Μετασχηματισμός Ζ

Αν $(y_k): \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\} =$
$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k} = y_0 + y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \cdots$$
(μονόπλευρος μετασχηματισμός Ζ). (Αν $(y_k): \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ μπορούμε νά ορίσουμε καί τον δίπλευρο μετασχηματισμό Ζ).

Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού είναι το σύνολο των $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους η δυναμοσειρά $(*)$ συγκλίνει. Συνήθως χρησιμοποιούμε κριτήριο σύγκλισης λόγου.

Πρόταση: Έστω ότι $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| = R$. Τότε η συνάρτηση $\hat{y}(z)$ έχει περιοχή σύγκλισης που περιέχει το $\{z : |z| > R\}$.

Απόδειξη: Από το κριτήριο λόγου η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$ συγκλίνει αν: (για $z \neq 0$)

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{y_{k+1} z^{-(k+1)}}{y_k z^{-k}} \right| < 1 \Leftarrow \frac{1}{|z|} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| < 1$$
$$\Leftarrow \frac{R}{|z|} < 1 \Leftarrow |z| > R.$$

Πρόταση: Έστω (y_k) εκθετικά φραγμένη (δηλ. έστω ότι υπάρχουν $\alpha > 0, M > 0 : |y_k| \leq M\alpha^k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$. Τότε η $\hat{y}(z)$ είναι καλά ορισμένη και έχει περιοχή σύγκλισης που περιέχει το σύνολο $\{z : |z| > \alpha\}$.

Απόδειξη: Έστω ότι $|y_k| \leq M\alpha^k$. Τότε $\forall z : |z| > \alpha$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}\right| \leq \sum_k \frac{|y_k|}{|z|^k} \leq M \sum_k \frac{\alpha^k}{|z|^k}$$

Έστω $\beta = \frac{\alpha}{|z|} < 1$. Τότε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}\right| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{M}{1-\beta} < \infty$$

Μετασχηματισμοί Z τυπικών ακολουθιών

(1) $\left.\begin{array}{ll} \delta_k = 1 & (k=0) \\ \quad = 0 & (k \neq 0). \end{array}\right\}$ Συνάρτηση κρούσης

$\mathcal{Z}\{\delta_k\} = 1$, Περιοχή σύγκλισης: $\mathbb{C}$

(2) $u_k = 1 \quad (k \geq 0)$: "Βηματική" συνάρτηση.

$$\mathcal{Z}\{u_k\} = \hat{u}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Περιοχή σύγκλισης: $|z^{-1}| < 1 \iff |z| > 1$.
Η συνάρτηση $\hat{u}(z)$ έχει πόλο πολλαπλότητας 1 στό $z=1$
(καί μηδενικό πολλ/τας 1 στό $z=0$).

(3) $y_k = k \quad (k \geq 0)$

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots = z^{-1}(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \cdots)$$

Έστω $S(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}$, $|x| < 1$

Στην περιοχή σύγκλισης η δυναμοσειρά παραγωγίζεται κατά όρο καί

$$S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$(|x| < 1)$$

Επομένως $\hat{y}(z) = z^{-1}\,\delta'(z^{-1}) = \dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \dfrac{z}{(z-1)^2}$

και η περιοχή σύγκλισης : $\{z : |z|>1\}$. Παρατηρούμε ότι $\hat{y}(z)$ έχει πόλο πολ/τας 2 στο σημείο $z=1$ (και μηδενικό πολ/τας 1 στο $z=0$).

(4) $y_k = a^k$ $(k\geq 0)$. εκθετική συνάρτηση. $(a\in\mathbb{R})$

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}(az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

και Π.Σ $= \{z : |az^{-1}|<1\} = \{z : |z|>|a|\}$.
Παρατηρούμε ότι $\hat{y}(z)$ έχει πόλο στο σημείο $z=a$.
Αν $|a|<1$ (ο πόλος εντός μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$) τότε $y_k\to 0$, αν $|a|>1$, τότε $|y_k|\to\infty$, αν $a=1$ τότε έχουμε σταθερή συνάρτηση (περίπτωση (3)) και αν $a=-1$ τότε y_k ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση μεταξύ των σημείων 1 και -1. Στην πρώτη περίπτωση $\partial D = \{z : |z|=1\} \subseteq$ Π.Σ ενώ στην δεύτερη και τρίτη $\partial D \cap$ Π.Σ. $= \emptyset$.

(5) $y_k = \rho^k\cos(k\theta) = \frac{1}{2}\rho^k(e^{ik\theta}+e^{-ik\theta})$, $k\in\mathbb{N}_0$.
Λόγω γραμμικότητας του μετασχηματισμού (ιδιότητα I_1)

$$\hat{y}(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\rho e^{i\theta}z^{-1})^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\rho e^{-i\theta}z^{-1})^k =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\rho e^{i\theta}z^{-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\rho e^{-i\theta}z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2-2\rho\cos\theta\, z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\cdot z^{-1}+\rho^2 z^{-2}} = \frac{1-\rho\cos\theta\cdot z^{-1}}{1-2\rho\cos\theta\, z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$$

καί επομένως: $\hat{y}(z) = \dfrac{z - \rho\cos\theta}{z^2 - 2\rho\cos\theta \cdot z + \rho^2}$

με Π.Σ. $= \{z : |z| > \rho\}$. Παρατηρούμε ότι έχουμε μιγαδικούς συζυγείς πόλους $z = \rho e^{\pm i\theta}$ (καί ένα μηδενικό) στό $z = \rho\cos\theta$. Επίσης αν οι δύο πόλοι $\in D = \{z : |z| < 1\}$ τότε $y_k \to 0$ (ταλάντωση μέ απόσβεση), αν οι δύο πόλοι $\in \partial D$ η y_k ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση καί αν οι δύο πόλοι $\in \mathbb{C} \setminus \overline{D} = \{z : |z| > 1\}$ τότε $|y_k| \to \infty$ ~~(ταλάντωση χωρ~~

Παρόμοια: $\mathcal{Z}\{\rho^k \sin(k\theta)\} = \dfrac{\rho\cos\theta \cdot z}{z^2 - 2\rho\cos\theta \cdot z + \rho^2}$

με την ίδια περιοχή σύγκλισης $\{z : |z| > \rho\}$.

<u>Ιδιότητες μετασχηματισμού</u>

I_1 $\mathcal{Z}\{\alpha y_k + \beta x_k\} = \alpha\hat{y}(z) + \beta\hat{x}(z)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
με ακτίνα σύγκλισης $R = \max\{R_x, R_y\}$ οπου R_x καί R_y οι ακτίνες σύγκλισης της (x_k) καί (y_k) αντίστοιχα.

I_2: Μετατόπιση: (i) $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = z^{-n}\hat{y}(z)$ $(n > 0)$
(ii) $\mathcal{Z}\{y_{k+n}\} = z^n \hat{y}(z) + \sum_{m=0}^{n-1} y_m z^{n-m}$ (στό (ii)

έχουμε ορίσει μετασχηματισμό γιά ακολουθίες:
$[-n, -n+1, \ldots, -1] \cup \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ καί

$$\hat{y}(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} y_k z^{-k} = y_{-n} z^n + y_{-n+1} z^{n-1} + \cdots + y_{-1} z + \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$$

(σειρα Laurent - συγκλίνει σέ δακτύλιο).

Απόδειξη (ii): $\mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = \sum_{k=0}^{\infty} y_{k-n} z^{-k}$ $(n \geq 0)$

$$= z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} y_{k-n} z^{-(k-n)} = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} y_m z^{-m} \quad (m := k-n)$$

$$= z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} y_m z^{-m} \quad (y_{-n} = y_{-n+1} = \cdots = y_{-1} = 0)$$

$$= z^{-n} \hat{y}(z).$$

I_3 Θεώρημα αρχικής τιμής: $\lim_{|z| \to \infty} \hat{y}(z) = y_0$ (αν το όριο ορίζεται!).

I_4: Θεώρημα τελικής τιμής: Αν η συνάρτηση $f(z) = (z-1)\hat{y}(z)$ είναι αναλυτική για $|z| \geq 1$, τότε $\lim_{z \to 0} (z-1)\hat{y}(z) = \lim_{k \to \infty} y_k$

I_5: Ιδιότητα συνέλιξης: Έστω $(x_k), (y_k) : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$
Ορίζουμε $(\omega_k) = (x_k) * (y_k)$: $\omega_k = \sum_{m=0}^{k} x(k-m)\, y(m)$
Τότε:

$$\hat{\omega}(z) = \hat{x}(z) \cdot \hat{y}(z) \quad \text{και} \quad \Pi.\Sigma_{\hat{\omega}} \supseteq \Pi\Sigma_{\hat{x}} \cap \Pi\Sigma_{\hat{y}}$$

I_6: $\mathcal{Z}\{a^k x_k\} = \hat{x}\left(\frac{z}{a}\right)$ με $\Pi.\Sigma = (\Pi\Sigma_{\hat{x}})|a|$

I_7: Αντίστροφος μετασχηματισμός Z:

Αν $\hat{y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^{-k}$ με $\Pi.\Sigma. = \{ z : |z| > R \}$
τότε:

$$y_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_D \hat{y}(z)\, z^{k-1}\, dz \qquad (k \geq 0).$$

όπου D κύκλος ακτίνας $\tilde{R}$ και κέντρο 0, όπου $\tilde{R} > R$.
Από το θεώρημα Cauchy y_k = άθροισμα ολοκληρωτικών υπολοίπων. Αν $\hat{y}(z)$ ρητή ~~[illegible]~~ συνάρτηση και

$\hat{y}(z) z^{k-1} = \dfrac{h(z)}{g(z)}$ όπου $h(z)$ και $g(z)$ πρώτα μεταξύ τους πολυώνυμα και $g(z) = \prod_i (z-z_i)^{m_i}$, τότε:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{h(z)}{g(z)}, z_i\right) = \frac{1}{m_i-1} \lim \frac{d^{m_i-1}}{dz^{m_i-1}}\left\{(z-z_i)\frac{h(z)}{g(z)}\right\}$$

Παράδειγμα: Έστω $\hat{y}(z) = \dfrac{z}{(z-2)^2}$, $R_y > 2$

Τότε $\hat{y}(z) z^{k-1} = \dfrac{z^k}{(z-2)^2}$ $(k \geq 0)$

και $\operatorname{Res}\left[\hat{y}(z) z^{k-1}, 2\right] = \dfrac{1}{(2-1)!} \lim \dfrac{d}{dz}\left\{\cancel{(z-2)^2}\dfrac{z^k}{\cancel{(z-2)^2}}\right\}$

$= \lim_{z \to 2} \left(k z^{k-1}\right) = k\, 2^{k-1}$ $(k \geq 0)$.

Λύση εξισώσεων διαφορών με μετασχηματισμό Z

Παράδειγμα: Έστω το ΠΑΤ: $y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 2^k$
$y_0 = 0$, $y_1 = 1$.

Από γραμμικότητα μετασχηματισμού:

$$\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} - 4\mathcal{Z}\{y_{k+1}\} + 3\mathcal{Z}\{y_k\} = \mathcal{Z}\{2^k\} = \frac{z}{z-2}$$

Έστω $\hat{y}(z) = \mathcal{Z}\{y_k\}$, τότε $\mathcal{Z}\{y_{k+1}\} = z\hat{y}(z) - \cancel{z y_0}^{\,0}$
και $\mathcal{Z}\{y_{k+2}\} = z^2\hat{y}(z) - \cancel{z^2 y_0}^{\,0} - z y_1$. Άρα

$$z^2\hat{y}(z) - \cancel{z^2 y_0} - z\underbrace{y_1}_{1} - 4\left(z\hat{y}(z) - \cancel{z y_0}\right) + 3\hat{y}(z) = \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow (z^2 - 4z + 3)\hat{y}(z) = \frac{z}{z-2} + z \Rightarrow (z-1)(z-3)\hat{y}(z) = \frac{z}{z-2} + z$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{y}(z)}{z} = \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{(z-1)}(z-2)(z-3)} = \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow y_k = 3^k - 2^k \quad (k \geq 0).$$

$(y_0 = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0, \quad y_1 = 3 - 2 = 1 \quad ,$

$$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = 3^{k+2} - 2^{k+2} - 4(3^{k+1} - 2^{k+1}) + 3(3^k - 2^k)$$

$$= 3^k(\underbrace{9 - \cancel{12} + 3}_{0}) + 2^k(-4 + 8 - 3) = 2^k \;)$$

Συστήματα εισόδων-εξόδων διακριτού χρόνου

Τό σύστημα ορίζεται ως τελεστής που απεικονίζει διανυσματικές ακολουθίες (σήματα) εισόδου, $\underline{u} = (u_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \dots)$ $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^m$, σε διανυσματικές ακολουθίες (σήματα) εξόδου, $\underline{y} = (y_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (y_0, \underline{y}_1, \dots)$, $\underline{y}_i \in \mathbb{R}^p$. Συμβολικά γράφουμε: $\underline{y}_t = (G_\Sigma u)_t$, $t \in \mathbb{N}_0$. (t ο διακριτός δείκτης χρόνου)

<u>Ορισμός.</u>: Τό σύστημα λέγεται "αιτιατό" (causal) αν η έξοδος την χρονική στιγμή $t \in \mathbb{N}_0$ δέν εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους $\{\underline{u}_{t+1}, \underline{u}_{t+2}, \dots\}$. Ισοδύναμα:

$$(\underline{u}_t = \underline{v}_t \ \forall t \le t_0) \Rightarrow (G_\Sigma u)_t = (G_\Sigma v)_t \ \forall t \le t_0$$

<u>Ορισμός:</u> Τό σύστημα είναι γραμμικό αν η απεικόνιση G_Σ είναι γραμμικός τελεστής, δηλαδή:

(i) $G_\Sigma(u+v) = G_\Sigma u + G_\Sigma v$, καί

(ii) $G_\Sigma(\lambda u) = \lambda G_\Sigma(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν τό σύστημα είναι γραμμικό καί αιτιατό:

$$y_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t,k)\, \underline{u}_k$$

οπου $G(t,k) \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $0 \le k \le t$

<u>Ορισμός.</u> Ορίζουμε τον τελεστή μετατόπισης (καθυστέρησης)

$$S(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots) = (\underline{0}, \underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots)$$

Τό σύστημα G_Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο αν: $G_\Sigma S = S G_\Sigma$

Αν τό G_Σ είναι χρονικά αναλλοίωτο, τότε

$$G_\Sigma S^k = S^k G_\Sigma \quad \forall k \geq 0.$$

Πρόταση: Έστω Σ_G αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα. Τότε

$$y_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k,0)\, \underline{u_k}$$

$$(:= G * u)$$

Απόδειξη: Έστω $\underline{\delta} = (\delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = (\underline{\delta_0}, \underline{0}, \underline{0}, \dots)$ $\underline{\delta_0} \in \mathbb{R}^m$ αυθαίρετο διάνυσμα. (Η $\underline{\delta}$ λέγεται ακολουθία κρούσης). Τότε

$$(G_\Sigma \delta)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t,k)\, \delta_k = G(t,0)\, \underline{\delta_0}$$

$$\Rightarrow (S^k G_\Sigma \delta)_t = G(t-k,0)\, \underline{\delta_0} \qquad (t \geq 0)$$

Επίσης: $S^k \underline{\delta} = (\underline{0}, \underline{0}, \dots, \underline{0}, \underline{\delta_0}, \underline{0}, \dots)$ όπου $\underline{\delta_0}$ στην k-θέση της ακολουθίας. Επομένως:

$$(G_\Sigma S^k \underline{\delta})_t = G(t,k)\, \underline{\delta_0}$$

Επομένως $G(t,k)\, \underline{\delta_0} = G(t-k,0)\, \underline{\delta_0}$ και αφού $\underline{\delta_0} \in \mathbb{R}^m$ αυθαίρετο έχουμε $G(t,k) = G(t-k,0)$. □

Παρατήρηση: Σέ χρονικά αναλλοίωτα συστήματα μόνο ο σχετικός χρόνος $t-k$ έχει σημασία γιά τον καθορισμό της εξόδου. Συνήθως γράφουμε $G(t-k,0) = G(t-k)$ (με μικρό σφάλμα συμβολισμού).

Παρατήρηση: Αν $(\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{\delta}_0, \underline{0}, \underline{0}, \dots)$, τότε

$$y_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\, u_k = G(t)\, \underline{\delta}_0$$

και $(\underline{y}_0, \underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots) = (G(0)\underline{\delta}_0, G(1)\underline{\delta}_1, G(2)\underline{\delta}_0, \dots)$
η κρουστική απόκριση του συστήματος.*

Στη συνέχεια επεκτείνουμε την έννοια εκθετικά φραγμένης ακολουθίας για ακολουθίες διανυσμάτων και ακολουθίες πινάκων

Ορισμός: Έστω $\underline{u} \in \mathbb{R}^m$. Ορίζουμε την Ευκλείδια νόρμα του $\underline{u}$ ως $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u}^T \underline{u}} = \left(\sum_{i=1}^{m} u_i^2\right)^{1/2}$. Αν

$$(\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots)$$, τότε η $(\underline{u}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$

είναι εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, \alpha_1 > 0, M_1 > 0$:

$$\|\underline{u}_k\| \leq M_1 \alpha_1^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Ορισμός: Έστω $G \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Ορίζουμε ως $\|G\|$ την φασματική νόρμα: $\|G\| = \max\{\|G\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^m, \|x\| = 1\}$
Ισχύει ότι $\|G\| = \sigma_1(G) = \sqrt{\lambda_{max}(G^T G)}$ (μέγιστη ιδιάζουσα τιμή). Έστω,

$$(G_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (G_0, G_1, G_2, \dots)$$

ακολουθία πινάκων όπου $G_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Τότε η ακολουθία λέγεται εκθετικά φραγμένη αν $\exists\, M_2 > 0, \alpha_2 > 0$:

$$\|G_k\| \leq M_2 \alpha_2^k \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $\{\underline{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\underline{u}_k\in\mathbb{R}^m$, εκθετικά φραγμένη ακολουθία με παραμέτρους (M_1,α_1) και $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ εκθετικά φραγμένη ακολουθία πινάκων, $G_k\in\mathbb{R}^{p\times m}$, με παραμέτρους (M_2,α_2). Έστω

$$y_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\underline{u}_k \quad , \quad t\geq 0.$$

Τότε η $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ είναι εκθετικά φραγμένη και επομένως ο μετασχηματισμός

$$\mathcal{Z}\{\underline{y}_k\} = \hat{\underline{y}}(z)$$

είναι καλά ορισμένος (η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\underline{y}_k z^{-k}$ συγκλίνει σε περιοχή $\{z: |z|>R\}$ για κάποιο R.)

