αν η έξοδος την χρονική στιγμή $t\in\mathbb{N}_0$ ($t\in\mathbb{Z}$) δεν εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους $\{u_{t+1}, u_{t+2}, \dots\}$.

Ισοδύναμα

$$(\underline{u}_t = \underline{v}_t \quad \forall t\le t_0) \Rightarrow (G_\Sigma u)_t = (G_\Sigma v)_t \quad \forall t\le t_0.$$

<u>Ορισμός</u>: Το σύστημα είναι γραμμικό αν η απεικόνιση G_Σ είναι γραμμική, δηλ.

$$\text{(i)}\quad G_\Sigma(u+v) = G_\Sigma(u) + G_\Sigma(v), \quad \text{και}$$

$$\text{(ii)}\quad G_\Sigma(\lambda u) = \lambda G_\Sigma(u), \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Αν το σύστημα είναι γραμμικό και αιτιατό η απεικόνιση εισόδων-εξόδων είναι της μορφής:

$$(G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t,k)\,\underline{u}_k, \quad t\in\mathbb{N}_0$$

όπου $\underline{u}_t\in\mathbb{R}^m$, $(G_\Sigma u)_t\in\mathbb{R}^p$, $G(t,k)\in\mathbb{R}^{p\times m}$

Ορισμός: Το σύστημα Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν η έξοδος του συστήματος σε είσοδο μετατοπισμένη k χρονικές στιγμές είναι η έξοδος ~~στο μη~~ στην μη μετατοπισμένη είσοδο, μετατοπισμένη k χρονικές στιγμές. δηλ. αν S ο τελεστής μετατόπισης,

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots)$$

τότε το Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν $G_\Sigma S = S G_\Sigma$

Παρατήρηση: Αν το σύστημα Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, τότε $G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Εφόσον $G_\Sigma S = S G_\Sigma \iff G_\Sigma S u = S G_\Sigma u \quad \forall u = (u_0, u_1, \dots)$

τότε και για είσοδο $Su = (0, u_0, u_1, \dots)$ έχουμε:

$$G_\Sigma S(Su) = S G_\Sigma (Su)$$

$$\Rightarrow G_\Sigma S^2 u = S(G_\Sigma S)u = S(S G_\Sigma)u = S^2 G_\Sigma u$$

και γενικά $G_\Sigma S^k u = S^k G_\Sigma u \quad \forall u = (u_0, u_1, \dots)$

δηλ. $G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma$

Πρόταση: Έστω Σ αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο. Τότε η απεικόνιση εισόδου-εξόδου ικανοποιεί την εξίσωση:

$$(G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\, u_k \quad , \ t \geq 0.$$

Απόδειξη: Έστω e η παλμική ~~συνάρτ~~ ακολουθία (ακολουθία κρούσης) $e = (u_0, 0, 0, \dots)$, όπου $u_0 \in \mathbb{R}^m$ αυθαίρετο. Τότε,

$$(G_\Sigma e)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t,k)\,\underline{u}_k =$$

$$= G(t,0)\,\underline{u}_0 + G(t,1)\cancelto{0}{\underline{u}_1} + G(t,2)\cancelto{0}{\underline{u}_2} + \cdots$$

$$= G(t,0)\,\underline{u}_0$$

$$\Rightarrow (S^k G_\Sigma e)_t = G(t-k,0)\,\underline{u}_0 \quad , \quad t \geq k$$

Επίσης:

$$(S^k e)_t = (\underline{0}, \underline{0}, \ldots, \underline{0}, \overset{k\ \text{θέση}}{\downarrow\atop \underline{u}_0}, \underline{0}, \ldots)$$

$$\Rightarrow (G_\Sigma S^k e)_t = G(t,0)\cancelto{0}{\underline{0}} + \cdots + G(t,k)\,\underline{u}_0 + \cdots$$

$$= G(t,k)\,\underline{u}_0 \quad , \quad t \geq k$$

Εφόσον το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο,

$$G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma \Rightarrow G(t-k,0)\,\underline{u}_0 = G(t,k)\,\underline{u}_0 \quad \forall\, \underline{u}_0 \in \mathbb{R}^m$$

$$\Rightarrow \underline{G(t-k,0) = G(t,k)}$$

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Στην περίπτωση πού έχουμε γραμμικό, αιτιακό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα γράφουμε (με μικρή βλάβη συμβολισμού) $G(t-k) = G(t-k,0)$. Στην περίπτωση αυτή οι πίνακες $(G(0), G(1), G(2), \ldots)$ είναι η <u>κρουστική απόκριση</u> του συστήματος. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η έξοδος του συστήματος ~~σε~~ όταν η είσοδος είναι ακολουθία κρούσης δίνεται από την εξίσωση:

$$G_\Sigma(\underline{u}_0, \underline{0}, \underline{0}, \ldots) = (G(0)\,\underline{u}_0, G(1)\,\underline{u}_0, \ldots).$$

Πρόταση: Έστω $\{\underline{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\underline{u}_k \in \mathbb{R}^m$, εκθετικά φραγμένη ακολουθία με παραμέτρους (M_1, α_1) και $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ εκθετικά φραγμένη ακολουθία πινάκων $G_k \in \mathbb{R}^{p\times m}$ με ~~πα~~ παραμέτρους (M_2, α_2). Έστω,

$$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\,\underline{u}_k \quad , \quad t \geq 0$$

Τότε $\{\underline{y}_t\}_{t\in\mathbb{N}_0}$ είναι εκθετικά φραγμένη ακολουθία διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^p$ και ο μετασχηματισμός $\mathcal{Z}$,

$$\mathcal{Z}(\underline{y}_t) = \hat{\underline{y}}(z)$$

είναι καλά ορισμένος (δηλ. η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$ συγκλίνει σε περιοχή $\{z\in\mathbb{C} : |z|>R\}$ για κάποιο $R>0$).