<u>Απόδειξη</u>

$$\|\underline{y}_t\| = \|\sum_{k=0}^{t} G(t-k)\underline{u}_k\| \leq \sum_{k=0}^{t}\|G(t-k)\|\cdot\|\underline{u}_k\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{t} M_2\alpha_2^{t-k}\cdot M_1\alpha_1^{k} = M_1M_2\alpha_2^{t}\sum_{k=0}^{t}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας θεωρούμε ότι $\alpha_2>\alpha_1$. Άρα

$$\|\underline{y}_t\| \leq M_1M_2\alpha_2^{t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^k = M_1M_2\frac{1}{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\alpha_2^{t}$$

$$= \underbrace{M_1M_2\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}}_{M_3}\cdot\alpha_2^{t} = M_3\alpha_2^{t}.$$

Άρα $\|\underline{y}_t\|$ είναι εκθετικά φραγμένη και επομένως $\hat{\underline{y}}(z)$ είναι καλά ορισμένη (δυναμοσειρά συγκλίνει στο $\{z: |z|>\alpha_2\}$.

$\square$

Παρατήρηση: Από την ιδιότητα συνέλιξης έχουμε

$$y_t = G_t * u_t = \sum_{k=0}^{t} G(t-k)\,\underline{u}(k) \Leftrightarrow \hat{\underline{y}}(z) = \hat{G}(z)\,\hat{\underline{u}}(z)$$

Ορισμός: Η συνάρτηση $\hat{G}(z) \in \mathbb{R}(z)^{p \times m}$ ονομάζεται συνάρτηση μεταφοράς του (γραμμικού-αιτιατού-χρονικά αναλλοίωτου) συστήματος G_Σ.

Συστήματα καταστάσεως-χώρου (state-space) διακριτού χρόνου

Ορίζονται από εξισώσεις της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} x_i(k+1) &= f_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots u_m(k)) \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, n \\ y_i(k) &= g_i(k, x_1(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots u_m(k)) \\ & \qquad\qquad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned}\right\}$$

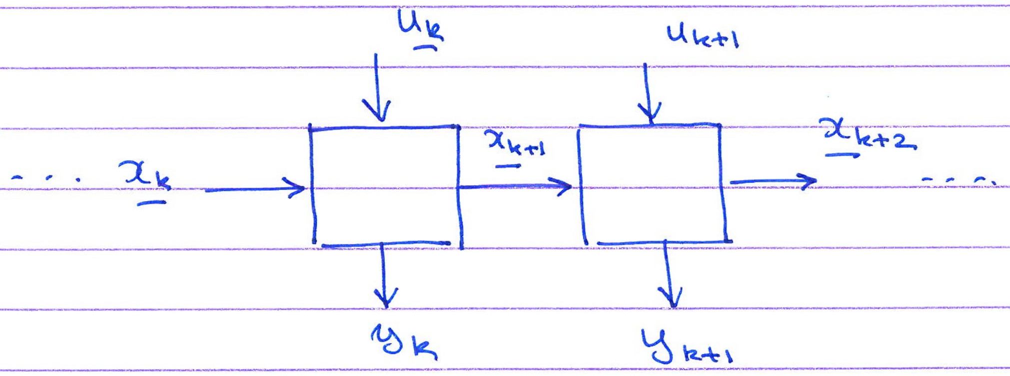
Σε πιο συμπαγή μορφή:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{f}(k, \underline{x}(k), \underline{u}(k)) \\ \underline{y}(k) &= \underline{g}(k, \underline{x}(k), \underline{u}(k)) \end{aligned}\right\}$$

όπου: $\underline{f} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\underline{g} : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

Το διάνυσμα $\underline{x}(k)$ λέγεται διάνυσμα κατάστασης, το $\underline{u}(k)$ διάνυσμα εισόδων και το $\underline{y}(k)$ διάνυσμα εξόδων.

Παρατηρούμε ότι αν $(\underline{x}(k), \underline{u}(k))$ είναι γνωστά διανύσματα τότε $(\underline{x}(k+1), \underline{y}(k))$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα



Το διάνυσμα κατάστασης "συμπυκνώνει" όλη την πληροφορία για την εξέλιξη του συστήματος μέχρι την χρονική στιγμή $k \in \mathbb{N}_0$.

Γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα.

Συστήματα εξισώσεων της μορφής:

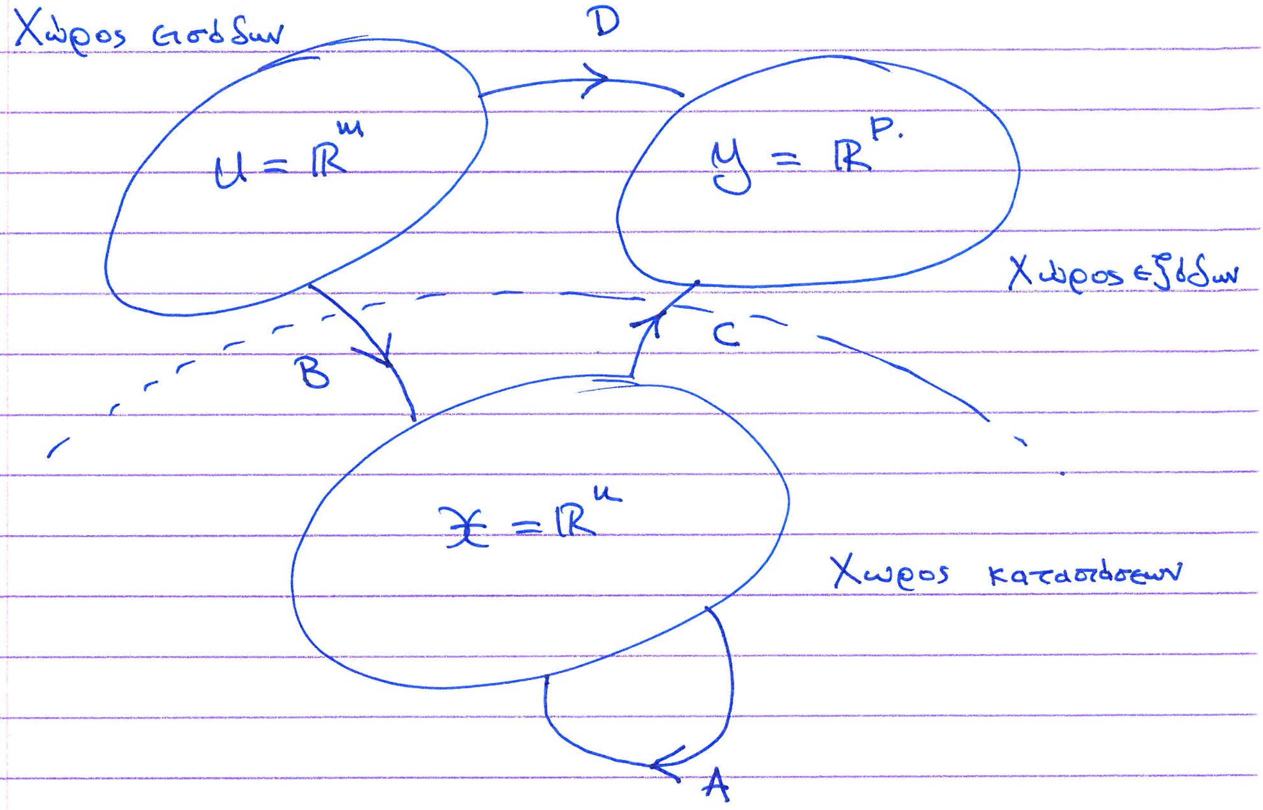
$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A(k)\,\underline{x}_k + B(k)\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C(k)\,\underline{x}_k + D(k)\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

όπου $A: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $C: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{p\times m}$

Γραμμικά χρονικά αναλλοίωτα συστήματα

Της μορφής:
$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A\,\underline{x}_k + B\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C\,\underline{x}_k + D\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\}$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ και $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$



Απόκριση γραμμικών συστημάτων διακριτού χρόνου.

Εξετάζουμε πρώτα το σύστημα μηδενικής εισόδου (ομογενές)
$\underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k$, $\underline{x}_{k_0} = \underline{x}_0$. Έχουμε:

$$\underline{x}_k = A_{k-1}\underline{x}_{k-1} = A_{k-1}A_{k-2}\underline{x}_{k-2} = \cdots =$$

$$= \underbrace{A_{k-1}A_{k-2}\cdots A_{k_0}}_{\Phi(k,k_0)}\underline{x}_{k_0}$$

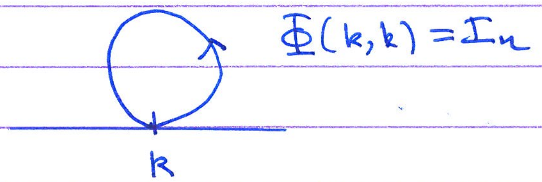
όπου $\Phi(k,k_0)$ ο πίνακας μεταφοράς, $\Phi(k,k_0) = \prod_{i=k_0}^{k-1} A_i$

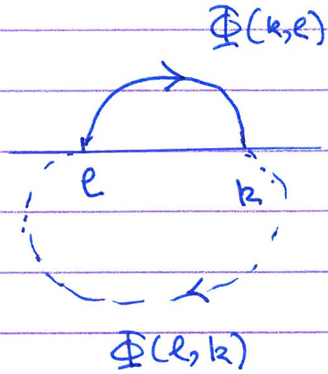
Ιδιότητες: (i) $\Phi(k,k) = I_n$

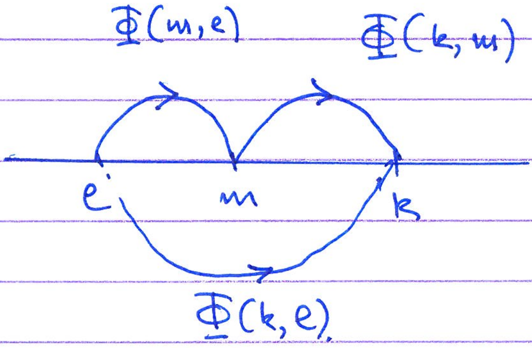
(ii) $\Phi(k,\ell) = \Phi(k,m)\,\Phi(m,\ell) \quad k \geq m \geq \ell$

(iii) Ο πίνακας $\Phi(k,\ell)$ είναι αντιστρέψιμος

αν καί μόνο αν οι πίνακες $A_{k-1}, A_{k-2}, \dots \cancel{A_{k_0}}\ A_\ell$ είναι αντιστρέψιμοι, οπότε $\Phi^{-1}(k,\ell) = \Phi(\ell,k)$.
(~~Παρατήρηση~~: Ο πίνακας μεταφοράς σέ συστήματα συνεχούς χρόνου είναι πάντα αντιστρέψιμος).







Γιά χρονικά αναλλοίωτο σύστημα (μηδενικής εισόδου)
$x_{k+1} = A x_k$ έχουμε $x_k = A^{k-k_0} \underline{x}_{k_0}$ $\quad (A^0 = I)$
οπότε $\Phi(k,k_0) := \hat{\Phi}(k-k_0) = A^{k-k_0}$

Γιά γραμμικό σύστημα μέ μή-μηδενική εισόδους:

$$\underline{x}_k = A_{k-1}\underline{x}_{k-1} + B_{k-1}\underline{u}_{k-1}$$

$$= A_{k-1}\left(A_{k-2}x_{k-2} + B_{k-2}\underline{u}_{k-2}\right) + B_{k-1}\underline{u}_{k-1}$$

$$= \underbrace{A_{k-1}A_{k-2}}_{\Phi(k,k-2)}\underline{x}_{k-2} + \underbrace{A_{k-1}}_{\Phi(k,k-1)}B_{k-2}\underline{u}_{k-2} + \underbrace{I}_{\Phi(k,k)}B_{k-1}\underline{u}_{k-1}$$

$$= \Phi(k,k-2)\underline{x}_{k-2} + \sum_{j=k-2}^{k-1}\Phi(k,j+1)B_j\underline{u}_j$$

Καί επαγωγικά:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_k &= \Phi(k,k_0)\,\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k,j+1)\,B_j\,\underline{u}_j \\ \underline{y}_k &= C_k\,\Phi(k,k_0)\,\underline{x}_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} C_k\,\Phi(k,j+1)\,B_j\,\underline{u}_j \\ &\quad + D_k\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\}$$

Σέ γραμμικά, χρονικά αναλλοίωτα συστήματα:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_k &= A^{k-k_0}\,\underline{x}(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-j-1}\,B\,\underline{u}_j \\ y_k &= CA^{k-k_0}\,\underline{x}(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} CA^{k-j-1}\,B\,\underline{u}_j + D u_k \end{aligned}\right\}.$$

Χωρίς βλάβη γενικότητας σέ χρονικά αναλλοίωτα συστήματα θέτουμε $k_0=0$ καί

$$\left.\begin{aligned} x_k &= A^k\,\underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}\,B\,u_j \\ y_k &= CA^k\,\underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1}\,B\,u_j + D u_k \end{aligned}\right\}.$$

Αν $\underline{x}_0=\underline{0}$: $y_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1}\,B\,u_j + D u_k$

$$:= \sum_{j=0}^{k} G(k-j)\,u_j$$

$$\cancel{\overset{j=k}{\Rightarrow}\ G_0 = D}$$

$$\cancel{\underset{0\le j<k}{\Rightarrow}\ G(k-j) = CA^{k-j-1}B \Rightarrow G(k) = CA^{k-1}B}$$

$j=k$

$$\Longrightarrow \quad \cancel{G(0)=D} \quad G(0) = D.$$

$0 \leq j < k$

$$\Longrightarrow \quad G(k-j) = CA^{k-j-1}B \iff G(n) = CA^{n-1}B, \; n \geq 1$$

Η ακολουθία $\{G(k)\}_{k=0}^{\infty} = \{D, CB, CAB, CA^2B, \dots\}$ είναι η ακολουθία συντελεστών Markov. Επομένως

$$y_t = (G_\Sigma u)_t = D\underline{u}_t + CB\underline{u}_{t-1} + CAB\,u_{t-2} + \dots + CA^{t-1}B\,\underline{u}_0$$

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα σε επόμενο Θεώρημα, γιά την απόδειξη του οποίου χρειαζόμαστε τα επόμενα δύο Λήμματα.

<u>Λήμμα</u>. Έστω $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$. Τότε $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ οπου $\|\cdot\|$ η φασματική νόρμα (μέγιστη ιδιάζουσα τιμή). Επομένως $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Απόδειξη</u>: Γιά κάθε $\underline{x} \in \mathbb{R}^q$: $\|AB\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|B\underline{x}\|$ (φασματική νόρμα επάγεται από την ευκλείδεια νόρμα διανυσμάτων). Άρα γιά κάθε $\underline{x} \in \mathbb{R}^q$, $\|x\| \leq 1$:

$$\max\{\|AB\underline{x}\| : \underline{x} \in \mathbb{R}^q, \|x\| \leq 1\}$$

$$\leq \|A\| \cdot \max\{\|Bx\| : x \in \mathbb{R}^q, \|x\| \leq 1\} = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Ειδικά $\|A^2\| \leq \|A\| \cdot \|A\| = \|A\|^2$ και επαγωγικά $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $S_t(z) = \sum_{k=1}^{t} A^{k-1} z^{-k} = z^{-1} I_n + z^{-2} A + \dots + z^{-t} A^{t-1}$

Αν $|z| > \|A\|$ η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση $(zI_n - A)^{-1}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $|z| > \|A\|$ και $\gamma =: \frac{\|A\|}{|z|} < 1$. Τότε

$$\|S_t(z)\| = \|z^{-1} I_n + z^{-2} A + \dots + z^{-t} A^{t-1}\|$$

$$= |z|^{-1} \| I_n + z^{-1} A + \dots + z^{-t+1} A^{t-1} \|$$

$$\leq |z|^{-1} \left(1 + \frac{\|A\|}{|z|} + \dots + \frac{\|A^{t-1}\|}{|z|^{t-1}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\|A\|} \left(1 + \frac{\|A\|}{z} + \dots + \frac{\|A\|^{t-1}}{|z|^{t-1}}\right)$$

$$\leq \frac{1}{\|A\|} \left(1 + \gamma + \gamma^2 + \dots + \gamma^{t-1}\right) \rightarrow \frac{1}{\|A\|(1-\gamma)}$$

καθώς $t \to \infty$.

Επομένως η σειρά συγκλίνει και για $z \neq 0$:

$$(zI_n - A)\, S_t(z) = (zI_n - A)\left(z^{-1} I_n + z^{-2} A + \cdots + z^{-t} A^{t-1} \right) =$$

$$= I_n + \cancel{z^{-1} A} + \cdots + \cancel{z^{-t+1} A^{t-1}} - \cancel{z^{-1} A} - \cancel{z^{-2} A^{2}} - \cdots - z^{-t} A^{t}$$

$$= I_n - z^{-t} A^{t} \rightarrow I_n \quad \text{αν} \quad |z| > \|A\|.$$

Επομένως: $$(zI_n - A) \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} = I_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} = (zI_n - A)^{-1} \quad , |z| \geq \|A\|$$

Παρατηρούμε ότι ο αντίστροφος πίνακας $(zI_n - A)^{-1}$ είναι καλά ορισμένος για $|z| > \|A\|$ αφού $\|A\| > \rho(A)$ (φασματική ακτίνα του A, $\rho(A) = \max\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}$.).

<u>Θεώρημα:</u> Το σύστημα καταστάσεων χώρου

$$\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k \ , \ \underline{y}_k = C \underline{x}_k + D \underline{u}_k \ , \ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

αντιστοιχεί σε αιτιατό, γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(z) = D + C(zI_n - A)^{-1} B$.

<u>Απόδειξη:</u> Η λύση της εξίσωσης $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k$, για $\underline{x}_0 = \underline{0}$ είναι

$$\underline{x}_t = \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B\, \underline{u}_k \quad , t \geq 0.$$

που αντιστοιχεί σε σύστημα εισόδου-εξόδου:

$$y_t = (G_\Sigma u)_t = \sum_{k=0}^{t-1} CA^{t-k-1} B \underline{u_k} + D\underline{u_t}, \quad t \geq 0$$

Η ακολουθία πινάκων $(CA^{k-1}B)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι εκθετικά φραγμένη αφού:

$$\| CA^{k-1} B \| \leq \|C\| \cdot \|B\| \cdot \|A\|^{k-1} = M \alpha^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

όπου $M = \|C\| \cdot \|B\|$ και $\alpha = \|A\|$. Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς:

$$\hat{G}(z) = D + \sum_{k=p}^{\infty} CA^{k-1} B z^{-k}$$
$$= D + C\left(\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} \right) B$$

είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει γιά αρκούντως μεγάλο $|z|$. Πράγματι από τό προηγούμενο Λήμμα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} z^{-k} = (zI_n - A)^{-1}, \quad |z| > \|A\|$$

και επομένως $\hat{G}(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$. $\square$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί νά βρεθεί πιό άμεσα από τις εξισώσεις που ορίζουν τό σύστημα κατάστασης μέ χρήση των ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Z. Πράγματι, αν $Z\{\underline{x}_k\} = \hat{\underline{x}}(z)$, $Z\{\underline{y}_k\} = \hat{\underline{y}}(z)$ και $Z\{\underline{u}_k\} = \hat{\underline{u}}(z)$, τότε γιά $|z| > \|A\|$

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \Rightarrow z\hat{\underline{x}}(z) - z\underline{x}_0 = A\hat{\underline{x}}(z) + B\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow (zI_n - A)\hat{\underline{x}}(z) = z\underline{x}_0 + B\hat{\underline{u}}(z)$$

$$\Rightarrow \underline{\hat{x}}(z) = z(zI_n - A)^{-1}\underline{x_0} + (zI_n - A)^{-1}B\,\underline{\hat{u}}(z)$$

Επίσης,

$$\underline{y_k} = C\underline{x_k} + D\,\underline{u_k} \Rightarrow \underline{\hat{y}}(z) = C\,\underline{\hat{x}}(z) + D\,\underline{\hat{u}}(z)$$

και επομένως αν $\underline{x_0} = \underline{0}$,

$$\underline{\hat{y}}(z) = \left(D + C(zI_n - A)^{-1}B\right)\hat{u}(z)$$

$$\Rightarrow \hat{G}(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$$

η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος. Έστω

$$\varphi(z) = \det(zI_n - A) \quad , \deg(\varphi(z)) = n = \dim(A)$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A. Τότε

$$\hat{G}(z) = C\,\frac{\operatorname{adj}(zI_n - A)}{\varphi(z)}\,B + D$$

$$= \frac{C\operatorname{adj}(zI_n - A)B + D\varphi(z)}{\varphi(z)} := \frac{N(z)}{\varphi(z)}$$

όπου $N(z) \in \mathbb{R}^{p\times m}[z]$. Παρατηρούμε ότι $\hat{G}(z)$ είναι ρητή συνάρτηση της μεταβλητής z (~~δηλαδή λόγος δύο πολυω~~), δηλαδή τα στοιχεία $G_{ij}(z)$ του $G(z)$ είναι λόγος δύο πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές, δηλ

$$\hat{G}_{ij}(z) = \frac{N_{ij}(z)}{\varphi(z)} \quad , \quad i = 1,2,\dots,\cancel{m}\,p \quad , \quad j = 1,2,\dots,\cancel{p}\,m.$$

και επομένως:

Από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι κάθε σύστημα καταστάσεων χώρου (πού αντιστοιχεί σέ αιτιατό, γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα εισόδου-εξόδου) έχει ρητή και κανονική συνάρτηση μεταφοράς. Το ερώτημα πού προκύπτει είναι αν ισχύει και το αντίθετο;

<u>Πρόβλημα</u>: Έστω $\hat{G}(z)$ ρητή και κανονική συνάρτηση μεταφοράς αιτιατού, γραμμικού και χρονικά αναλλοίωτου συστήματος εισόδου-εξόδου. Μπορεί (πάντα) νά εκφραστεί τό σύστημα σέ μορφή καταστάσεως χώρου; Αν ναί, ~~η~~ ~~έκφραση~~ μέ μοναδικό τρόπο;

Η απάντηση στό πρώτο ερώτημα είναι καταφατική, ενώ στό δεύτερο ερώτημα είναι αρνητική.

<u>Λήμμα</u>. Έστω ~~πολυώνυμα πίνακες~~ πολυωνυμικοί πίνακες:

$$N(z) = N_0 + N_1 z + N_2 z^2 + \dots + N_{\ell-1} z^{\ell-1}, \quad N_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

και

$$D(z) = D_0 + D_1 z + D_2 z^2 + \dots + D_{\ell-1} z^{\ell-1} + I_m z^{\ell}$$

και

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & I_m \\ -D_0 & -D_1 & \cdots & -D_{\ell-2} & -D_{\ell-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \cdots & N_{\ell-2} & N_{\ell-1} \end{bmatrix}, \quad D = [0].$$

Επομένως,

$$(D_0 + D_1 z + \cdots + D_{\ell-2} z^{\ell-2} + D_{\ell-1} z^{\ell-1} + I z^{\ell}) X_0 = I_n$$

$$\Rightarrow X_0 = (D_0 + D_1 z + \cdots + D_{\ell-1} z^{\ell-1} + I z^{\ell})^{-1}$$

και

$$\underline{X}(z) = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{\ell-2} \\ X_{\ell-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ zI \\ z^2 I \\ \vdots \\ z^{\ell-2} I \\ z^{\ell-1} I \end{bmatrix} (D_0 + D_1 z + \cdots + D_{\ell-1} z^{\ell-1} + I z^{\ell})^{-1}$$

$$\Rightarrow C(zI - A)^{-1} B = C \underline{X}(z) =$$

$$= [N_0 \; N_1 \; \cdots \; N_{\ell-1}] \begin{bmatrix} I \\ zI \\ \vdots \\ z^{\ell} I \end{bmatrix} (D_0 + D_1 z + \cdots + D_{\ell-1} z^{\ell-1} + I z^{\ell})^{-1}$$

$$= (N_0 + N_1 z + \cdots + N_{\ell-1} z^{\ell-1})(D_0 + D_1 z + \cdots + D_{\ell-1} z^{\ell-1} + I z^{\ell})^{-1}$$

$$= N(z) D^{-1}(z). \qquad \square$$

<u>Θεώρημα</u>: Η απεικόνιση εισόδων-εξόδων ενός αιτιατού, γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος ~~μπορεί~~ εκφράζεται σε μορφή συστήματος κατάστασης-χώρου αν και μόνο αν η συνάρτηση μεταφοράς του είναι ρητή και κανονική συνάρτηση.

Απόδειξη: Έστω σύστημα εισόδου-εξόδου της μορφής

$$y_t = (G_{\underline{u}})_t = \sum_{k=1}^{t} G(t-k)\, \underline{u_k} \quad , t \geq 0$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$\hat{G}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k) z^{-k}$$

Από την υπόθεση $\hat{G}(z)$ είναι ρητή κανονική συνάρτηση. Εφόσον $\hat{G}(z)$ κανονική, τότε

$$\lim_{|z|\to\infty} \hat{G}(z) = \lim_{|z|\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} G(k) z^{-k} = G(0)$$

Επομένως: $\hat{G}(z) = G(0) + K(z)$, $\lim_{|z|\to\infty} K(z) = 0$.

Δηλ. $K(z)$ είναι ρητή και αυστηρά κανονική συνάρτηση. Έστω $k_{ij}(z)$ το (i,j)-στοιχείο της $K(z)$, που γράφεται χωρίς βλάβη γενικότητας ως:

$$k_{ij}(z) = \frac{p_{ij}(z)}{q_{ij}(z)} \quad , p_{ij} \in \mathbb{R}[z],\ q_{ij} \in \mathbb{R}[z]$$

και $q_{ij}(z)$ μονικό (συντελεστής μεγαλύτερου σε βαθμό όρου $=1$). Έχουμε $\deg[p_{ij}(z)] < \deg[q_{ij}(z)]$ $\forall i = 1,2,\ldots p$ και $j = 1,2,\ldots,m$. Έστω

$$r(z) = \prod_{i,j} q_{ij}(z) \quad , N(z) = r(z) K(z).$$

Τότε $N(z)$ πολυωνυμικός πίνακας και

$$N(z) = N_0 + N_1 z + \cdots + N_{\ell-1} z^{\ell-1} \quad , \ell \leq \deg[r(z)].$$

Θέτουμε:

$$D(z) = r(z)\, I_m$$

Τότε το $D(z)$ είναι μονικός πολυωνυμικός πίνακας (δηλ. ο συντελεστής του μεγαλύτερου σε βαθμό όρου είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_m) και $K(z) = N(z) D^{-1}(z)$. Επομένως από το προηγούμενο Λήμμα υπάρχουν πίνακες A, B και C έτσι ώστε

$$K(z) = C(zI - A)^{-1} B \quad , z \notin \sigma(A)$$

Επομένως: $G(t) = CA^{t-1}B$, $(t \geq 1)$, $G(0) = D$ και το σύστημα G_Σ έχει αναπαράσταση συστήματος καταστάσεων χώρου με πραγματοποίηση (A, B, C, D). $\square$

Ισοδύναμα συστήματα.

Έστω γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα:

$$\Sigma(A,B,C,D) : \left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \end{aligned}\right\}.$$

$(k\geq 0)$. Ορίζουμε το νέο διάνυσμα κατάστασης:

$$\underline{z}_k = T^{-1}\underline{x}_k \iff T\underline{z}_k = \underline{x}_k$$

όπου $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(T)\neq 0$. Τότε,

$$\left.\begin{aligned} T^{-1}\underline{x}_{k+1} &= T^{-1}AT\cdot T^{-1}\underline{x}_k + T^{-1}B\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= CT\cdot T^{-1}\underline{x}_k + D\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\}.$$

και επομένως

$$\left.\begin{aligned} \underline{z}_{k+1} &= (T^{-1}AT)\,\underline{z}_k + (T^{-1}B)\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= (CT)\,\underline{z}_k + D\,\underline{u}_k \end{aligned}\right\}.$$

Τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα ως προς την σχέση εισόδου-εξόδου. Γράφουμε:

$$\Sigma(A,B,C,D) \overset{T}{\sim} \Sigma(T^{-1}AT,\, T^{-1}B,\, CT,\, D)$$

Ο πίνακας T είναι "μετασχηματισμός ισοδυναμίας".
Παρατηρούμε ότι κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας

(i) Τό φάσμα του πίνακα A είναι αναλλοίωτο:

$$\sigma(A) = \sigma(T^{-1}AT)$$

(μετασχηματισμός ομοιότητας)

(ii) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι αναλλοίωτη:

$$\hat{G}_1(z) = CT \cdot [zI - T^{-1}AT]^{-1} T^{-1}B + D$$

$$= CT\,[T^{-1}(zI-A)T]^{-1} T^{-1}B + D$$

$$= C(zI-A)^{-1}B + D = \hat{G}_2(z).$$

(iii) Η ακολουθία Markov είναι αναλλοίωτη. Στίς αρχικές συντεταγμένες:

$$G_0 = D, \quad G_i = CA^{i-1}B \qquad i=1,2,3,\ldots$$

Στίς νέες συντεταγμένες:

$$\tilde{G}_0 = D, \quad \tilde{G}_i = CT[T^{-1}AT]^{i-1}T^{-1}B$$

$$= CT \cdot T^{-1}A^{i-1}TT^{-1}B =$$

$$= CA^{i-1}B = G_i \qquad (i=1,2,\ldots).$$

Οι σχέσεις αυτές είναι προφανείς αφού η σχέση εισόδου-εξόδου είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας.

<u>Παρατήρηση</u>: Από την ισοδυναμία συστημάτων καταστάσεων χώρου είναι προφανές ότι η "πραγματοποίηση" συστήματος από την συνάρτηση μεταφοράς δέν είναι μοναδική.

Παρατήρηση: Μια δεύτερη "πηγή" μη-μοναδικότητας στό πρόβλημα πραγματοποίησης προκύπτει από ~~την~~ φαινόμενα μη ελεγξιμότητας/παρατηρησιμότητας ~~του~~ (που ορίζονται στη συνέχεια).
~~Εδω~~ Εστω τό παρακάτω απλό παράδειγμα: Εστω σύστημα μέ πραγματοποίηση

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix} x^1_{k+1} \\ x^2_{k+1} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x^1_k \\ x^2_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x^1_k \\ x^2_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u_k \end{aligned}\right\}.$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$\hat{G}(z) = [1 \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [1 \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$= \frac{1}{z-1}.$$

πού ταυτίζεται μέ την συνάρτηση μεταφοράς του ~~state~~ συστήματος

$$\xi_{k+1} = \xi_k + u_k, \quad y_k = \xi_k.$$

Οι ακολουθίες Markov είναι (προφανώς) επίσης ίσες. Τό πρώτο σύστημα έχει $G(0)=0$. ~~και~~ Εφόσον $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k \geq 0$

$$G(i) = CA^{i-1}B = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1 & (i-1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \forall i \geq 1.$$

και επομένως η ακολουθία Markov και για τα δύο συστήματα είναι η $G(i) = \{0, 1, 1, \dots\}$, $i \geq 0$

__Ορισμός:__ Έστω σύστημα καταστάσεων χώρου Σ με πραγματοποίηση (A,B,C,D). Ορίζουμε ως "διάσταση" της πραγματοποίησης την διάσταση του πίνακα A, δηλ. αν $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $\dim(A,B,C,D)=n$.

__Παρατήρηση:__ (i) Η διάσταση πραγματοποιήσεων πού προκύπτουν από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας είναι η ίδια.
(ii) Τό ~~παράδειγμα~~ προηγούμενο παράδειγμα δείχνει ότι ένα σύστημα εισόδου-εξόδου μπορεί νά έχει πραγματοποιήσεις μέ διαφορετική διάσταση.

__Ορισμός:__ Μία πραγματοποίηση γραμμικού-αιτιατού-χρονικά αναλλοίωτου συστήματος εισόδου-εξόδου Σ θά λέγεται "ελάχιστη" αν (σέ σχέση μέ κάθε άλλη πραγματοποίηση του Σ) έχει τήν ελάχιστη δυνατή διάσταση.

__Παρατήρηση:__ Έστω σύστημα καταστάσεων μέ συνάρτηση μεταφοράς μίας εισόδου-εξόδου

$$\hat{g}(z)=\frac{n(z)}{\varphi(z)}$$

όπου ~~$n(z)$ καί~~ $\varphi(z)$ πολυώνυμα. Έστω (A,B,C,D) μία πραγματοποίηση του $\hat{g}(z)$ μέ $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Αν $\varphi(z)$ είναι τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, τότε $\deg[\varphi(z)]=n$.
~~Επ.~~ Καί

$$\hat{g}(z)=\frac{n(z)}{\varphi(z)}=\frac{C\,\mathrm{adj}[zI-A]B+D}{\varphi(z)}.$$

Έστω $(\hat{A},\hat{B},\hat{C},\hat{D})$ μία δεύτερη πραγματοποίηση του $\hat{g}(z)$ μέ $A\in\mathbb{R}^{n_1\times n_1}$, $n_1<n$. Τότε

$$\hat{g}(z)=\frac{n(z)}{\varphi(z)}=\frac{\hat{n}(z)}{\hat{\varphi}(z)},\quad \hat{\varphi}(z)=\det[zI_{n_1}-A_1].$$

Προφανώς, ο μόνος τρόπος ώστε να ισχύει η ισότητα είναι η ύπαρξη κοινού ~~παράγοντα~~ διαιρέτη στα πολυώνυμα $(n(z), \varphi(z))$ ~~απο~~ βαθμού τουλάχιστον $n-n_1$. Στην περίπτωση συστημάτων μιας εισόδου-εξόδου προκύπτει ότι ελάχιστη διάσταση πραγματοποίησης ~~προκυπ~~ είναι ίση με ~~του~~ $\deg[\varphi(z)]$ αν η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$\hat{G}(z) = \frac{n(z)}{\varphi(z)}. \qquad \text{καί } (n(z), \varphi(z)) \text{ πρώτα πολυώνυμα.}$$

Στην γενική (πολυμεταβλητή) περίπτωση ~~η πολυώνυ~~ ο αριθμητής είναι πολυωνυμικός πίνακας και ο ορισμός ~~του~~ της ελάχιστης διάστασης μέσω ~~πολυωνυμικ~~ της συνάρτησης μεταφοράς είναι περισσότερο πολύπλοκος.