Απόδειξη:

$$\|\underline{y}_t\| = \left\|\sum_{k=0}^{t} G(t-k)\,\underline{u}_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{t} \|G(t-k)\|\cdot\|\underline{u}_k\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{t} M_2\alpha_2^{t-k}\cdot M_1\alpha_1^{k} = M_1M_2\alpha_2^{t}\sum_{k=0}^{t}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha_2>\alpha_1$! Άρα,

$$\|\underline{y}_t\| \leq M_1M_2\alpha_2^t\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k = M_1M_2\frac{1}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\alpha_2^t$$

$$= \underbrace{M_1M_2\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}}_{:=M_3}\alpha_2^t := M_3\,\alpha_2^t$$

Άρα $(\underline{y}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ είναι εκθετικά φραγμένη και επομένως $\hat{\underline{y}}(z)$ είναι καλά ορισμένη (δυναμοσειρά συγκλίνει στο $|z|>\alpha_2$). □

Παρατηρούμε ότι το σύστημα Σ είναι δυναμικό, ("έχει μνήμη") καθώς η έξοδος την χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο την ίδια χρονική στιγμή, αλλά και από τις εισόδους παρελθόντος χρόνου t-1, t-2, ..., 0.

Στη συνέχεια επεκτείνουμε τον ορισμό εκθετικά φραγμένης ακολουθίας για ακολουθίες διανυσμάτων και ακολουθίες πινάκων.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$. Ορίζουμε την Ευκλείδια νόρμα του $\underline{u}$ ως: $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u}^T\underline{u}} = \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^2\right)^{1/2}$. Αν

$(\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$, $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$, τότε η ακολουθία είναι εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, \alpha_1 > 0, M_1 > 0$, τ.ω:

$$\|\underline{u}_k\| \le M_1 \alpha_1^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $G \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Ορίζουμε ως $\|G\|$ την φασματική νόρμα:

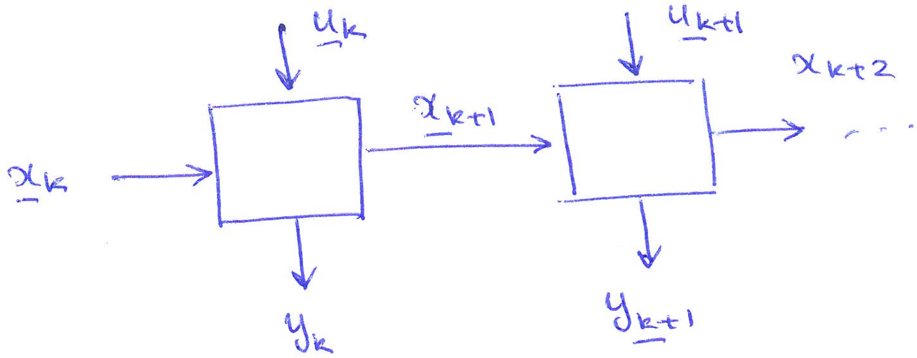
$$\|G\| = \max\{\|G\underline{x}\| : x \in \mathbb{R}^m, \|x\| = 1\}$$

(όπου $\|\underline{x}\|$ και $\|G\underline{x}\|$ είναι οι ευκλείδιες νόρμες των διανυσμάτων $\underline{x}$ και $G\underline{x}$, αντίστοιχα). Ισχύει ότι:

$$\|G\| = \sigma_1(G) = \sqrt{\lambda_{max}(G^TG)}$$ (μέγιστη ιδιάζουσα τιμή του G).

Έστω: $(G_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (G_0, G_1, G_2, \dots)$ ακολουθία πινάκων με $G_k \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $k \ge 0$. Η ακολουθία λέγεται εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, M_2 > 0, \alpha_2 > 0$ τ.ω $\|G_k\| \le M_2 \alpha_2^k$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Παρατηρούμε ότι αν $(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$ είναι γνωστά διανύσματα τότε $(\underline{x}_{k+1}, \underline{y}_n)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα.



Το διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}_k$ "συμπυκνώνει" όλη την πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος μέχρι την χρονική στιγμή $k \in \mathbb{N}_0$.

Γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα κατ. χώρου

Της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A(k)\,\underline{x}_k + B(k)\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C(k)\,\underline{x}_k + D(k)\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

όπου $A : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $C : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{p\times m}$

Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα κατ. χώρου

Της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A\,\underline{x}_k + B\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C\,\underline{x}_k + D\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Παρατήρηση: Από την ιδιότητα συνέλιξης έχουμε:

$$\underline{y}_t = (G_t) * (\underline{u}_t) = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\, \underline{u}(k) \quad , t \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \hat{\underline{y}}(z) = \hat{G}(z)\, \hat{\underline{u}}(z).$$

Η πινακο-συνάρτηση $\hat{G}(z) = \mathcal{Z}\{G_t\} \in \mathbb{R}(z)^{p \times m}$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του (γραμμικού, αιτιατού, χρονικά-αναλλοίωτου συστήματος Σ).