Διακριτοποίηση συνεχούς γραμμικού συστήματος και συστήματα ανάδρασης

Πολλές φορές τα μοντέλα διακριτών συστημάτων προκύπτουν από την διακριτοποίηση συστημάτων συνεχούς χρόνου. Έστω γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα χώρου καταστάσεων συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\Sigma: \quad \underline{x}'(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t), \quad \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t)$$

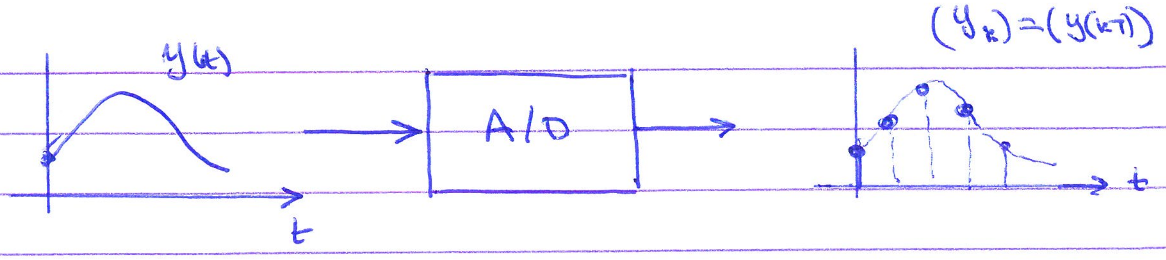
Για την διακριτοποίηση του συστήματος εφαρμόζουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς.

(α) Εφαρμόζουμε περιοδική δειγματοληψία της συνεχούς συνάρτησης $\underline{y}(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας T, από την οποία προκύπτει διακριτή συνάρτηση (ακολουθία) εξόδου.

$$(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = (y(kT))_{k\in\mathbb{N}_0}.$$

Υποθέτουμε χωρίς βλάβη γενικότητας ότι το πρώτο ψηφιακό σήμα εξόδου y_0 προκύπτει την χρονική στιγμή ~~k=0~~ $kT=0$ (~~δείκτ~~ χρονικός δείκτης $k=0$). Ηλεκτρονικά η διαδικασία αυτή υλοποιείται μέσω ενός Αναλογικού/Ψηφιακού μετατροπέα (Analogue/Digital converter) στην κάρτα DAQ ψηφιακού υπολογιστή.

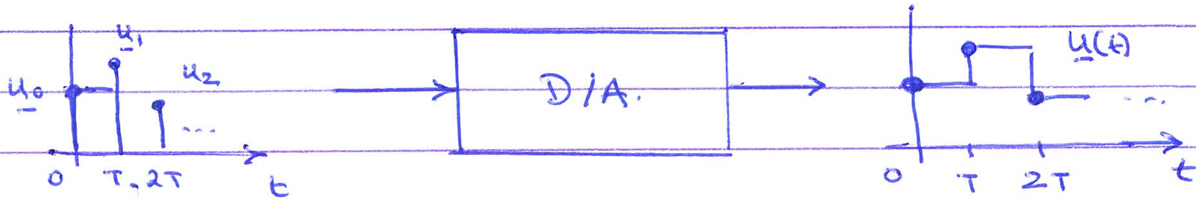
Διαγραμματικά:



(β) Έστω $\{u_k\}_{k\in \mathbb{N}_0}$ ψηφιακό σήμα (ακολουθία διακριτού χρόνου που επιθυμούμε να εφαρμόσουμε στην είσοδο του ισοδύναμου διακριτού συστήματος περιοδικά (με την ίδια χρονική περίοδο T και στις ίδιες χρονικές στιγμές στις οποίες ορίζεται η δειγματοληψία του σήματος εξόδου). Για να εφαρμόσουμε ~~την~~ το σήμα αυτό στην είσοδο του συστήματος συνεχούς χρόνου Σ πρέπει να μετατρέψουμε την ακολουθία (ψηφιακό σήμα) σε συνάρτηση συνεχούς χρόνου (αναλογικό σήμα). Συνήθως ορίζουμε την συνάρτηση (σήμα εισόδου) ως εξής:

$$u(t) = u_k \quad , \quad kT \le t < (k+1)T$$

όπου $k \in \mathbb{N}_0$. Ηλεκτρονικά η διαδικασία αυτή υλοποιείται ~~από μετατροπέα τύπου ZOH (zero-order-hold). Σχηματικά~~ μέσω Ψηφιακού/Αναλογικού μετατροπέα ZOH (zero-order-hold). Σχηματικά



Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση εισόδου $u(t)$ είναι τμηματικά συνεχής

Τό σύστημα συνεχούς χρόνου μεταξύ δύο μετατροπέων στην είσοδο και έξοδο του συστήματος είναι ισοδύναμο με σύστημα διακριτού χρόνου:

$$\{\underline{u}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow \boxed{D/A} \xrightarrow{\underline{u}(t)} \boxed{\Sigma:\ \begin{array}{l}\dot{\underline{x}} = A\underline{x}+B\underline{u} \\ \underline{y} = C\underline{x}+D\underline{u}\end{array}} \xrightarrow{\underline{y}(t)} \boxed{A/D} \longrightarrow \{\underline{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$$

$\underline{x}_0(0)$

$$\equiv$$

$\cancel{x(0)}$ $\underline{x}_0 = \underline{x}(0)$

$$\{u_k\} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\Sigma_d:\ \underline{x}_{k+1} = F\underline{x}_k + G\underline{u}_k \\ y_k = Cx_k + Du_k\end{array}} \longrightarrow \{y_k\}$$

Το ισοδύναμο (ως προς την απεικόνιση $\{u_k\}\to\{y_k\}$) διακριτό σύστημα προκύπτει από τους παρακάτω υπολογισμούς:

Η απόκριση του συστήματος Σ είναι:

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \qquad t\geq 0$$

$$\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\,u(\tau)\,d\tau + Du(t).$$

Έστω $x_k = x(kT)$, $k\in\mathbb{N}_0$ όπου T η περίοδος δειγματοληψίας. και $u_k = u(kT)$. Τότε:

$$\underline{x}_{k+1} = e^{A(k+1)T}\underline{x}_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau \quad (*)$$

$$\underline{x}_k = e^{AkT}\underline{x}_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau.$$

$$\Rightarrow e^{AT}\underline{x}_k = e^{A(k+1)T}\underline{x}_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT+T-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau. \quad (**)$$

Αφαιρώντας την (**) από την (*) έχουμε:

$$\underline{x}_{k+1} - e^{AT}\underline{x}_k = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau.$$

Εφόσον $u(\tau) = u_k$ στο διάστημα $\tau \in [kT, (k+1)T)$,

$$\underline{x}_{k+1} - e^{AT}\underline{x}_k = \left(\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)} B\,d\tau\right)\underline{u}_k.$$

Με αλλαγή μεταβλητών:

$$\lambda = kT + T - \tau \Rightarrow d\lambda = -d\tau$$

$$\tau = kT \Rightarrow \lambda = T, \quad \tau = (k+1)T \Rightarrow \lambda = 0$$

έχουμε:

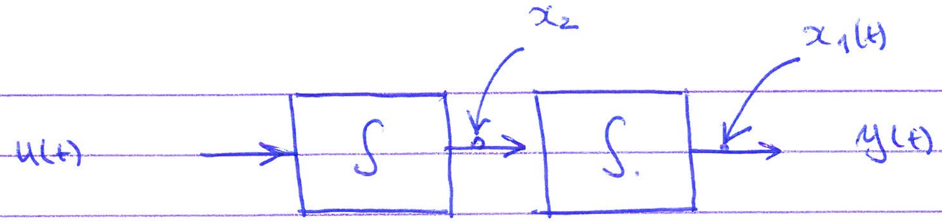
$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= e^{AT}\underline{x}_k + \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda\right) B\,\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \end{aligned}\right\}.$$

και το ισοδύναμο διακριτό σύστημα είναι:

$$\Sigma_d\,(F, G, C, D)$$

όπου: $F = e^{AT}$ και $G = \left(\int_0^T e^{A\lambda}\,d\lambda\right)B.$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω συνεχές σύστημα που αντιστοιχεί σε "διπλό ολοκληρωτή", δηλ.



Οι διαφορικές εξισώσεις πού περιγράφουν τό σύστημα είναι:

$$x_2' = u(t) \quad \text{καί} \quad x_1'(t) = x_2(t).$$

Επίσης: $y(t) = x_1(t)$ καί τό σύστημα κατάστασης είναι

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}\right\} \Sigma$$

Έστω ότι διακριτοποιούμε τό σύστημα μέ περίοδο δειγματοληψίας T. Τότε

$$F = e^{AT}, \quad G = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda\right) B, \quad e^{A\lambda} = I + A\lambda + \frac{A^2\lambda^2}{2!} + \cdots$$

Στην περίπτωση αυτή $A^k = 0$, $k \geq 2$ καί

$$e^{A\lambda} = I + A\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως: $F = e^{AT} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ καί

$$\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda = \begin{bmatrix} \int_0^T d\lambda & \int_0^T \lambda \, d\lambda \\ 0 & \int_0^T d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad G = \int_0^T e^{A\lambda}\, d\lambda = \begin{bmatrix} T & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

Και τό ισοδύναμο διακριτό σύστημα είναι:

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \end{bmatrix} + [0]\, u_k \end{aligned}\right\} \Sigma_d.$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$\hat{G}(z) = C(zI-A)^{-1}B = [1 \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}.$$

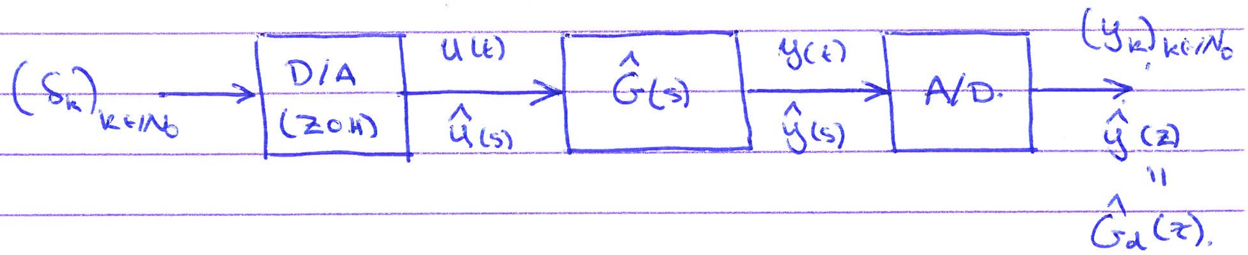
$$= [1 \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{T}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix}$$

$$= \frac{T^2/2}{z-1} + \frac{T^2}{(z-1)^2} = \frac{\frac{T^2}{2}(z-1) + T^2}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{T^2}{2} z + \frac{T^2}{2}}{(z-1)^2} = \frac{T^2}{2} \, \frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

Γενικά, έστω $\hat{G}(s)$ η συνάρτηση μεταφοράς τού συστήματος συνεχούς χρόνου (μιας εισόδου καί μιας εξόδου γιά απλούστευση). Ποιά είναι η ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς τού διακριτού συστήματος αν η περίοδος δειγματοληψίας είναι T; Από την προηγούμενη ανάλυση αν τό σύστημα συνεχούς χρόνου είναι σύστημα καταστάσεως χώρου, τό ίδιο ισχύει

Και για το ισοδύναμο διακριτό σύστημα. Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς του ισοδύναμου διακριτού συστήματος, έστω $\hat{G}_d(z)$ είναι ο μετασχηματισμός Z της κρουστικής του απόκρισης. Εφαρμόζουμε ~~είσοδο $(\delta_k)=(1,0,0)$~~ ακολουθία $(\delta_k)=(1,0,0,\dots)$ στην είσοδο του συστήματος:



Η συνάρτηση $u(t)$ στην έξοδο του μετατροπέα D/A (ZOH) είναι:

$$u(t) = \left.\begin{array}{ll} 1 & 0 \le t < T \\ 0 & t \ge T \end{array}\right\}.$$

με μετασχηματισμό Laplace $\hat{u}(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$.

Άρα

$$\hat{y}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}\hat{G}(s) = \frac{\hat{G}(s)}{s} - e^{-sT}\frac{\hat{G}(s)}{s}.$$

Έστω $w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\hat{G}(s)}{s}\right)$. Τότε,

$$y(t) = w(t) - w(t-T) \qquad t \ge 0$$

Και επομένως $(y_k) = (y(kT)) = \cancel{(w_k)-(w_{k-1})}$.

$$= (w_k - w_{k-1}).$$

όπου $(w_k) = (S_T w)(t) = S_T \mathcal{Z}^{-1}(\hat{w})(z)$ και S_T ο τελεστής δειγματοληψίας συνάρτησης $w(t)$ ~~πσ~~, ~~άρα~~ $w(t)=0$ για $t<0$, τις χρονικές στιγμές $\{kT\}_{k\ge 0} = \{0, T, 2T, \dots\}$. Εφόσον $\hat{y}(z) = (1-z^{-1})\hat{w}(z)$.

Εχουμε

$$\hat{G}_d(z) = \hat{y}(z) = (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}(w_k) =$$

$$= (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}(S_T(w(t))) =$$

$$= (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\{S_T(\mathcal{L}^{-1}(\hat{w}(s)))\}$$

$$= (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\{S_T(\mathcal{L}^{-1}(\frac{\hat{G}(s)}{s}))\}.$$

Αρα $\hat{G}_d(z) = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\{S_T(\mathcal{L}^{-1}(\frac{\hat{G}(s)}{s}))\}.$

Στην περίπτωση του παραδείγματος:

$$\hat{G}_d(z) = \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\{S_T(\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^3}))\}$$

$$= \frac{z-1}{z}\, \mathcal{Z}\{S_T(\frac{1}{2}t^2)\}$$

$$= \frac{z-1}{2z}\, \mathcal{Z}\{(kT)^2\}$$

$$= \cancel{\frac{z-1}{2z\,T^2}}\ \frac{T^2(z-1)}{2z}\, \mathcal{Z}\{k^2\}$$

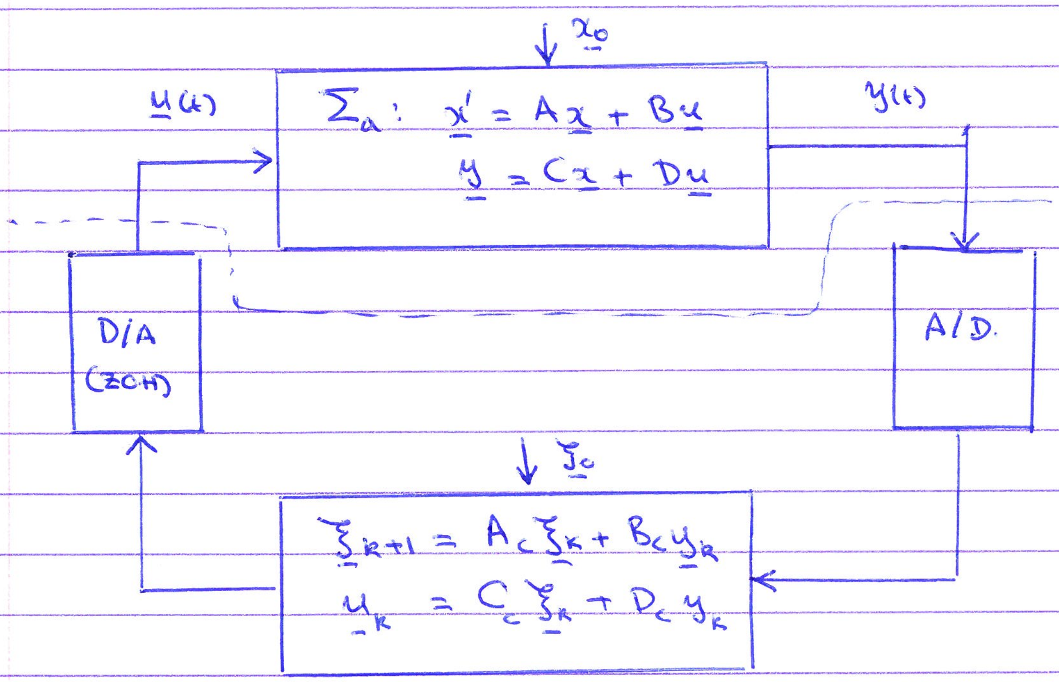
$$= \frac{T^2}{2}\, \frac{z-1}{\cancel{z}}\, \frac{\cancel{z}(z+1)}{(z-1)^{\cancel{3}\,2}}$$

$$= \frac{T^2}{2}\, \frac{z+1}{(z-1)^3}$$

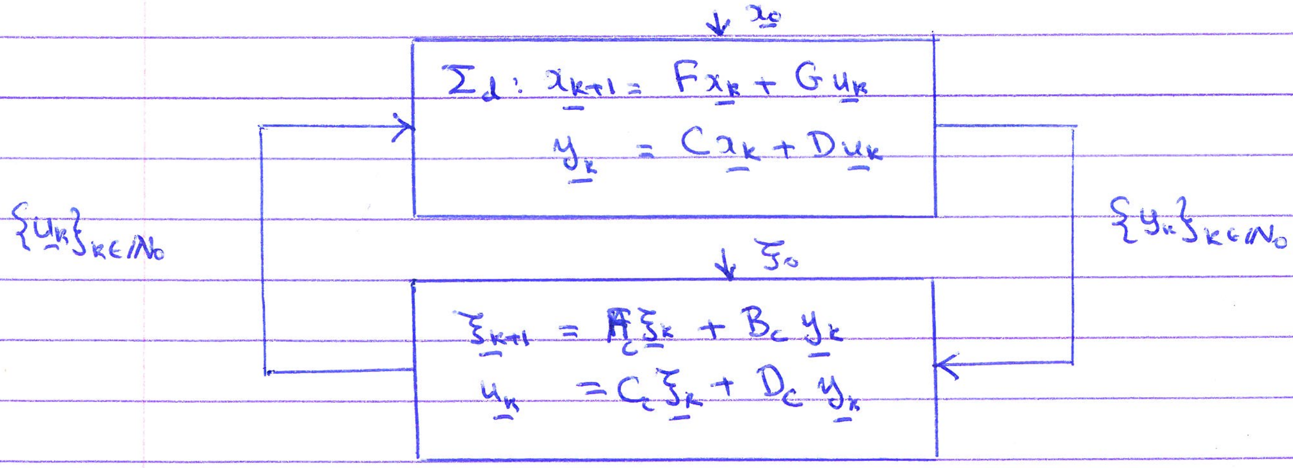
όπως προηγουμένως.

Συστήματα ανάδρασης

Η συνδεσμολογία συστήματος ψηφιακής ανάδρασης περιγράφεται από τό παρακάτω διάγραμμα.



Το σύστημα Σα είναι τό σύστημα συνεχούς χρόνου πού θέλουμε νά ελέγξουμε μέσω ψηφιακού αντισταθμιστή (ρυθμιστή), που υλοποιείται (μαζί μέ τους μετατροπείς D/A και A/D) εντός ψηφιακού υπολογιστή. Από την προηγούμενη ανάλυση τό σύστημα είναι ισοδύναμο μέ τό παρακάτω:



Τό σύστημα Σ_a ελέγχεται μέσω ψηφιακού αντισταθμιστή που είναι απλά αλγόριθμος που υλοποιείται εντός τού ψηφιακού υπολογιστή. Στή συγκεκριμένη περίπτωση επιζητούμε τήν μεταβολή των δυναμικών χαρακτηριστικων τού συνολικού συστήματος ("κλειστά βρόγχου") σύμφωνα με τις επιδιώξεις μας. (π.χ. σταθεροποίηση ασταθούς συστήματος, απόρριψη διαταραχών, μικρή ευαισθησία σέ σφάλματα μοντέλου, κλπ).
Οι παράμετροι του αντισταθμιστή επιλέγονται αυθαίρετα από τον σχεδιαστή του συστήματος ωστε νά επιτευχθούν οί παραπάνω στόχοι.

Τό ισοδύναμο σύστημα ("κλειστού βρόγχου") υπολογίζεται ως εξής:
Από τίς εξισώσεις των δύο συστημάτων έχουμε:

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + D(C_c\underline{\xi}_k + D_c\underline{y}_k)$$

$$\Rightarrow (I - DD_c)\underline{y}_k = C\underline{x}_k + DC_c\underline{\xi}_k$$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = \underbrace{(I-DD_c)^{-1}}_{L_1}C\,\underline{x}_k + \underbrace{(I-DD_c)^{-1}}_{L_1}DC_c\,\underline{\xi}_k$$

υπό την προυπόθεση οτι $\det(L_1) = \det(I - DD_c) \neq 0$ (οπότε τό σύστημα ανάδρασης είναι "καλά τοποθετημένο"). Επίσης

$$\underline{u}_k = C_c\underline{\xi}_k + D_c\underline{y}_k = C_c\underline{\xi}_k + D_c(C\underline{x}_k + D\underline{u}_k)$$

$$\Rightarrow (I - D_cD)\underline{u}_k = C_c\underline{\xi}_k + D_cC\,\underline{x}_k$$

$$\Rightarrow \underline{u}_k = \underbrace{(I-D_cD)^{-1}}_{L_2}D_cC\,\underline{x}_k + \underbrace{(I-D_cD)^{-1}}_{L_2}C_c\,\underline{\xi}_k$$

Επίσης

$$\underline{x}_{k+1} = F\underline{x}_k + G\left[L_2 C_c \underline{\xi}_k + L_2 D_c C \underline{x}_k\right]$$

$$\underline{\xi}_{k+1} = A_c \underline{\xi}_k + B_c\left[L_1 C \underline{x}_k + L_1 D C_c \underline{\xi}_k\right].$$

Ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{\xi}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} F + G L_2 D_c C & G L_2 C_c \\ B_c L_1 C & A_c + B_c L_1 D C_c \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{\xi}_k \end{bmatrix}.$$

που είναι της μορφής:

$$\underline{w}_{k+1} = A_{cl}\,\underline{w}_k \quad , \quad \underline{w}_k = \begin{pmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{\xi}_k \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{w}_0 = \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{\xi}_0 \end{pmatrix}.$$

και επομένως: $\quad \underline{w}_k = A_{cl}^k\,\underline{w}_0 \quad , \; k \geq 0.$

Το γενικό πρόβλημα ελέγχου είναι η επιλογή των παραμέτρων του αντισταθμιστή (A_c, B_c, C_c, D_c) ώστε το σύστημα "κλειστού βρόγχου" $\underline{w}_{k+1} = A_{cl}\,\underline{w}_k$ να έχει τις επιθυμητές ιδιότητες.

<u>Παρατήρηση</u>: Στην περίπτωση που $D=0$, $D_c=0$ το σύστημα κλειστού βρόγχου αναλύεται ως εξής:

$$A_{cl} = \cancel{\begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{\xi}_{k+1} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}.$$

$$:= F_a + G_a \left(\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & 0 \end{array}\right) C_a$$

Ανάδραση καταστάσεων.

Στην ειδική περίπτωση που τό διάνυσμα καταστάσεων χώρου $\underline{x}_k$ είναι προσβάσιμο (μετρήσιμο) μπορούμε νά χρησιμοποιήσουμε ανάδραση καταστάσεων της μορφής:

$$\underline{u}_k = K \underline{x}_k \quad , \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

όπου K ο πίνακας ανάδρασης πού πρέπει νά επιλέξουμε. Στην περίπτωση αυτή:

$$\underline{x}_{k+1} = F x_k + G u_k = F x_k + G K x_k.$$

και τό σύστημα κλειστού βρόχου είναι:

$$\underline{x}_{k+1} = A_{ce} \underline{x}_k \quad , \quad A_{ce} = F + GK.$$

Στην περίπτωση αυτή πρέπει να επιλέξουμε τόν πίνακα K ωστε ο πίνακας $A_{ce} = F + GK$ νά έχει τίς "επιθυμητές" ιδιότητες.

Παράδειγμα.

$$\text{Έστω}\quad \underline{x}_{k+1} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{F} \underline{x}_k + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{G} u_k$$

$$y_k = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \underline{x}_k + \underbrace{(0)}_{D} u_k$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \xi_k + y_k \\ u_k &= \xi_k \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} A_c = B_c = C_c = 1 \\ D_c = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Τότε:}\quad \begin{pmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \underline{\xi}_{k+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F & GC_c \\ B_c C & A_c \end{pmatrix}}_{A_{ce}} \begin{pmatrix} \underline{x}_k \\ \underline{\xi}_k \end{pmatrix}$$

και

$$A_{ce} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

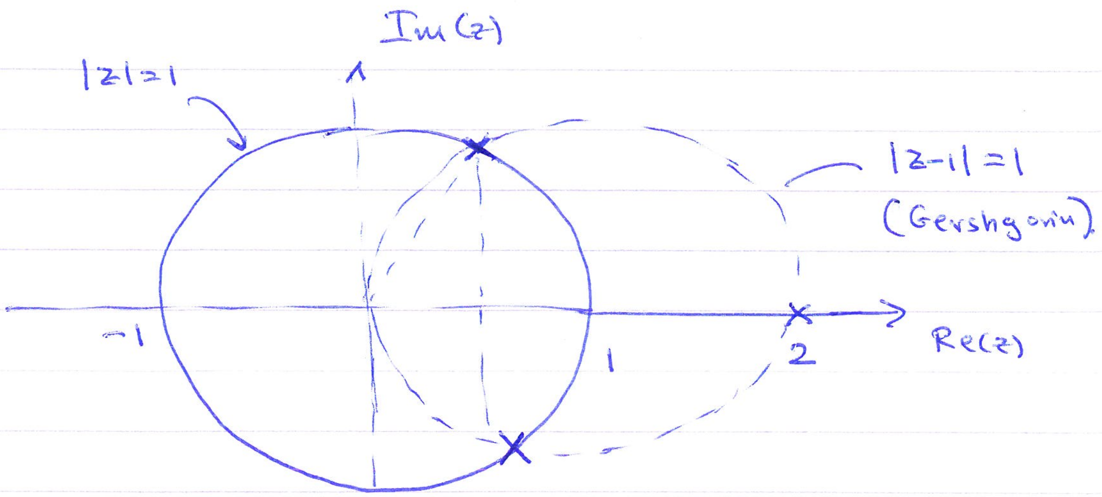
$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A_{ce}) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)^3 - 1 = (\lambda-2)\left[(\lambda-1)^2 + (\lambda-1) + 1\right] =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda) =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

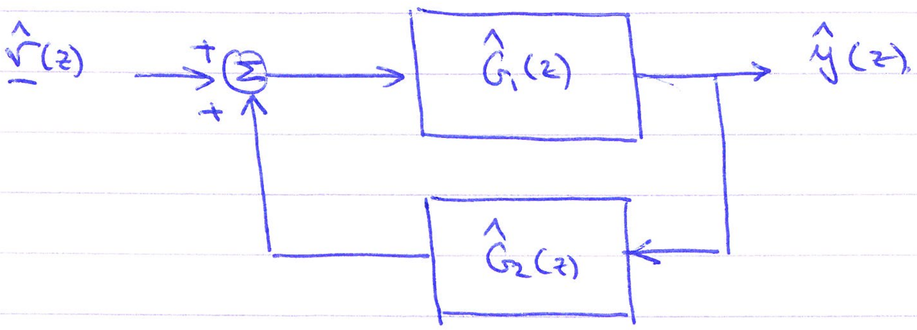
και οι ιδιοτιμές του πίνακα A_{ce} είναι $\lambda = 2$ και $\lambda = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ \underbrace{x^2+y^2}_{1}-2x+1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1-2x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \;,\; y=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ορίζοντας είσοδο και έξοδο στό σύστημα ανάδρασης μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου έτσι:



Έχουμε: $\quad \hat{y}(z) = \hat{G}_1(z)\left(\hat{r}(z) + \hat{G}_2(z)\,\hat{y}(z)\right)$

$$\Rightarrow \left(1-\hat{G}_1(z)\,\hat{G}_2(z)\right)\hat{y}(z) = \hat{G}_1(z)\,\hat{r}(z)$$

Άρα $\quad \hat{G}(z) = \dfrac{\hat{y}(z)}{\hat{r}(z)} = \dfrac{\hat{G}_1(z)}{1-\hat{G}_1(z)\,\hat{G}_2(z)}$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση:

$$\hat{G}_1(z) = [1 \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} z-1 & -1 \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1 \,\vdots\, 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} & \frac{1}{(z-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{z-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\hat{G}_2(z) = \frac{1}{z-1}$$ και επομένως.

$$\hat{G}(z) = \frac{\hat{G}_1(z)}{1-\hat{G}_1(z)\,\hat{G}_2(z)} = \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{1-\frac{1}{(z-1)^3}} = \frac{z-1}{\cancel{(z-1)^3}\,(z-1)^3-1}$$

$$= \frac{z-1}{(z-2)(z^2-z+1)}.$$

Παρατηρούμε ότι οι πόλοι της $\hat{G}(z)$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A_{cl}.

Απόκριση συστημάτων καταστάσεως χώρου

Έστω το σύστημα:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \;,\; \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \;,\; \cancel{k \geq 0}$$

με λύση:

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B \underline{u}_j \qquad \cancel{j \geq 0}\; k \geq 0$$

$$\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-1-j} B \underline{u}_j + D\underline{u}_k$$

Αν ο πίνακας A είναι απλής δομής, τότε είναι διαγωνιοποιήσιμος. ~~και~~ Έστω ότι οι ιδιοτιμές του A είναι $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots \underline{v}_n\}$. Αν $P = [\underline{v}_1, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τότε

$$P^{-1} A P = \Lambda := \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\}$$

$$\Rightarrow P^{-1} A^k P = \Lambda^k = \mathrm{diag}\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots \lambda_n^k\}.$$

Επομένως:

$$\underline{x}_k = P\Lambda^k P^{-1} \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} P A^{k-j-1} P^{-1} B \underline{u}_j$$

Έστω $P^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{v}_n^T \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \tilde{v}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{v}_n^T \end{bmatrix} [\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n] = I_n.$

Τότε :

$$\underline{x}_k = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2 \cdots \underline{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{v}}_1^T \\ \tilde{\underline{v}}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{\underline{v}}_n^T \end{bmatrix} \underline{x}_0 +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} [\underline{u}_1 \cdots \underline{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-j-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{k-j-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{v}}_1^T \\ \vdots \\ \tilde{\underline{v}}_n^T \end{bmatrix} B\,\underline{u}_j$$

$$\Rightarrow \underline{x}_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \langle \tilde{\underline{v}}_i, \underline{x}_0 \rangle \underline{u}_i + \cancel{\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_i^{k-j-1} \langle \tilde{\underline{v}}_i, B\underline{u}_j \rangle}$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{k-j-1} \langle \tilde{\underline{v}}_i, B\underline{u}_j \rangle \underline{u}_i$$

(modal decomposition). Στην περίπτωση που ο A δεν είναι απλής δομής, τότε

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\cdots(\lambda-\lambda_\rho)^{\tau_\rho}$$

($\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$). Ορίζουμε

$$d_i = \dim\left(\mathcal{N}_r(\lambda_i I - A)\right) := n - r_i \quad , r_i = \text{Rank}[\lambda_i I - A]$$

Ο ακέραιος τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i και d_i η γεωμετρική πολλαπλότητα. Έχουμε: $1 \leq d_i \leq \tau_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, \rho$. Εφόσον ο πίνακας είναι μη απλής δομής μια από τις ανισότητες $d_i \leq \tau_i$ είναι αυστηρή ($<$). Για κάθε ιδιοτιμή λ_i ορίζουμε d_i ιδιοδιανύσματα και $\tau_i - d_i$ γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Η μορφή Jordan του πίνακα A είναι:

$$J = bdiag\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \ldots, J_\rho(\lambda_\rho)\}$$

όπου:

$$J_i(\lambda_i) = bdiag\{J_{i1}(\lambda_i), J_{i2}(\lambda_i), \ldots, J_{id_i}(\lambda_i)\}.$$

όπου οι διαστάσεις $\dim[J_{ij}(\lambda_i)]$ καθορίζονται ως εξής:
Θέτουμε

$$r_{i1} = Rank(\lambda_i I - A), \; r_{i2} = Rank(\lambda_i I - A)^2, \ldots$$

$$r_{ij} = Rank[\lambda_i I - A]^j$$

Έχουμε $r_{ij} \geq r_{i,j+1}$. Έστω l_i ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο: $r_{i1} > r_{i2} > \cdots > r_{i,l_i} = r_{i,l_i+1}$. Ορίζουμε την χαρακτηριστική Segré

$$S_i = [n - r_{i1}, r_{i1} - r_{i2}, \ldots \; r_{i,l_i-1} - r_{i,l_i}]$$

Τότε:

$$\left.\begin{array}{lll} n - r_{i1} & = \# & \text{ιδιοδιανυσμάτων της } \lambda_i \text{ (γενικ. } 1^{ης} \text{ τάξης)} \\ r_{i1} - r_{i2} & = \# & \text{γενικ. ιδιοδιανυσμάτων } 2^{ης} \text{ τάξης} \\ & \vdots & \\ r_{i,l_i-1} - r_{i,l_i} & = \# & \text{" \quad " \quad } l_i \text{ τάξης} \end{array}\right\}$$

Τα μήκη των αλυσίδων που ορίζουν τις διαστάσεις Jordan ($\dim J_{ij}(\lambda_i)$, $j = 1, 2, \ldots, d_i$) καθορίζονται από τα διαγράμματα Ferrer

1^{η} τάξη : $n - r_{i1} = d_i$ $\quad * \ * \ * \ * \ * \ *$

2^{η} " : $r_{i1} - r_{i2}$ $\quad * \ * \ * \ *$

⋮

ℓ_i τάξη : $r_{i,\ell_i - 1} - r_{i,\ell_i}$ $\quad * \ *$

Τα αθροίσματα στοιχείων κάθε στήλης δίνουν τό μήκος της αντίστοιχης αλυσίδας. ($= \dim \mathcal{J}_{ij}(\lambda_i)$).

<u>Παράδειγμα:</u> Εστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$ μέ $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^9 (\lambda - \lambda_2)$

$r_{11} = 5$, $r_{12} = 3$, $r_{13} = 2$, $\underbrace{r_{14} = 1, \ r_{15} = 1}_{\Rightarrow \ \ell_1 = 4}$. ~~(και $r_{21} = 1$)~~.

Χαρακτηριστική Segré:

$$S_1 = [\, n - r_{11},\ r_{11} - r_{12},\ r_{12} - r_{13},\ r_{13} - r_{14} \,]$$

$$= [\, 5,\ 2,\ 1,\ 1 \,].$$

Διάγραμμα Ferér :

$d_1 = n - r_{11}$: $\quad * \ * \ * \ * \ *$

$r_{11} - r_{12}$: $\quad * \ *$

$r_{12} - r_{13}$: $\quad *$

$r_{13} - r_{14}$ $\quad *$

Αρα έχουμε :

1 αλυσίδα μέ 1 ιδιοδιάνυσμα καί 3 γενικευμένα ιδ.