Συστήματα κατάστασης-χώρου (state-space) διακριτού χρόνου

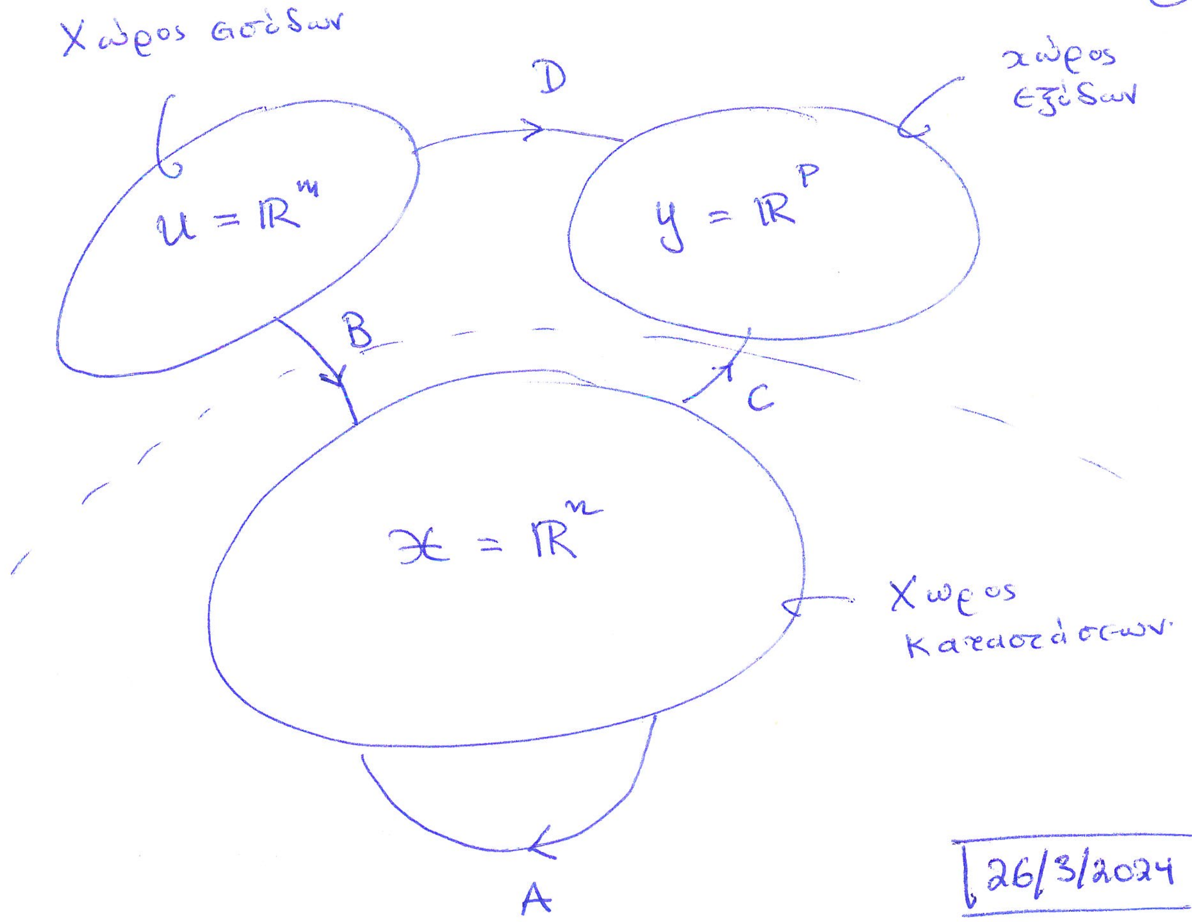
Ορίζονται από εξισώσεις της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} x_i(k+1) &= f_i(k, x_1(k), \ldots, x_n(k), u_1(k), \ldots, u_m(k)) \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots n \\ y_i(k) &= g_i(k, x_1(k), \ldots, x_n(k), u_1(k), \ldots, u_m(k)) \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, p. \end{aligned}\right\}$$

Σε πιό συμπαγή μορφή:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{f}(\underline{k}, \underline{x}_k, \underline{u}_k) \\ \underline{y}_k &= \underline{g}(k, \underline{x}_k, \underline{u}_k) \end{aligned}\right\}$$

όπου $\underline{f}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\underline{g}: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Το διάνυσμα $\underline{x}_k$ λέγεται διάνυσμα κατάστασης, ~~και~~ το διάνυσμα $\underline{y}_k$ λέγεται διάνυσμα εξόδου και το $\underline{u}_k$ διάνυσμα εισόδων.



26/3/2024

Απόκριση γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου

Εξετάζουμε πρώτα το σύστημα με μηδενική είσοδο (ομογενές): $\underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k$, $\underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0$. Έχουμε

$$\underline{x}_k = A_{k-1}\underline{x}_{k-1} = A_{k-1}A_{k-2}\underline{x}_{k-2} = \cdots$$

$$= \underbrace{A_{k-1}A_{k-2}\cdots A_{k_0}}_{\Phi(k,k_0)}\underline{x}_{k_0}$$

όπου $\Phi(k,k_0)$ ο πίνακας μεταφοράς, $\Phi(k,k_0) = \prod_{i=k_0}^{k-1} A_i$

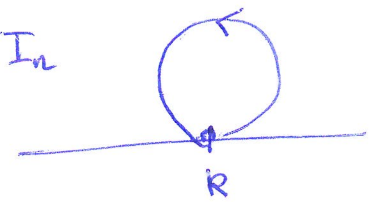
Ιδιότητες: (i) $\Phi(k,k) = I_n$

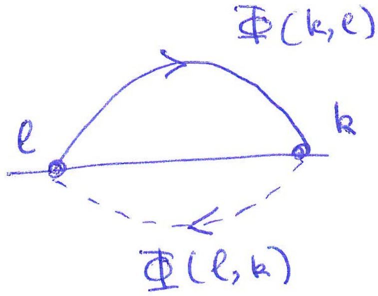
(ii) $\Phi(k,\ell) = \Phi(k,m)\,\Phi(m,\ell) \quad k \geq m \geq \ell$

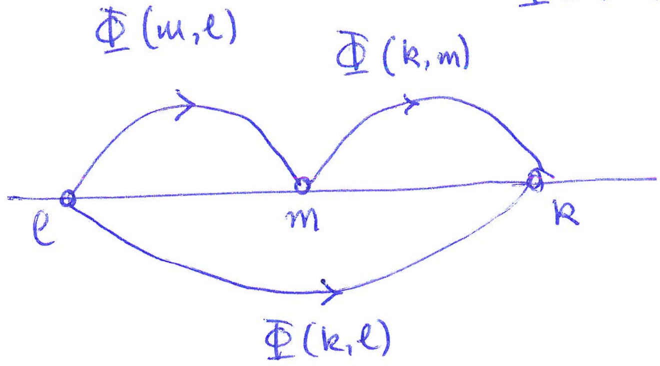
(iii) ο πίνακας $\Phi(k,\ell)$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι πίνακες $A_{k-1}, \dots A_\ell$ είναι αντιστρέψιμοι, οπότε $\Phi^{-1}(k,\ell) = \Phi(\ell,k)$

Παρατήρηση: Ο πίνακας μεταφοράς συστήματος συνεχούς χρόνου είναι πάντα αντιστρέψιμος.