" " 1 " " 1 "

" " 1 " " 0 "

" " 1 " " 0 "

" " 1 " " 0 "

Δηλαδή:

$$J_1(\lambda_1) = \text{diag}\{J_{11}(\lambda_1), J_{12}(\lambda_1), J_{13}(\lambda_1), J_{14}(\lambda_1), J_{15}(\lambda_1)\}$$

όπου :

$$J_{11}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad J_{12}(\lambda_1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

$$J_{13}(\lambda_1) = J_{14}(\lambda_1) = J_{15}(\lambda_1) = \lambda_1$$

(Επίσης $J_{21}(\lambda_2) = \lambda_2$, $d_2 = \tau_2 = 1$). Επομένως οι αλυσίδες Jordan είναι:

$$A\left[\underline{u}_{11}^{(1)} \,\vdots\, \underline{u}_{12}^{(1)} \,\vdots\, \underline{u}_{13}^{(1)} \,\vdots\, \underline{u}_{14}^{(1)}\right] = \left[\underline{u}_{11}^{(1)} \,\vdots\, \underline{u}_{12}^{(1)} \,\vdots\, \underline{u}_{13}^{(1)} \,\vdots\, \underline{u}_{14}^{(1)}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

$$A\left[\underline{u}_{21}^{(1)} \,\vdots\, \underline{u}_{22}^{(1)}\right] = \left[\underline{u}_{21}^{(1)} \; \underline{u}_{22}^{(1)}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

$$A\,\underline{u}_{31}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{31}^{(1)}, \quad A\,\underline{u}_{41}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{41}^{(1)}, \quad A\,\underline{u}_{51}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{51}^{(1)}$$

και $A\,\underline{u}_{11}^{(2)} = \lambda_2 \underline{u}_{11}^{(2)}$. Οι πρώτες δύο αλυσίδες γράφονται:

$A\,\underline{u}_{11}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{11}^{(1)}$, $A\,\underline{u}_{12}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{12}^{(1)} + \underline{u}_{11}^{(1)}$, $A\,\underline{u}_{13}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{13}^{(1)} + \underline{u}_{12}^{(1)}$
και $A\,\underline{u}_{14}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{14}^{(1)} + \underline{u}_{13}^{(1)}$. Επίσης:

$$A\,\underline{u}_{21}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{21}^{(1)}, \quad A\,\underline{u}_{22}^{(1)} = \lambda_1 \underline{u}_{22}^{(1)} + \underline{u}_{21}^{(1)}.$$

∎

Επομένως στην περίπτωση αυτή (πίνακας μη απλής δομής)

$$P^{-1}AP = \text{bdiag}\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots, J_e(\lambda_e)\} = J$$

$$\Rightarrow A = PJP^{-1} \Rightarrow A^k = PJ^kP^{-1}, \quad \text{όπου}$$

$$J^k = \text{b-diag}\{J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \dots J_e^k(\lambda_e)\}$$

και: $J_i^k(\lambda_i) = \text{bdiag}\{J_{i1}^k(\lambda_i), \dots, J_{id_i}^k(\lambda_i)\}$

όπου: $$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}^k$$

Έστω ότι $J_{ij} \in R^{q\times q}$, τότε:

$$J_{ij}^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & {}^kC_1\lambda_i^{k-1} & {}^kC_2\lambda_i^{k-2} & \cdots & {}^kC_{q-1}\lambda_i^{k-q+1} \\ 0 & \lambda_i^k & {}^kC_1\lambda_i^{k-1} & \cdots & {}^kC_{q-2}\lambda_i^{k-q+2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_i^k & {}^kC_1\lambda_i^{k-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

όπου:

$$\left.\begin{aligned} {}^kC_q &= \binom{k}{q} = \frac{k!}{q!(k-q)!} && \text{αν } k \geq q \\ &= 0 && \text{αν } k < q \end{aligned}\right\}$$

Παράδειγμα: έστω $J_{ij}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$

Έχουμε: $J_{ij}(\lambda_i) = \lambda_i I_3 + H$, $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Παρατηρούμε ότι ο H είναι μηδενοδύναμος και:

$$H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \; H^k = 0 \quad , \; k \geq 3$$

Επομένως:

$$J_{ij}^k(\lambda_i) = (\lambda_i I_3 + H)^k = \lambda_i^k I_3 + k\lambda_i^{k-1} H + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_i^{k-2} H^2$$

$$= \lambda_i^k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + k\lambda_i^{k-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}\lambda_i^{k-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)\lambda_i^{k-2} \\ 0 & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_i^k \end{bmatrix} \qquad k \geq 3$$

Επίσης, $J_{ij}^0 = I_3$, $J_{ij}^1 = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$, $J_{ij}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ 0 & 0 & \lambda_i^2 \end{bmatrix}$

<u>Παράδειγμα.</u> Έστω το σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, όπου ο A έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2) \quad , \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Έστω ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_1 είναι $d_1 = 1$. Τότε στο λ_1 αντιστοιχεί 1 ιδιοδιάνυσμα και 1 γενικευμένο

Επομένως, αν $P = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3]$.

$$P^{-1} A P = J = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A = P J P^{-1} \Rightarrow A^k = P J^k P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

και επομένως

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 = [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & k\lambda_1^{k-1} & 0 \\ 0 & \lambda_1^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{u}}_1^T \\ \tilde{\underline{u}}_2^T \\ \tilde{\underline{u}}_3^T \end{bmatrix} \underline{x}_0$$

$$= [\underline{u}_1\ \underline{u}_2\ \underline{u}_3] \begin{bmatrix} \lambda_1^k (\tilde{\underline{u}}_1^T \underline{x}_0) + k\lambda_1^{k-1} (\tilde{\underline{u}}_2^T \underline{x}_0) \\ \lambda_1^k (\tilde{\underline{u}}_2^T x_0) \\ \lambda_2^k (\tilde{\underline{u}}_3^T x_0) \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1^k (\tilde{\underline{u}}_1^T \underline{x}_0) \underline{u}_1 + k\lambda_1^{k-1} (\tilde{\underline{u}}_2^T \underline{x}_0) \underline{u}_1 + \lambda_1^k (\tilde{\underline{u}}_2^T \underline{x}_0) \underline{u}_2$$

$$+ \lambda_2^k (\tilde{\underline{u}}_3^T \underline{x}_0) \underline{u}_3$$

όπου

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{u}}_1^T \\ \hline \tilde{\underline{u}}_2^T \\ \hline \tilde{\underline{u}}_3^T \end{bmatrix} = \left[\underline{u}_1 \,\middle|\, \underline{u}_2 \,\middle|\, \underline{u}_3\right]^{-1}$$

<u>Παράδειγμα:</u> $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\varphi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^3$$

Άρα $\lambda=2$ με αλγεβρική πολ/τα $\tau=3$. Ιδιοδιανύσματα ($\lambda=2$)

$$(\lambda I - A)\underline{u_1} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$\Rightarrow \; y_1 + 3z_1 = 0, \; z_1 = 0 \Rightarrow y_1 = z_1 = 0$. Επομένως

$$\underline{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $d=1$ (γεωμ. πολλαπλότητα) και υπάρχει ένα γενικ. $2^{ης}$ τάξης και ένα γενικευμένο $3^{ης}$ τάξης, έστω $\underline{u_2}$ και $\underline{u_3}$ αντίστοιχα. Από την αλυσίδα Jordan.

$$\left.\begin{aligned} A\underline{u_1} &= \lambda \underline{u_1} \\ A\underline{u_2} &= \lambda \underline{u_2} + \underline{u_1} \\ A\underline{u_3} &= \lambda \underline{u_3} + \underline{u_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A\underline{u_1} &= 2\underline{u_1} \\ A\underline{u_2} &= 2\underline{u_2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A\underline{u_3} &= 2\underline{u_3} + \underline{u_2} \end{aligned}\right\}$$

Έστω $\underline{u_2} = (x_2 \; y_2 \; z_2)'$ και $\underline{u_3} = (x_3, y_3, z_3)'$
Έχουμε:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\lambda I - A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{\underline{u_2}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -y_2 - 3z_2 &= -1 \\ z_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} y_2 &= 1 \\ z_2 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

x_2 αυθαίρετο.

Επιλέγουμε: $x_2 = 0$, άρα $\underline{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\lambda I - A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}}_{\underline{u_3}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -y_3 - 3z_3 &= 0 \\ z_3 &= \cancel{0}\ -1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad y_3 = 3, \quad z_3 = -1$$

x_3 αυθαίρετο (έστω 0)

Άρα $P = [\underline{u_1} \ \underline{u_2} \ \underline{u_3}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^T \\ \tilde{u}_2^T \\ \tilde{u}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^k}_{J^k} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{x_0}}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)2^{k-2} \\ 0 & 2^k & k2^{k-1}+3\cdot 2^k \\ 0 & 0 & -2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k + 5k2^{k-1} - \frac{1}{2}k(k-1)2^{k-2} \\ 5\cdot 2^k - k2^{k-1} - 3\cdot 2^k \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k + \frac{5}{2}k\cdot 2^k - \frac{1}{8}(k-k^2)2^k \\ 2\cdot 2^k - k\cdot 2^{k-1} \\ 2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^k - \frac{19}{8}k2^k + \frac{1}{8}k^2\cdot 2^k \\ 2\cdot 2^k - \frac{k}{2}2^k \\ 2^k \end{bmatrix} = 2^k \begin{bmatrix} 1 - \frac{19k}{8} + \frac{k^2}{8} \\ 2 - k/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Μιγαδικές ιδιοτιμές

Έστω σύστημα $\underline{y}_{k+1} = A\underline{y}_k$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = (\lambda-\sigma)^2 + \omega^2 \qquad , \omega \neq 0$$

$\lambda, \omega \in \mathbb{R}$. Οι ιδιοτιμές του A είναι μιγαδικές συζυγείς, $\lambda = \sigma \pm i\omega$

Έστω $(\lambda, \underline{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος και $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{z}$

$\underline{x}, \underline{z} \in \mathbb{R}^2$, $(x^T \; z^T) \neq 0^T$. Τότε

$$A(\underline{x}+i\underline{z}) = (\sigma+i\omega)(\underline{x}+i\underline{z}) = (\sigma\underline{x} - \omega\underline{z}) + i(\omega\underline{x} + \sigma\underline{x})$$

Ισοδύναμα:

$$A\,[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

Τα διανύσματα $(\underline{x}, \underline{z})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^2$: Έστω $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ και $c_1\underline{x} + c_2\underline{z} = \underline{0}$. Τότε $c_2 \neq 0$ (Αν $c_2 = 0$, τότε $c_1 \neq 0$ και $c_1\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$. Τότε $A\underline{x} = \sigma\underline{x} - \omega\underline{z} \Rightarrow \omega\underline{z} = 0 \Rightarrow \underline{z} = 0$ $(\omega \neq 0)$. Συνεπώς $\underline{u} = 0$ – άτοπο). Επομένως

$$\underline{z} = -\frac{c_1}{c_2}\underline{x} \Rightarrow A(\underline{x} + i\underline{z}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow A\left(\underline{x} - i\frac{c_1}{c_2}\underline{x}\right) = (\sigma + i\omega)\left(\underline{x} - i\frac{c_1}{c_2}\underline{x}\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{A}\ \cancel{\left(1 - i\frac{c_1}{c_2}\right)} A\underline{x} = \cancel{\left(1 - i\frac{c_1}{c_2}\right)} (\sigma + i\omega)x$$

$$\Rightarrow A\underline{x} = (\sigma + i\omega)\underline{x} \qquad (*)$$

Όμως $\underline{x} \neq 0$ (πάλι από την $A\underline{x} = \sigma\underline{x} - \omega\underline{z}$, αν $\underline{x} = \underline{0}$ τότε $\underline{z} = \underline{0}$ $(\omega \neq 0)$, άτοπο γιατί τότε $\underline{u} = \underline{0}$).

Η εξίσωση $(*)$ οδηγεί σε άτοπο γιατί $A\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ και $(\sigma + i\omega)\underline{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Επομένως $\det(x \,\vdots\, z) \neq 0$ και

$$A = [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]^{-1}$$

~~Η λύση του συστήματος είναι:~~

$$\cancel{\underline{x}_k = [\underline{u} \,\vdots\, \underline{\bar{u}}] \begin{bmatrix} \lambda^k & \\ & (\bar{\lambda})^k \end{bmatrix}}$$

Έστω $\sigma = \rho\cos\theta$, $\omega = \rho\sin\theta$. Τότε:

$$A\,[\underline{x} \mid \underline{z}] = \rho\,[\underline{x} \mid \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow A^2\,[\underline{x} \mid \underline{z}] = \rho\, A\,[\underline{x} \mid \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \rho^2\,[\underline{x} \mid \underline{z}] \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{R(\theta)}^{2}.$$

Ο πίνακας $R(\theta)$ είναι πίνακας περιστροφής και

$$R^2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix} = R(2\theta)$$

και γενικά (επαγωγικά)

$$R^k(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}.$$

Άρα $$A^k\,[\underline{x} \mid \underline{z}] = \rho^k\,[\underline{x} \mid \underline{z}] \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow A^k = [\underline{x} \mid \underline{z}] \begin{bmatrix} \rho^k\cos(k\theta) & \rho^k\sin(k\theta) \\ -\rho^k\sin(k\theta) & \rho^k\cos(k\theta) \end{bmatrix} [\underline{x} \mid \underline{z}]^{-1}$$

Παράδειγμα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$, $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda^2 - 2\rho\cos\theta\cdot\lambda + \rho^2)$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 = \rho e^{i\theta} = \bar{\lambda}_4$ και ιδιοδιανύσματα $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_r + i\underline{u}_i, \underline{u}_r - i\underline{u}_i$, αντίστοιχα. Τότε

$$A = \underbrace{[\underline{u}_1 \vdots \underline{u}_2 \vdots \underline{u}_r \vdots \underline{u}_i]}_{U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\cos\theta & \rho\sin\theta \\ 0 & 0 & -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix} \underbrace{[\underline{u}_1 \vdots \underline{u}_2 \vdots \underline{u}_r \vdots \underline{u}_i]^{-1}}_{U^{-1}}$$

και $$A^k = U \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda_1^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \rho^k\cos(k\theta) & \rho^k\sin(k\theta) \\ 0 & 0 & -\rho^k\sin(k\theta) & \rho^k\cos(k\theta) \end{array}\right] U^{-1}$$

Παράδειγμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = ((\lambda-\sigma)^2+\omega^2)^2$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda = \sigma + i\omega$ και $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\tau_1 = \tau_2 = 2$. Έστω ότι $d_1 = d_2 = 1$. Τότε αν:

$$\left.\begin{aligned} A(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) &= (\sigma+i\omega)(\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) \\ A(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) &= (\sigma+i\omega)(\underline{x}_2 + i\underline{z}_2) + (\underline{x}_1 + i\underline{z}_1) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} A(\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) &= (\sigma-i\omega)(\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) \\ A(\underline{x}_2 - i\underline{z}_2) &= (\sigma-i\omega)(\underline{x}_2 - i\underline{z}_2) + (\underline{x}_1 - i\underline{z}_1) \end{aligned}\right\}$$

είναι οι δύο αλυσίδες Jordan που αντιστοιχούν στις δύο ιδιοτιμές λ και $\bar{\lambda}$ αντίστοιχα, τότε:

$$\left.\begin{aligned} A\underline{x}_1 &= \sigma \underline{x}_1 - \omega \underline{z}_1 \\ A\underline{z}_1 &= \omega \underline{x}_1 + \sigma \underline{z}_1 \\ A\underline{x}_2 &= \sigma \underline{x}_2 - \omega \underline{z}_2 + \underline{x}_1 \\ A\underline{z}_2 &= \omega \underline{x}_2 + \sigma \underline{z}_2 + \underline{z}_1 \end{aligned}\right\}$$

Ισοδύναμα

$$A \underbrace{\left[\underline{x}_1 \,\vdots\, \underline{z}_1 \,\vdots\, \underline{x}_2 \,\vdots\, \underline{z}_2\right]}_{P_r} = \underbrace{\left[\underline{x}_1 \,\vdots\, \underline{z}_1 \,\vdots\, \underline{x}_2 \,\vdots\, \underline{z}_2\right]}_{P_r} \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array}\right]$$

Επομένως: $\quad P_r^{-1} A P_r = J_r = \begin{bmatrix} W & I \\ 0 & W \end{bmatrix}$

και άρα:

$$P_r^{-1} A^k P_r = J_r^k = \left[\begin{array}{c|c} W & I \\ \hline 0 & W \end{array}\right]^k = \left[\begin{array}{c|c} W^k & {}^kC_1 W^{k-1} \\ \hline 0 & W^k \end{array}\right]$$

Επομένως θέτοντας $\sigma = \rho\cos\theta$, $\omega = \rho\sin\theta$:

$$J_r^k = \left[\begin{array}{c|c} \rho^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} & k\rho^{k-1} \begin{bmatrix} \cos(k-1)\theta & \sin(k-1)\theta \\ -\sin(k-1)\theta & \cos(k-1)\theta \end{bmatrix} \\ \hline 0 & \rho^k \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

Στην γενική περίπτωση:

$$J_r = \begin{bmatrix} W & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & W & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & W \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2q \times 2q}$$

έχουμε

$$J_r^k = \begin{bmatrix} W^k & {}^kC_1 W^{k-1} & {}^kC_2 W^{k-2} & \cdots & {}^kC_{q-1} W^{k-q+1} \\ 0 & W^k & {}^kC_1 W^{k-1} & & {}^kC_{q-2} W^{k-q-2} \\ \vdots & \ddots & W^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & {}^kC_1 W^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & W^k \end{bmatrix}$$

όπου:
$$\left.\begin{aligned} {}^kC_{\cancel{q}i} &= \frac{k!}{i!\,(k-i)!} && i \leq k \\ &= 0 && i > k \end{aligned}\right\}.$$

Οι συναρτήσεις που ορίζονται στην πραγματική μορφή Jordan του πίνακα A^k είναι τα modes του συστήματος. Έχουμε.

(i) Συναρτήσεις της μορφής λ^k, $\lambda \in \mathbb{R}$, που αντιστοιχούν σε Jordan blocks διάστασης 1. Οι συναρτήσεις συγκλίνουν στο 0 αν $|\lambda| < 1$, αποκλίνουν αν $|\lambda| > 1$, είναι σταθερές αν $\lambda = 1$ ή ταλαντώνονται χωρίς απόσβεση αν $\lambda = -1$.