$\Phi(k,\ell) = I_n$







Για χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (μηδενικής εισόδου), $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, έχουμε $\underline{x}_k = A^{k-k_0}\underline{x}_{k_0}$ $(A^0 = I_n)$ οπότε $\Phi(k,k_0) = \hat{\Phi}(k-k_0) = A^{k-k_0}$. Για γραμμικό σύστημα με μη μηδενική είσοδο,

$$\begin{aligned}
\underline{x}_k &= A_{k-1}\underline{x}_{k-1} + B_{k-1}\underline{u}_{k-1} \\
&= A_{k-1}(A_{k-2}\underline{x}_{k-2} + B_{k-2}\underline{u}_{k-2}) + B_{k-1}\underline{u}_{k-1} \\
&= \underbrace{A_{k-1}A_{k-2}}_{\Phi(k,k-2)}\underline{x}_{k-2} + \underbrace{A_{k-1}}_{\Phi(k,k-1)}B_{k-2}\underline{u}_{k-2} + \underbrace{I_n}_{\Phi(k,k)}\cdot B_{k-1}\underline{u}_{k-1} \\
&= \Phi(k,k-2)\underline{x}_{k-2} + \sum_{j=k-2}^{k-1}\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j
\end{aligned}$$

και επαγωγικά,

$$\left.\begin{aligned}
\underline{x}_k &= \Phi(k,k_0)\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1}\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j \\
\underline{y}_k &= C_k\Phi(k,k_0)\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1}C_k\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j + D_k\underline{u}_k
\end{aligned}\right\}$$

Σε γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα συστήματα,

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_k &= A^{k-k_0}\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-j-1} B\,\underline{u}_j \\ \underline{y}_k &= CA^{k-k_0}\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} CA^{k-j-1} B\,\underline{u}_j + D\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\}$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας σε χρονικά αναλλοίωτα συστήματα θέτουμε $k_0=0$, και

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_k &= A^{k}\underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B\,\underline{u}_j \\ \underline{y}_k &= CA^{k}\underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B\,\underline{u}_j + D\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\}$$

Αν $\underline{x}_0 = \underline{0}$,

$$\begin{aligned} \underline{y}_k &= \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1} B\,\underline{u}_j + D\,\underline{u}_k \\ &= \sum_{j=0}^{k} G(k-j)\,\underline{u}_j \end{aligned}$$

όπου
$$\left.\begin{aligned} G(k-j) &= CA^{k-j-1}B \qquad (0 \le j \le k-1) \\ &= D \qquad\qquad\quad (j=k). \end{aligned}\right\}$$

είναι η "κρουστική απόκριση" του συστήματος. Η ακολουθία:

$$\{G(k)\}_{k=0}^{\infty} = \{D, CB, CAB, CA^2B, \dots\}$$

είναι η ακολουθία συντελεστών Markov. Επομένως

$$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = D\underline{u}_t + CB\,\underline{u}_{t-1} + CAB\,\underline{u}_{t-2} + \dots + CA^{t-1}B\,\underline{u}_0$$

<u>Λήμμα</u>: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$. Τότε $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ όπου $\|\cdot\|$ η φασματική νόρμα πίνακα (μέγιστη ιδιάζουσα τιμή). Επομένως αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (τετραγωνικός πίνακας), $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Απόδειξη</u>: Εφόσον η φασματική νόρμα πίνακα επάγεται από την Ευκλείδια νόρμα διανυσμάτων, $\|AB\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|B\underline{x}\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^q$. Άρα, γιά κάθε $\underline{x} \in \mathbb{R}^q$, $\|\underline{x}\| \leq 1$,

$$\max\{\|AB\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^q, \|\underline{x}\| \leq 1\}$$
$$\leq \|A\| \cdot \max\{\|B\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^q, \|\underline{x}\| \leq 1\}$$
$$= \|A\| \cdot \|B\|$$

Ειδικά γιά τετραγωνικούς πίνακες,

$$\|A^2\| \leq \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$$

και επαγωγικά $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, $k \in \mathbb{N}_0$ □

<u>Λήμμα</u>: Έστω $S_t(z) = \sum_{k=1}^{t} A^{k-1} z^{-k} = z^{-1} I_n + z^{-2} A + \cdots + z^{-t} A^{t-1}$

Αν $|z| > \|A\|$ η σειρά συγκλίνει στην συνάρτηση $(zI_n - A)^{-1}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $|z| > \|A\|$ και $\gamma = \dfrac{\|A\|}{|z|} < 1$. Τότε

$$\|S_t(z)\| = \|z^{-1} I_n + z^{-2} A + \cdots + z^{-t} A^{t-1}\|$$
$$= |z|^{-1} \cdot \|I_n + z^{-1} A + \cdots + z^{-t+1} A^{t-1}\|$$

$$\leq |z|^{-1}\left(1+\frac{\|A\|}{|z|}+\cdots+\frac{\|A^{t-1}\|}{|z|^{t-1}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\|z\|}\left(1+\frac{\|A\|}{|z|}+\cdots+\frac{\|A\|^{t-1}}{|z|^{t-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{|z|}\left(1+\gamma+\cdots+\gamma^{t-1}\right)\longrightarrow\frac{1}{|z|(1-\gamma)}$$

καθώς $t\to\infty$. Επομένως η σειρά συγκλίνει και για

$z\neq 0$,

$$(zI_n-A)S_t(z)=(zI_n-A)(z^{-1}I_n+z^{-2}A+\cdots+z^{-t}A^{t-1})$$

$$=I_n+\cancel{z^{-1}A}+\cdots+\cancel{z^{-t+1}A^{t-1}}-\cancel{z^{-1}A}-\cancel{z^{-2}A^2}-\cdots-z^{-t}A^t$$

$$=I_n-\frac{A^t}{z^t}\longrightarrow I_n \quad \text{αν } |z|>\|A\|.$$

στό όριο $(t\to\infty)$ ~~καθώς~~

καθώς $\left\|\frac{A^t}{z^t}\right\|=\frac{\|A^t\|}{|z|^t}\leq\left(\frac{\|A\|}{|z|}\right)^t\longrightarrow 0$ (αν $|z|>\|A\|$).