(ii) Συναρτήσεις της μορφής $p(k)\lambda^k$ όπου $p(k)$ πολυώνυμο του k. Οι συναρτήσεις συγκλίνουν στο μηδέν αν $|\lambda| < 1$, αποκλίνουν εκθετικά αν $|\lambda| > 1$, αποκλίνουν πολυωνυμικά αν $|\lambda| = 1$.

(iii) Συναρτήσεις της μορφής $\rho^k \cos(k\theta+\phi)$. Οι συναρτήσεις ταλαντώνονται χωρίς απόσβεση αν ~~ρ<1~~ $\rho=1$, ταλαντώνονται με απόσβεση αν $\rho<1$, η ταλαντώνονται με αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης αν $\rho>1$.

(iv) Συναρτήσεις της μορφής $\rho^k p(k)\cos(k\theta+\phi)$. Οι συναρτήσεις αυτές ταλαντώνονται με εκθετικά αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης αν $\rho>1$, ταλαντώνονται με πολυωνυμικά αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης αν $\rho=1$ η συγκλίνουν στο 0 (με απόσβεση ταλάντωσης) αν $\rho<1$.

<u>Ορισμός</u> (ασυμπτωτική ευστάθεια συστήματος $\underline{x}_{k+1}=A\underline{x}_k$). Τό σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθή αν $\|\underline{x}_k\|\to 0$ καθώς $k\to\infty$ γιά κάθε $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, αν

$$\|A^k \underline{x}_0\|\to 0 \qquad \forall x_0\in\mathbb{R}^n \quad (\text{ή } \|A^k\|\to 0)$$

<u>Θεώρημα</u>: Τό σύστημα $\underline{x}_{k+1}=A\underline{x}_k$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθή αν και μόνο αν $\rho(A)<1$ οπου $\rho(A)$ η φασματική ακτίνα του A, δηλ. $\rho(A)=\max\{|\lambda_i(A)| : \lambda_i(A)\in\sigma(A)\}$.

<u>Απόδειξη</u>: (γιά την περίπτωση που ο A είναι απλής δομής).

($\Leftarrow$): Η λύση του συστήματος είναι

$$\underline{x}_k=\sum_{i=1}^n \lambda_i^k \langle \underline{\tilde{u}}_i, \underline{x}_0\rangle \underline{u}_i \qquad , k\geq 0.$$

οπου $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^n$ και $\{\tilde{u}_i^T\}_{i=1}^n$ τα δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα του πινακα A. Αν $|\lambda_i|<1$ γιά κάθε i, τότε $\lambda_i^k\to 0$ γιά κάθε i και επομένως $\underline{x}_k\to 0$ για κάθε $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^n$.

($\Rightarrow$): Εστω $|\lambda_j|\geq 1$ γιά κάποιο $j\in\{1,2,\dots,n\}$. Αν $\underline{x}_0=\underline{u}_j(\in\mathbb{R}^n)$

τότε $\langle \tilde{u}_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ (1 αν $i=j$ και 0 αν $i \neq j$) και επομένως $\underline{x}_k = \lambda_i^k \underline{u}_i$ πού δεν συγκλίνει στο μηδέν καθώς $k \to \infty$.

Αν $\lambda_j \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$, τότε $\underline{x_0} \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ αλλα η απόδειξη εξακολουθεί να ισχύει.

Απόδειξη (γενική περίπτωση, A μη απλής δομής).

$(\Leftarrow)$: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{x_0} \in \mathbb{R}^n$ (αυθαίρετο) και $\rho(A) < 1$ (φασματική ακτίνα). ~~Τότε~~ Έστω $A = PJP^{-1}$ όπου J η μορφή Jordan του A και P ο πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων. Τότε

$$\|\underline{x}_k\| = \|A^k \underline{x_0}\| = \|PJ^kP^{-1}\underline{x_0}\|$$

$$\leq \underbrace{\|P\| \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|x_0\|}_{\gamma} \cdot \|J^k\|$$

Έστω $\varphi(A) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\cdots(\lambda-\lambda_e)^{\tau_e}$ το χαρακτηριστικό ~~και~~ πολυώνυμο του A με $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$, και $\tau_i \in \mathbb{N}$ ~~οι~~ η αλγεβρική πολλαπλότητα των λ_i, $i \in \{1, 2, \dots, e\}$. Τότε

$$J = \mathrm{bdiag}\{J_1(\lambda_1), J_2(\lambda_2), \dots J_e(\lambda_e)\}$$

και $J_i(\lambda_i) = \mathrm{bdiag}\{J_{i1}(\lambda_i), J_{i2}(\lambda_i), \dots, J_{id_i}(\lambda_i)\}$ όπου d_i η γεωμετρική πολλαπλότητα ~~του~~ της ιδιοτιμής λ_i. Ισχύει ότι

$$\|J^k\| = \|\mathrm{bdiag}\{J_1^k(\lambda_1), J_2^k(\lambda_2), \dots J_e^k(\lambda_e)\}\|$$

$$= \max\{\|J_i^k\| : i = 1, 2, \dots, e\}.$$

και επομένως

$$\cancel{\|\mathcal{J}^k\|}\quad \|\underline{x}_k\| \leq \gamma \max\{\|\mathcal{J}_i^k\| : i=1,2,\dots,e\}$$

Παρόμοια για κάθε $i \in \{1,2,\dots,e\}$:

$$\|\mathcal{J}_i^k\| = \|\operatorname{bdiag}\{\mathcal{J}_{i1}^k(\lambda_i), \mathcal{J}_{i2}^k(\lambda_i),\dots, \mathcal{J}_{id_i}^k(\lambda_i)\}\|$$

$$= \max\{\|\mathcal{J}_{ij}^k(\lambda_i)\| : \cancel{i=1,2,\dots,e},\ j=1,2,\dots,d_i\}.$$

και επομένως

$$\|\underline{x}_k\| \leq \gamma \max\{\|\mathcal{J}_{ij}^k(\lambda_i)\| : i=1,2,\dots,e,\ j=1,2,\dots,d_i\}.$$

Όμως κάθε στοιχείο του πίνακα $\mathcal{J}_{ij} \in \mathbb{C}^{m_{ij}\times m_{ij}}$, $m_{ij} \leq \tau_i$ είναι της μορφής (για $k > m_{ij}$)

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{J}_{ij}^k(p,q) &= p(k)\,\lambda_i^k \qquad (p \leq q). \\ &= 0 \qquad\qquad\quad (p > q) \end{aligned}\right\}. \qquad (* \text{ L'Hospital}).$$

όπου $|\lambda_i| < 1$ και επομένως$^{(*)}$ $\mathcal{J}_{ij}^k \to 0$ καθώς $k \to \infty$.
Άρα $\|A^k \underline{x}_0\| \to 0$ για κάθε $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

($\Rightarrow$): Έστω $\lambda_j \in \sigma(A)$, $|\lambda_j| \geq 1$ και $\underline{u}_j$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$A\,\underline{u}_j = \lambda_j \underline{u}_j \Rightarrow A^k \underline{u}_j = \lambda_j^k \underline{u}_j$$

Αν $\cancel{\lambda_j}$ $\lambda_j \in \mathbb{R}$, τότε και $\underline{u}_j \in \mathbb{R}^n$. Θέτοντας $\underline{x}_0 = \underline{u}_j$ έχουμε

$$\|\underline{x}_k\| = \|A^k \underline{x}_0\| = \|\lambda_j^k \underline{x}_0\| = |\lambda_j|^k \|\underline{x}_0\| \geq \|\underline{x}_0\|$$

που δεν μπορεί να συγκλίνει στο μηδέν καθώς $k \to \infty$.

Αν $\lambda_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ τότε $\underline{u}_j \in \mathbb{C}^n\setminus\mathbb{R}^n$ και η παραπάνω απόδειξη δεν ισχύει. Έστω

(και x, z γραμ. ανεξ.
Ισχύει $\theta \neq \nu\pi$, $\nu \in \mathbb{Z}$).

$$\lambda_j = r e^{i\theta}, \quad r \geq 1$$

και $\underline{u}_j = \underline{x} + i\,\underline{z}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Έχουμε

$$A^k \underline{u}_j = \lambda^k \underline{u}_j = r^k e^{i\theta k} \underline{u}_j$$

και

$$A^k(\underline{x} + i\underline{z}) = r^k(\cos k\theta + i \sin k\theta)(\underline{x} + i\underline{z})$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} A^k \underline{x} &= r^k \cos(k\theta)\,\underline{x} - r^k \sin(k\theta)\,\underline{z} \\ A^k \underline{z} &= r^k \cos k\theta\,\underline{z} + r^k \sin(k\theta)\,\underline{x} \end{aligned}\right\}$$

Δηλαδή

$$A^k[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] = r^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(k\theta) & \sin(k\theta) \\ -\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}}_{Rot(k\theta)}$$

όπου $Rot(k\theta)$ ορθογώνιος πίνακας. ~~Επομένως~~. Επομένως

$\| A^k [x|z] \| = r^k \| [x|z] \| \geq \| [x|z] \| \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ αφού $r \geq 1$.

$$\cancel{\| A^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}] \| = r^k \| [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\, Rot(k\theta) \|}$$

$$\cancel{= r^k \| [x \,\vdots\, z] \|}$$

~~(η φασματική νόρμα είναι αναλλοίωτη κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς). Έστω $\frac{1}{z} = \| [x \,\vdots\, z] \|$. Τότε χωρίς βλάβη γενικότητας~~

$$\cancel{\| A^k [x \,;\, z] \| \geq r > 0} \quad \text{~~για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ ($r \geq 1$).~~}$$

Τότε $\forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\|A^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\| = r^k \geq 1 \quad \text{αφού} \quad r \geq 1$$

και επομένως

$$1 \leq \|A^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\| \leq \|A^k\| \cdot \|[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\|$$
$$= \|A^k\|$$

Άρα $\|A^k\| \geq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$.

Υποθέτουμε για αντίφαση ~~Έστω~~ ότι $\|\underline{x}_k\| \to 0$ για κάθε $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}$ (δηλ. σύστημα ασ. ευσταθές). Τότε $\|A^k \underline{x}_0\| \to 0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

~~Θέτουμε~~ Επιλέγουμε διαδοχικά αρχικές συνθήκες $\underline{x}_0 = \underline{x}$ και $\underline{x}_0 = \underline{z}$. Τότε:

$$\|A^k \underline{x}\| \to 0 \quad \text{και} \quad \|A^k \underline{z}\| \to 0 \quad \text{καθώς } k \to \infty$$

Όμως $\forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\|A^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\|^2 \leq \|A^k [\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\|_F^2 = \|[A^k \underline{x} \,\vdots\, A^k \underline{z}]\|_F^2$$
$$= \|A^k \underline{x}\|^2 + \|A^k \underline{z}\|^2.$$

Ο όρος δεξιά συγκλίνει στο μηδέν καθώς $k \to \infty$, άρα και

$$\lim_{k \to \infty} \|A^k [\underline{x} \,;\, z]\| = 0$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον αφού $\|A^k [\underline{x} \,\vdots\, z]\| \geq \|[\underline{x} \,\vdots\, \underline{z}]\| > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$

$\square$

Εξωτερική ευστάθεια (ευστάθεια εισόδου-εξόδου ή φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου).

Έστω το σύστημα: $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, $y_k = Cx_k$ με $\underline{x}_0 = \underline{0}$. Το σύστημα ορίζεται ως "εξωτερικά ευσταθές" (σύστημα φραγμένης εισόδου - φραγμένης εξόδου, BIBO) αν υπάρχει σταθερά $c>0$ έτσι ώστε $\|u_k\| \leq 1$ για $k \geq 0$ να συνεπάγεται ότι $\|y_k\| \leq c$ για κάθε $k \geq 0$.

Έστω $\{G(k)\}_{k=0}^{\infty}$ η ακολουθία Markov του συστήματος:

$$(G(k))_{k=0}^{\infty} = (0, CB, CAB, \ldots, CA^{k-1}B, \ldots)$$

Τότε: $$\underline{y}_n = \sum_{k=0}^{n} G(n-k)\,\underline{u}_k \qquad n \geq 0$$

και η συνάρτηση μεταφοράς είναι $\hat{G}(z) = C(zI-A)^{-1}B$.

Θεώρημα: Το σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές αν και μόνο αν: $\sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty$.

Απόδειξη: (i) Έστω $\{\underline{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ ακολουθία εισόδου με $\|u_k\| \leq 1$ για κάθε $k \geq 0$. Τότε

$$\|\underline{y}_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} G(n-k)\,\underline{u}_k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|G(n-k)\,\underline{u}_k\|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \|G(n-k)\| \cdot \|\underline{u}_k\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|G(n-k)\|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \|G(k)\| < \sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty$$

Άρα η σειρά είναι φραγμένη και άρα υπάρχει σταθερά $c>0$ έτσι ώστε $\|\underline{y}_n\| \leq c$ για κάθε $n \geq 0$.

Αντίστροφα θα δείξουμε ότι αν το σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές, τότε $\sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty$. Εξετάζουμε πρώτα την ειδική περίπτωση συστήματος μίας εισόδου και εξόδου (βαθμωτό). Τότε (θέτοντας $g(k) := G(k)$) έχουμε:

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} g(n-k)\, u_k \qquad , n \geq 0.$$

Υποθέτουμε για αντίφαση ότι το σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές αλλά για κάθε (πεπερασμένο) L υπάρχει $k_1 = k_1(L)$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=0}^{k_1} |g(k_1 - k)| > L$$

Επιλέγουμε την φραγμένη είσοδο

$$\left.\begin{aligned} u_k &= +1 && \text{αν} \quad g(n-k) > 0. \\ &= 0 && \text{αν} \quad g(n-k) = 0 \\ &= -1 && \text{αν} \quad g(n-k) < 0 \end{aligned}\right\}$$

όπου $0 \leq k \leq k_1$. Προφανώς $\|u_k\| \leq 1$ για κάθε $k \geq 0$ και

$$y_{k_1} = \sum_{k=0}^{k_1} g(k_1 - k)\, u_k = \sum_{k=0}^{k_1} |g(k-k)| > L$$

που οδηγεί σε αντίφαση εφόσον η ακολουθία εξόδου δεν είναι φραγμένη.

Στην γενική περίπτωση $G(k) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ γράφουμε

$$G(k) = \left[\, g_{ij}(k) \,\right]_{i=1,2,\dots,p}^{j=1,2,\dots m}$$

$$\underline{u}_k = [u_k^{(1)} \dots u_k^{(m)}]^T \quad , \quad \underline{y}_k = [y_k^{(1)}, \dots y_k^{(p)}]^T$$

Τότε

$$\underline{y}_n = \begin{bmatrix} y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} \\ \vdots \\ y_n^{(p)} \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} g_{11}(n-k) & \cdots & g_{1m}(n-k) \\ \vdots & & \\ g_{p1}(n-k) & & g_{pm}(n-k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k^{(1)} \\ u_k^{(2)} \\ \vdots \\ u_k^{(m)} \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$y_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} g_{ij}(n-k)\, u_k^{(j)} \qquad , \quad i=1,2,\dots,p.$$

Έστω ότι τό σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές καί $\|\underline{u}_k\| \leq 1$ γιά κάθε $k \in \mathbb{N}_0$. Τότε $|u_k^{(j)}| \leq 1$ γιά κάθε $j \in \{1,2,\dots,m\}$, $k \in \mathbb{N}_0$ καί

$$\begin{aligned} |y_n^{(i)}| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(n-k)\, u_k^{(j)}\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} |g_{ij}(n-k)\, u_k^{(j)}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} |g_{ij}(n-k)| \cdot |u_k^{(j)}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m} |g_{ij}(n-k)| = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} |g_{ij}(n-k)|. \end{aligned}$$

Εφόσον τό σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|G(k)\| < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |g_{ij}(k)| < \infty \qquad \forall i=1,2,\dots p \quad \forall j=1,2,\dots,m$$

Άρα $|y_n^{(i)}| \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n} |g_{ij}(k)|$

καί η $|y_n^{(i)}|$ είναι φραγμένη ακολουθία γιά κάθε ~~x~~ $i \in \{1,2,\dots,p\}$ ως πεπερασμένο άθροισμα φραγμένων ακολουθιών

Συνεπώς και η διανυσματική ακολουθία $(\underline{y}_n)$ είναι φραγμένη, δηλαδή $\exists\, c \in \mathbb{R}_+$

$$\|\underline{y}_n\| \le c \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}_0$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι εξωτερικά ευσταθές αλλά (για αντίφαση) ότι για κάθε (πεπερασμένο) L υπάρχει $k_1 = k_1(L)$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{k=0}^{k_1} \|G(k_1 - k)\| > L$$

~~Επιλέγουμε φραγμένη είσοδο~~ $\cancel{(\underline{u}_k)_{k=0}^{k_1}}$ ~~ως εξής:~~

$$\cancel{\underline{u}_k^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{m}}} \quad \cancel{\text{αν } g_{ij}(n-k) > 0}$$

$$\cancel{\underline{u}_k^{(j)} = 0} \quad \cancel{\text{αν } g_{ij}}$$

ή ισοδύναμα $\forall L\ \exists\, k_1 = k_1(L)$:

$$\sum_{k=0}^{k_1} \|G(k)\| > L.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} |G_{ij}(k)| \ge k_n \cdot \sum_{k=0}^{k_1} \|G(k)\| > L$$

Έχουμε: $\cancel{\forall I}$ $\underline{y}_{k_1} = \sum_{k=0}^{k_1} G(k)\, \underline{u}(k_1 - k).$

Έστω (*)

$$[u_j(k_1-k)]_j = \begin{cases} \cancel{G_{ij}(k)}\ 1 & \text{αν } G_{ij}(k) > 0 \\ \cancel{-G_{ij}(k)}\ -1 & \text{αν } G_{ij}(k) < 0 \\ 0 & \text{αν } G_{ij}(k) = 0 \end{cases}$$

(scale with $\frac{1}{\sqrt{n}}$?)