Επομένως,

$$(zI_n-A)\left(\sum_{k=1}^{\infty}A^{k-1}z^{-k}\right)=I_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}A^{k-1}z^{-k}=(zI_n-A)^{-1}\quad,\ |z|\geq\|A\|$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος πίνακας $(zI_n-A)^{-1}$ είναι καλά ορισμένος για $|z|>\|A\|$ αφού $\|A\|>\rho(A)$ (όπου $\rho(A)=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}$ η φασματική ακτίνα του A). $\square$

<u>Θεώρημα</u>: Το σύστημα καταστάσεων χώρου,

$$\underline{x}_{k+1}=A\underline{x}_k+B\underline{u}_k\ ,\ \underline{y}_k=C\underline{x}_k+D\underline{u}_k\ ,\ \underline{x}(0)=\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$$

αντιστοιχεί σε αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου μέ συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)=$ $=D+C(zI_n-A)^{-1}B$

Απόδειξη: Η λύση της εξίσωσης $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$ για $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = \underline{0}$ είναι: ($\underline{x}_t = 0$ αν $t=0$ και):

$$\underline{x}_t = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B \underline{u}_k , \quad \cancel{t\geq 0} \quad t \geq 1$$

που αντιστοιχεί σε ακολουθία εξόδου

$$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t-1} CA^{t-k-1} B u_k + D u_t , \quad t \geq 0$$

Η ακολουθία πινάκων $(CA^{k-1}B)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι εκθετικά φραγμένη αφού:

$$\| CA^{k-1}B \| \leq \|C\| \cdot \|B\| \cdot \|A\|^{k-1} := M\alpha^{k-1} , \quad k \in \mathbb{N}.$$

όπου $M := \|C\| \cdot \|B\|$ και $\alpha = \|A\|$. Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς:

$$\hat{G}(z) = D + \sum_{k=1}^{\infty} CA^{k-1} B z^{-k}$$
$$= D + C\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} \right) B$$

είναι καλά ορισμένη ~~για~~ και συγκλίνει για "αρκούντως μεγάλο" $|z|$. Πράγματι, από προηγούμενο Λήμμα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} = (zI_n - A)^{-1} , \quad |z| > \|A\|$$

και επομένως $\hat{G}(z) = D + C(zI_n - A)^{-1}B$ $\square$

Η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)$ μπορεί να βρεθεί πιο ~~εύκολα~~ άμεσα από τις εξισώσεις που ορίζουν το σύστημα κατάστασης με την χρήση ιδιοτήτων του μετασχηματισμού $\mathcal{Z}$. Πράγματι, αν

$$\mathcal{Z}\{\underline{x}_k\} = \hat{\underline{x}}(z), \quad \mathcal{Z}\{\underline{y}_k\} = \hat{\underline{y}}(z), \quad \mathcal{Z}\{\underline{u}_k\} = \hat{\underline{u}}(z),$$

τότε γιά $|z| \geq \|A\|$,

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \Rightarrow z\hat{\underline{x}}(z) - z\underline{x}(0) = A\hat{\underline{x}}(z) + B\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow (zI_n - A)\hat{\underline{x}}(z) = z\underline{x}_0 + B\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{x}}(z) = z(zI_n - A)^{-1}\underline{x}_0 + (zI_n - A)^{-1}B\hat{\underline{u}}(z)$$

Επίσης,

$$\cancel{\hat{\underline{y}}(z)} = \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \Rightarrow \hat{\underline{y}}(z) = C\hat{\underline{x}}(z) + D\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{y}}(z) = C\left[z(zI_n - A)^{-1}\underline{x}_0 + (zI_n - A)^{-1}B\hat{\underline{u}}(z)\right] + D\hat{\underline{u}}(z)$$

και γιά $\underline{x}_0 = \underline{0}$,

$$\hat{\underline{y}}(z) = \underbrace{\left[C(zI - A)^{-1}B + D\right]}_{\hat{G}(z)}\hat{\underline{u}}(z) = \hat{G}(z)\hat{\underline{u}}(z)$$

$\boxed{28/3/2024}$

Έστω $\varphi(z) = \det(zI_n - A)$, ~~det~~ $\deg[\varphi(z)] = n = \dim(A)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε

$$\hat{G}(z) = C\frac{\operatorname{adj}(zI_n - A)}{\varphi(z)}B + D = \frac{C\operatorname{adj}(zI_n - A)B + D\varphi(z)}{\varphi(z)}$$

$$:= \frac{N[z]}{\varphi(z)} \quad \text{όπου } N[z] \in \mathbb{R}^{p\times m}[z]$$

Παρατηρούμε ότι $\hat{G}(z)$ είναι ρητή συνάρτηση της μεταβλητής z δηλ. τα στοιχεία $G_{ij}(z)$ της $G(z)$ είναι λόγος δύο πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, δηλ.

$$\hat{G}_{ij}(z) = \frac{N_{ij}(z)}{q(z)}, \quad i=1,2,\ldots P, \quad j=1,2,\ldots,m$$

Συγκεκριμένα,

$$D_{ij} \neq 0 \Rightarrow \deg[N_{ij}(z)] = n = \deg[q(z)]$$

$$D_{ij} = 0 \Rightarrow \deg[N_{ij}(z)] < n = \deg[q(z)].$$

Σε κάθε περίπτωση $\deg[N_{ij}(z)] \leq n = \deg[q(z)]$ $\forall i=1,2,\ldots P$, $j=1,2,\ldots,m$ και η συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)$ είναι "κανονική" (proper). Αν $D=0$, τότε $\deg[N_{ij}(z)] < n = \deg[q(z)]$ $\forall i=1,2,\ldots,P$, $j=1,2,\ldots m$ και η $\hat{G}(z)$ είναι "αυστηρά κανονική" (strictly proper).

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω το σύστημα καταστάσεων χώρου:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k, \quad \underline{y}_k = C\underline{x}_k, \quad \text{όπου}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0],$$

(και $D=0$) που αντιστοιχεί στις εξισώσεις διαφορών:

$$x_{k+1}^{(1)} = x_k^{(1)} + x_k^{(2)} + u_k, \quad x_{k+1}^{(2)} = x_k^{(2)}, \quad y_k = x_k^{(1)}$$

όπου $\underline{x}_k = [x_k^{(1)} \,;\, x_k^{(2)}]^T$. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$\hat{G}(z) = C(zI_2 - A)^{-1}B = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ισοδύναμα:

$$\hat{G}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z-1+1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

Η $\hat{G}(z)$ έχει πόλο στο $z=1$ (πολλαπλότητας 2) και μηδενικό στο $z=0$ (πολλαπλότητας 1).

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι κάθε σύστημα καταστάσεων χώρου (αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο) έχει ρητή και κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Το ερώτημα είναι αν ισχύει το αντίθετο.

<u>Πρόβλημα</u>: Έστω $\hat{G}(z)$ ρητή και κανονική συνάρτηση μεταφοράς αιτιατού, γραμμικού και χρονικά αναλλοίωτου συστήματος εισόδου-εξόδου. Μπορεί το σύστημα να εκφραστεί σε μορφή καταστάσεων χώρου; (πρόβλημα "πραγματοποίησης"). Αν ναι, τότε ο τρόπος είναι μοναδικός;

Θα δούμε ότι η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι καταφατική και ~~στη~~ στο δεύτερο αρνητική.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $H(z)$ και $L(z)$ τα πινακο-πολυώνυμα,

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j H_j \quad \text{και} \quad L(z) = z^\ell I_m + \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j A_j \quad \text{διαστάσεων}$$

$p \times m$ και $m \times m$ αντίστοιχα. Έστω,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_m & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_m \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \quad C = [\, H_0 \ H_1 \cdots H_{\ell-1} \,]$$

Τότε $H(z)\, L^{-1}(z) = C(zI - A)^{-1} B$ όπου $z \notin \sigma(A)$ (το φάσμα του πίνακα A).

<u>Απόδειξη</u>: Εξετάζουμε πρώτα την ειδική περίπτωση $H(z) = I$, οπότε $H_0 = I$, $H_1 = H_2 = \cdots = H_{\ell-1} = 0$ και $C = [\, I \,\vdots\, 0 \cdots 0 \,]$.

Έστω $z \in \mathbb{C}$ και έστω ότι

$$L(z)\, \underline{x}_1 = \underline{u} \qquad (\#)$$

Ορίζουμε διανύσματα: $\underline{x}_2 = z\underline{x}_1$, $\underline{x}_3 = z\underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_\ell = z\underline{x}_{\ell-1} = z^{\ell-1}\underline{x}_1$ ($\Rightarrow z\underline{x}_\ell = z^\ell \underline{x}_1$), $\underline{x} = [\, \underline{x}_1^T \ \underline{x}_2^T \cdots \underline{x}_\ell^T \,]^T$. Τότε,

$$A\underline{x} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} 0 & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_{\ell-1} \\ \underline{x}_\ell \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_\ell \\ -A_0\underline{x}_1 - A_1\underline{x}_2 - \cdots - A_{\ell-1}\underline{x}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\underline{x}_1 \\ \vdots \\ z\underline{x}_{\ell-1} \\ -\left(\sum_{j=0}^{\ell-1} A_j z^j\right)\underline{x}_1 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$\underline{u} = L(z)\underline{x}_1 = \left[z^{\ell} I + \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j A_j \right] \underline{x}_1$$

$$\Rightarrow \quad -\left[\sum_{j=0}^{\ell-1} z^j A_j \right] \underline{x}_1 = z^{\ell} \underline{x}_1 - \underline{u} = z\,\underline{x}_{\ell} - \underline{u} \qquad (**)$$

και από (*) :

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} z\underline{x}_1 \\ z\underline{x}_2 \\ \vdots \\ z\underline{x}_{\ell-1} \\ -\left(\sum_{j=0}^{\ell-1} z^j A_j\right)\underline{x}_1 \end{bmatrix} \overset{(**)}{=} \begin{bmatrix} z\underline{x}_1 \\ z\underline{x}_2 \\ \vdots \\ z\underline{x}_{\ell-1} \\ z\underline{x}_{\ell} - \underline{u} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_{\ell-1} \\ \underline{x}_{\ell} \end{bmatrix} - B\underline{u}$$

$$\Rightarrow \quad (zI - A)\underline{x} = B\underline{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} \overset{(***)}{=} (zI-A)^{-1} B\underline{u} \quad , \; z \notin \sigma(A)$$

Επίσης,

$$C\underline{x} = [I : 0 \cdots 0] \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_{\ell} \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underline{x}_1 \overset{(***)}{=} C(zI-A)^{-1} B\underline{u}$$

Επομένως,

$$(\#) \Rightarrow \underline{x}_1 = L^{-1}(z)\underline{u} = [I\ 0 \cdots 0](zI-A)^{-1} B\underline{u}$$

$$\Rightarrow \left[L^{-1}(z) - [I\ 0 \cdots 0](zI-A)^{-1}B \right] \underline{u} = 0 \qquad \forall \underline{u} \in \mathbb{C}^m$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}(z) = [I\ 0 \cdots 0](zI-A)^{-1} B$$

που είναι το αποτέλεσμα στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε.

Στην γενική περίπτωση $\left(H(z) = \sum_{j=0}^{\ell-1} z^j H_j \right)$ έστω ότι:

$$\begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} = (zI-A)^{-1}B. \qquad (\#\#).$$

Τότε, από το πρώτο μέρος της απόδειξης,

$$L^{-1}(z) = [I\ 0 \cdots 0](zI-A)^{-1}B$$

$$= [I\ 0 \cdots 0] \begin{bmatrix} C_1(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} = C_1(z)$$

$$\Rightarrow C_1(z) = L^{-1}(z) \qquad (\$).$$

Από την (##)

$$(zI-A) \begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow z \begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & -A_{\ell-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1(z) \\ C_2(z) \\ \vdots \\ C_\ell(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} z C_1(z) &= C_2(z) \\ z C_2(z) &= C_3(z) = z^2 C_1(z) \\ &\ \vdots \\ z C_{\ell-1}(z) &= C_\ell(z) = z^{\ell-1} C_1(z) \end{aligned} \right\}$$

και γενικά $C_j(z) = z^{j-1} C_1(z)$, $j = 1, 2, \ldots \ell$. Άρα

$$C(zI-A)^{-1}B = [H_0 \; H_1 \cdots H_{\ell-1}] \begin{bmatrix} C_1(z) \\ z\,C_1(z) \\ \vdots \\ z^{\ell-1} C_1(z) \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{[H_0 \; H_1 \cdots H_{\ell-1}] \begin{bmatrix} I \\ zI \\ \vdots \\ z^{\ell-1} I \end{bmatrix}}_{H(z)} C_1(z)$$

$$= H(z)\, C_1(z) \overset{(\beta)}{=} H(z)\, L^{-1}(z) \qquad \square$$

<u>Θεώρημα</u>: Η συνάρτηση εισόδου-εξόδου ενός αιτιατού, γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος Σ γράφεται ως σύστημα καταστάσεων χώρου αν και μόνο αν το Σ έχει συνάρτηση μεταφοράς που είναι ρητή και κανονική.

<u>Απόδειξη</u>: Έχουμε ήδη δείξει ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος καταστάσεων χώρου είναι ρητή και κανονική.

Αντίστροφα, έστω Σ αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z)$. Θα δείξουμε ότι,

$$\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\, \underline{u}_k \;, \quad t=0,1,2,\ldots$$

εκφράζεται ως σύστημα καταστάσεων χώρου.

Εφόσον $\hat{G}(z)$ ρητή και κανονική, κάθε στοιχείο $\hat{G}_{ij}(z)$ είναι επίσης ρητή και κανονική συνάρτηση (βαθμωτή).

Επομένως, $\hat{G}(z) \to G(0)$ καθώς $|z| \to \infty$ και επομένως γράφουμε $\hat{G}(z) = G(0) + K(z)$, όπου $K(z)$ αυστηρά κανονική, δηλαδή $\lim_{|z|\to\infty} K(z) = 0$. Το στοιχείο (i,j) του πίνακα $K(z)$, $k_{ij}(z)$, γράφεται ως

$$k_{ij}(z) = \frac{p_{ij}(z)}{q_{ij}(z)}$$

όπου (χωρίς βλάβη γενικότητας) θεωρούμε ότι το πολυώνυμο ~~$\not{\!}$~~ $q_{ij}(z)$ είναι μονικό (συντελεστής υψηλότερου βαθμού ίσος με την μονάδα). Επίσης έχουμε $\deg(p_{ij}) < \deg(q_{ij})$. Έστω ότι $r(z) = \prod_{i,j} q_{ij}(z)$ και έστω ότι $H(z) = r(z)K(z)$. Τότε ο πίνακας $H(z)$ είναι πολυωνυμικός,

$$H(z) = H_0 + H_1 z + \dots + H_{\ell-1} z^{\ell-1}$$

όπου $\ell \leq \deg r(z)$.

[Π.χ. αν $p=m=2$,

$$H(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{p_{11}}{q_{11}} & \frac{p_{12}}{q_{12}} \\ \frac{p_{21}}{q_{21}} & \frac{p_{22}}{q_{22}} \end{bmatrix}}_{K(z)} \underbrace{(q_{11}q_{12}q_{21}q_{22})}_{r(z)} = \begin{bmatrix} p_{11}(q_{12}q_{21}q_{22}) & * \\ p_{21}(q_{11}q_{12}q_{22}) & * \end{bmatrix}$$

και γενικά,

$$\deg(H_{ij}) = \deg(p_{ij}) + \sum_{\substack{k,\ell \\ k\neq i,\, \ell\neq j}} \deg(q_{k\ell}) =$$

$$= \deg(p_{ij}) - \deg(q_{ij}) + \sum_{k,\ell} \deg(q_{k\ell}).$$

και εφόσον

$$\deg(p_{ij}) < \deg(q_{ij}), \quad \sum_{k,l} \deg(q_{kl}) = \deg(r)$$

έχουμε $\deg(H_{ij}) < \deg(r)$ γιά κάθε (i,j) καί συνεπώς

$$\max_{i,j} \deg(H_{ij}) < \deg(r). \quad].$$

Ορίζουμε $L(z) = r(z) I_m$, τότε $L(z)$ μονικός πολυωνυμικός πίνακας και $K(z) = H(z) L^{-1}(z)$. Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα υπάρχουν πίνακες A, B και C (με την δομή του προηγούμενου Λήμματος) τέτοιοι ώστε

$$K(z) = C(zI - A)^{-1} B. \qquad \square$$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\hat{G}(z)$ ρητή κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Μία πραγματοποίηση (A,B,C,D) της $\hat{G}(z)$ είναι "πραγματοποίηση ελάχιστης τάξης" ("ελάχιστη πραγματοποίηση") αν η διάσταση $\dim(A)$ είναι ελάχιστη από όλες τις δυνατές πραγματοποιήσεις ~~του~~ της $\hat{G}(z)$.

Έστω ℓ^m ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών $(u) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots)$ όπου $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$ $(i \geq 1)$ και ℓ^p ο χώρος των ακολουθιών $(y) = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots)$ όπου $\underline{y}_i \in \mathbb{R}^p$ $(i \geq 1)$. Έστω ℓ_0^m ο υπόχωρος του ℓ^m των ακολουθιών "πεπερασμένης υποστήριξης", δηλ. $(u) \in \ell_0^m$ αν $\underline{u}_k \neq \underline{0}$ γιά πεπερασμένο αριθμό όρων k.

Έστω V ο γραμμικός μετασχηματισμός "αριστερής μετατόπισης" στον ℓ^p: $V(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \underline{y}_3, \dots) = (\underline{y}_2, \underline{y}_3, \dots)$

Παρατηρούμε ότι $V\ell_0^p \subseteq \ell_0^p$ (ℓ_0^p αναλλοίωτος ως προς τον V). Έστω $H : \ell_0^m \to \ell^p$ ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα (μορφής block Hankel):

$$H = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_2 & G_3 & G_4 & \cdots \\ G_3 & G_4 & G_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

δηλ. αν $(u) = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots) \in \ell_0^m$, η ακολουθία $(y) = (\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots) = H(u)$, $\underline{y}_i = \sum_{j=1}^{\infty} G(i+j-1)\, \underline{u}_j$, $i \geq 1$.

(δηλ. $\mathrm{vec}(\underline{y}_i)_{i=1}^{\infty} = H\, \mathrm{vec}(\underline{u}_i)_{i=1}^{\infty}$ όπου $\mathrm{vec}(\underline{y}_i)_{i=1}^{\infty} = [\underline{y}_1^T\ \underline{y}_2^T\ \underline{y}_3^T \dots]^T$.). (Παρατηρούμε ότι εφόσον $(u) \in \ell_0^m$ δεν υπάρχει πρόβλημα σύγκλισης ~~στη~~ της σειράς $\sum_{j=1}^{\infty} G(i+j-1)\, \underline{u}_j$).

<u>Θεώρημα:</u> Έστω Σ αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με ακολουθία Markov $(G_0, G_1, G_2 \dots)$, $G_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $i \geq 0$. Έστω $H : \ell_0^m \to \ell^p$ ο αντίστοιχος μετασχηματισμός με block πίνακα Hankel όπως ορίστηκε παραπάνω και $\mathcal{H} = \mathcal{R}(H)$, η εικόνα του H. Έστω V ο μετασχηματισμός αριστερής μετατόπισης στον ℓ^p. Τότε, το Σ έχει πραγματοποίηση ελάχιστης

διάστασης $k = \dim(\mathcal{X})$. Αν $k < \infty$, τότε μία ελάχιστη πραγματοποίηση του Σ είναι η $\Theta = (A, B, C, D)$, όπου

$$A = V|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$$

$$B = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \end{bmatrix} : \mathbb{R}^m \to \mathcal{X}$$

$$C = [\, I \; 0 \; 0 \cdots \,]|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^p$$

$$D = G_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p.$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\tilde{\Theta} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ πραγματοποίηση του Σ με $\dim(\tilde{A}) = n$. Ορίζουμε:

$$\tilde{\Lambda} = [\, \tilde{B} \;\; \tilde{A}\tilde{B} \;\; \tilde{A}^2\tilde{B} \cdots \,] : \ell_0^m \to \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \to \ell^p$$

(όπου ακολουθίες $(u) \in \ell^m$ και $(y) \in \ell^p$ γράφονται ως $\mathrm{vec}(\underline{u}_i)_{i=1}^{\infty}$ και $\mathrm{vec}(\underline{y}_i)_{i=1}^{\infty}$ και ακολουθούμε τους συνήθεις κανόνες πολλαπλασιασμού πινάκων και διανυσμάτων πεπερασμένης διάστασης). Παρατηρούμε ότι ο $\tilde{\Lambda}$ είναι καλά ορισμένος εφόσον ακολουθίες $(u) \in \ell_0^m$ έχουν πεπερασμένη υποστήριξη.

Εφόσον $\tilde{\Theta}$ είναι πραγματοποίηση του Σ η j-παράμετρος Markov γράφεται ως $G_j = \tilde{C}\tilde{A}^{j-1}\tilde{B}$ $(j \geq 1)$ και επομένως

$$H = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \cdots \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B} & \cdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^2\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^3\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^4\tilde{B} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{A}^2\tilde{B} & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \tilde{\Gamma}\tilde{\Lambda}$$

και επομένως $k = \dim \mathcal{R}(H) \leq \dim(\tilde{\Lambda}) \leq n$.

Άρα αν υπάρχει πραγματοποίηση, τότε $\dim \mathcal{R}(H) < \infty$ και η διάσταση της είναι τουλάχιστον $k = \dim \mathcal{R}(H)$.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης αρκεί να δείξουμε ότι $\Theta = (A, B, C, D)$, όπως ορίστηκε στην διατύπωση του θεωρήματος είναι πραγματοποίηση του Σ. Έστω ότι $\mathcal{X} = \mathcal{R}(H)$, $\dim(\mathcal{X}) < \infty$. Έχουμε:

$$VH = \begin{bmatrix} G_2 & G_3 & \cdots \\ G_3 & G_4 & \cdots \\ G_4 & G_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} : \ell_0^m \to \ell^p$$

και επομένως

$$V\mathcal{X} = V\,\mathcal{R}(H) = \mathcal{R}(VH) \subseteq \mathcal{R}(H) = \mathcal{X}$$

δηλ $V\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$ και ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι V αναλλοίωτος.

Επομένως ο μετασχηματισμός: $A = V|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$

είναι καλά ορισμένος. Επίσης, αφού $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(H)$,

$$AB = V|_{\mathcal{X}}\,B = VB = \begin{bmatrix} G_2 \\ G_3 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

και επαγωγικά

$$A^{j-1}B = V^{j-1}B = \begin{bmatrix} G_j \\ G_{j+1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad j \geq 1.$$

Επομένως $G_j = CA^{j-1}B$, $j \geq 1$, και άρα

$\Theta = (A, B, C, D)$ είναι πραγματοποίηση του Σ $\square$