$(0 \le k \le k_1)$.

(*) Δείξε ότι με αυτήν την επιλογή $\|\underline{u}_k\|$ φραγμένο για κάθε k.

Τότε:

$$\sum_{i=1}^{p} |y_{k_1}(i)| = \sum_{k=0}^{k_1} \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} G_{ij}(k)[u(k_1-k)]_j \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{k_1} \left| \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} |G_{ij}(k)| \right|$$

$$= \sum_{k=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} |G_{ij}(k)| \geq \sum_{k=0}^{k_1} \|G(k)\| > L$$

Επομένως:

$$\sqrt{n}\|\underline{y}_{k_1}\| \geq \|\underline{y}_{k_1}\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |y_{k_1}(i)| > L \Rightarrow \|\underline{y}_{k_1}\| > \frac{L}{\sqrt{n}}$$

και επομένως το σύστημα δεν είναι εξωτερικά ευσταθές (αντίφαση) εφόσον το L μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μεγάλο. □

Πρόσθετα αποδείξεων: (1) Αν $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τότε

- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \geq \|A\|$ (φασματική νόρμα)
- Αν $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ τότε:

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geq \|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} |x_i|$$

$$\left\{\begin{array}{l} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2 \leq n\,\|x\|_\infty \end{array}\right.$$

Συνάρτηση συχνοτήτων

Έστω το σύστημα:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \ , \quad \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \ , \quad k \geq 0$$

Επιλέγουμε την είσοδο: $\underline{u}_k = e^{i\omega k}\underline{u}_0$, $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^m$. Έστω ότι $\rho(A) < 1$. Τότε

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + \sum_{r=0}^{k-1} A^{k-r-1} B \underline{u}_r$$

$$= A^k \underline{x}_0 + \left(\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-r-1} e^{i\omega r} \right) B \underline{u}_0$$

Έχουμε:

$$\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-r-1} e^{i\omega r} = A^{k-1} + A^{k-2} e^{i\omega} + \dots + I_n e^{i\omega(k-1)}$$

$$= e^{i\omega(k-1)} \underbrace{\{ I_n + e^{-i\omega}A + \dots + e^{-i\omega(k-1)} A^{k-1} \}}_{f(A)}$$

$$e^{-i\omega} A f(A) - f(A) = (e^{-i\omega}A - I) f(A)$$

$$= e^{-i\omega k} A^k + \cancel{e^{-i\omega(k-1)} A^{k-1}} + \dots + \cancel{e^{-i\omega} A}$$

$$- \left(\cancel{e^{-i\omega(k-1)} A^{k-1}} + e^{-i\omega(k-2)} A^{k-2} + \dots + \cancel{e^{-i\omega} A} + I_n \right\}.$$

$$= e^{-i\omega k} A^k - I_n$$

$$\Rightarrow f(A) = (e^{-i\omega}A - I)^{-1} (e^{-i\omega k} A^k - I_n).$$

Επομένως:

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + (e^{-i\omega} A - I)^{-1} (e^{-i\omega k} A^k - I)\, e^{+i\omega(k-1)} B \underline{u}_0$$

$$= A^k \underline{x}_0 + (A - e^{i\omega} I)^{-1} (A^k - e^{i\omega k} I)\, B \underline{u}_0$$

$$= A^k \underline{x}_0 + (e^{i\omega} I - A)^{-1} (e^{i\omega k} I - A^k)\, B \underline{u}_0$$

$$= A^k \underline{x}_0 + (e^{i\omega} I - A)^{-1} (I - e^{-i\omega k} A^k) B \underbrace{e^{i\omega k} u_0}_{\underline{u}_k}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + (e^{i\omega} I - A)^{-1} B \underline{u}_k - (e^{i\omega} I - A)^{-1} A^k B \underline{u}_0$$

$$\Rightarrow \underline{y}_k = C A^k \underline{x}_0 + C (e^{i\omega} I_n - A)^{-1} B u_k - C (e^{i\omega} I - A)^{-1} A^k B \underline{u}_0 + D u_k.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $(e^{i\omega} I - A)^{-1}$ είναι καλά ορισμένος αφού $\rho(e^{-i\omega} A) = |e^{-i\omega}|\, \rho(A) = \rho(A) < 1$. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$\hat{G}(z) = C (zI - A)^{-1} B + D$$

$$\Rightarrow \hat{G}(e^{i\omega}) = C (e^{i\omega} I - A)^{-1} B + D.$$

Επομένως $\underline{y}_k = C A^k \underline{x}_0 + \hat{G}(e^{i\omega}) u_k -$

$$- C (e^{i\omega} I - A)^{-1} A^k B u_0.$$

$$\Rightarrow \| \underline{y}_k - \hat{G}(e^{i\omega}) \underline{u}_k \| = \| C A^k \underline{x}_0 - C (e^{i\omega} I - A)^{-1} A^k B \|$$

$$\leq \|C\| \, \|A^k\| \, \|\underline{x}_0\| + \|C (e^{i\omega} I - A)^{-1}\| \, \|A^k\| \cdot \|B\|$$

$\to 0$ καθώς $k \to \infty$ $\quad \|A^k\| \to 0$ καθώς $\rho(A) < 1$.

Επομένως:

$$\lim_{k\to\infty} \left(\underline{y}_k - G(e^{i\omega})\, u_k\right) = \underline{0}$$

Η συνάρτηση $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{p\times m} : \omega \to G(e^{i\omega})$ είναι συνάρτηση συχνοτήτων του συστήματος. Αν

$$\underline{u}_0 = (0, \ldots 0, \underbrace{1}_{r\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta}, 0 \ldots 0)^T$$

τότε

$$\underline{y}_r(k) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{1r}(e^{i\omega})\, e^{i\omega k} \\ \vdots \\ \hat{G}_{pr}(e^{i\omega})\, e^{i\omega k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \vdots \\ \xi_p(k) \end{bmatrix}}_{\underline{\xi}(k)},$$

οπου $\|\underline{\xi}(k)\| \to 0$ καθώς $k \to \infty$.

Εστω $G_{sr}(e^{i\omega}) = \rho_{sr}(\omega)\, e^{i\phi_{sr}(\omega)}$ $\quad \left.\begin{matrix} s = 1, 2, \ldots p \\ r = 1, 2, \ldots m \end{matrix}\right\}$

οπου $\rho_{sr}(\omega) \geq 0$, $\varphi_{sr}(\omega) \in (-\pi, \pi]$. Τά γραφήματα

$$\left.\begin{matrix} \omega \to |G_{sr}(e^{i\omega})| = \rho_{sr}(\omega) \\ \omega \to \arg\left[G_{sr}(e^{i\omega})\right] = \varphi_{sr}(\omega) \end{matrix}\right\}$$

ορίζουν τά γραφήματα Bode του συστήματος. Συνήθως περιορίζουμε την μεταβλητή ω (γωνιακή συχνότητα) στό διάστημα $-\pi < \omega \leq \pi$ (η ακόμα στό διάστημα $0 \leq \omega \leq \pi$ εφόσον $|G_{sr}(e^{-i\omega})| = |G_{sr}(e^{i\omega})|$ καί $\arg\left[G_{sr}(e^{i\omega})\right] = -\arg\left[G_{sr}(e^{-i\omega})\right]$. (συναρτήσεις μέτρου καί φάσης αντίστοιχα).

καταχρηστικά $\varrho(A)=1$!

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $\hat{G}(z)=\frac{1}{z-1}$. Τότε

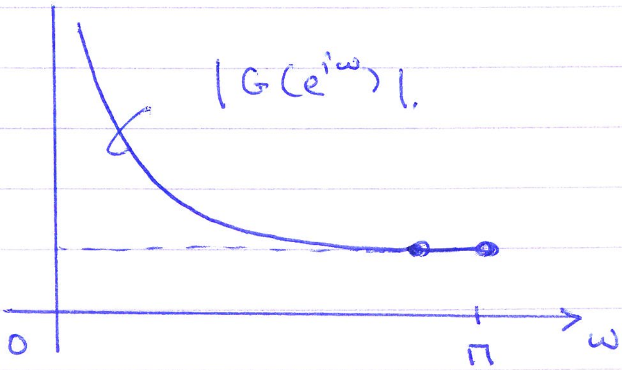
$$\hat{G}(e^{i\omega})=\frac{1}{e^{i\omega}-1}=\frac{1}{(\cos\omega-1)+i\sin\omega}$$

$$|\hat{G}(e^{i\omega})|=\frac{1}{\sqrt{(\cos\omega-1)^2+\sin^2\omega}}=\frac{1}{\sqrt{2-2\cos\omega}}$$

Έχουμε: $\cos\omega=1-2\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\Rightarrow 2-2\cos\omega=4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$

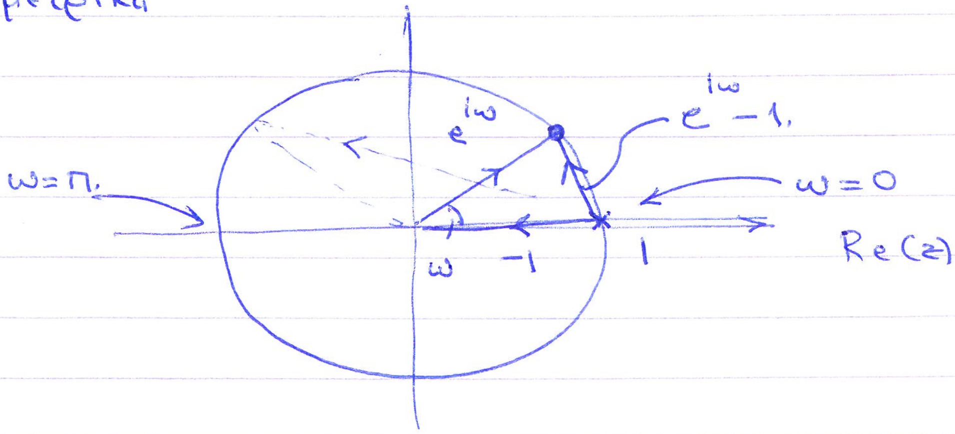
και

$$|\hat{G}(e^{i\omega})|=\frac{1}{2|\sin(\omega/2)|}.\qquad \omega\in(0,\pi].$$



Επίσης: $\arg[G(e^{i\omega})]=-\tan^{-1}\left(\frac{\sin\omega}{\cos\omega-1}\right)$

Γεωμετρικά



Παράδειγμα

Έστω $\hat{G}(z) = \dfrac{1}{1-0.5z^{-1}} = \dfrac{z}{z-0.5}$

Έστω $u_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)$, $k \geq 0$

$$\hat{G}(e^{\frac{i\pi}{3}}) = \frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/3} - 0.5} = \frac{0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\cancel{0.5} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{0.5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \; \frac{0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{i} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.5i\right) =$$

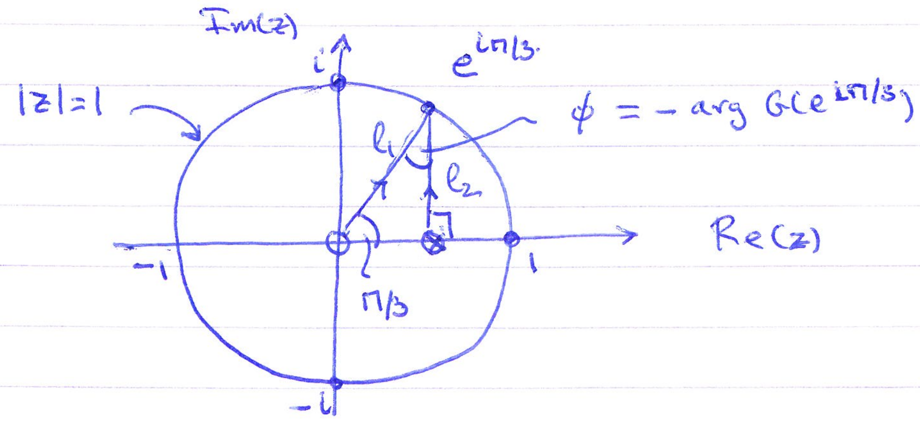
$$= 1 - i\frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|\hat{G}(e^{i\pi/3})|^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow |\hat{G}(e^{i\pi/3})| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\arg \hat{G}(e^{i\pi/3}) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Άρα $y_k = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\dfrac{k\pi}{3} - \underbrace{\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}_{\pi/6}\right) + \xi_k$

όπου $\xi_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$.



$$\left.\begin{aligned} \arg\left[G(e^{i\pi/3})\right] &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} \\ |G(e^{i\pi/3})| &= l_1/l_2 = 1/\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$\mathcal{Z}\{\cos \omega k\} = \frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}$$

Άρα $$\mathcal{Z}\left\{\cos \frac{k\pi}{3}\right\} = \frac{z^2 - z\cos(\pi/3)}{z^2 - 2z\cos(\pi/3) + 1}$$

$$= \frac{z^2 - 0.5z}{z^2 - z + 1} = \hat{u}(z)$$

Άρα $$\hat{y}(z) = \hat{G}(z)\,\hat{u}(z) = \frac{z}{\cancel{z-0.5}}\;\frac{z\,(\cancel{z-0.5})}{z^2 - z + 1}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(z) = \frac{z^2}{z^2 - z + 1} = \frac{z^2 - 0.5z + 0.5z}{z^2 - z + 1}$$

$$= \frac{z(z-0.5)}{z^2 - z + 1} + \frac{0.5\,z}{z^2 - z + 1}$$

$$= \frac{z(z-0.5)}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - z + 1}$$

$$= \frac{z(z-0.5)}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - z + 1}$$

Άρα $$y_k = \cos\frac{k\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(= \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{k\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \right.$$

$$\left. = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{3}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\cos\frac{k\pi}{3} + \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\cancel{2}}\sin\frac{k\pi}{3} = \cos\frac{k\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{k\pi}{3} \right)$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\xi_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Ελεγξιμότητα και παρατηρησιμότητα

Έστω το σύστημα: $x_{k+1} = A x_k + B u_k$, $k \geq 0$, όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Η λύση του συστήματος είναι

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u_j \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

<u>Ορισμός</u>: Το σύστημα $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο, αν για κάθε ζεύγος (x_a, x_b) όπου $x_a \in \mathbb{R}^n$, $x_b \in \mathbb{R}^n$, υπάρχει ακέραιος $r \geq 0$ και διανύσματα $\{u_0, u_1, \dots u_{r-1}\}$ ~~σε~~ τέτοια ώστε ~~να καταλήγει~~ το διάνυσμα x_r που ~~παράγεται~~ ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{ll} x_{k+1} = A x_k + B u_k & k = 0, 1, 2, \dots, r-1 \\ x_0 = x_a & \end{array}\right\}$$

ικανοποιεί τη σχέση ~~$x_b =$~~ $x_r = x_b$. (Ισοδύναμα: (A,B) πλήρως ελέγξιμο).

<u>Θεώρημα</u>: (Cayley - Hamilton): Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση, δηλ. αν $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$, τότε
$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$.

<u>Πόρισμα</u>: Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε κάθε πίνακας A^i $(i \geq 0)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των πινάκων $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$.

<u>Απόδειξη</u>: Προφανές για $i < n$ λόγω του ~~CH~~ θεωρήματος Cayley-Hamilton. Έστω ότι για $j \geq n$ το θεώρημα ισχύει για κάθε $i \leq j$. Τότε εξ υποθέσεως

$$A^j = \beta_0 I + \beta_1 A + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1} \qquad (\beta_0, \dots \beta_{n-1} \in \mathbb{R}).$$

Επομένως

$$A^{j+1} = \beta_0 A + \beta_1 A^2 + \dots + \beta_{n-2} A^{n-1} + \beta_{n-1} A^n$$

$$= \beta_0 A + \beta_1 A^2 + \dots + \beta_{n-2} A^{n-1} + \beta_{n-1} \left(-a_0 I - a_1 A - \dots - a_{n-1} A^{n-1} \right)$$

$$= -a_0 \beta_{n-1} I + (\beta_0 - a_0 \beta_{n-1}) A + \dots + (\beta_{n-2} - a_{n-1} \beta_{n-1}) A^{n-1}$$

Και επομένως $A^{j+1} \in \langle I, A, \dots, A^{n-1} \rangle$.

<u>Θεώρημα</u>: (A,B) πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\mathrm{Rank}(W) = n$ όπου: $W = [B \vdots AB \vdots \dots A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{m \times nm}$ (πίνακας ελεγξιμότητας).

<u>Απόδειξη.</u>

$(\Leftarrow)$: Έστω $\mathrm{Rank}(W) = n \Rightarrow \mathcal{R}(W) = \mathbb{R}^n$. Επομένως για κάθε $\underline{x_a}, \underline{x_b} \in \mathbb{R}^n$ $\exists\, \underline{\psi} \in \mathbb{R}^{mn}$:

$$\underline{x_b} - A^n \underline{x_a} = W \underline{\psi}$$

Γράφουμε $\underline{\psi}^T = [\, u_{n-1}^T \vdots u_{n-2}^T \vdots \dots \vdots \underline{u}_0^T \,]$, $\underline{u}_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 0, \dots n-1)$

Τότε

$$\underline{x_b} = A^n \underline{x_a} + [B \vdots AB \vdots \dots \vdots A^{n-1}B] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ \underline{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x_b} = A^n \underline{x_a} + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B \underline{u}_j$$

Και επομένως (A,B) πλήρως ελέγξιμο.

$(\Rightarrow)$: Έστω ότι (A,B) πλήρως ελέγξιμο αλλά $\text{Rank}(W)<n$. Τότε οι γραμμές του W είναι εξαρτημένες και $\exists\, \underline{\xi} \neq 0$:

$$\underline{\xi}^T \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2 B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1} B \right] = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T B = \underline{\xi}^T AB = \cdots = \underline{\xi}^T A^{n-1} B = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T A^i B = 0 \qquad \forall i \in \mathbb{N}_0 \qquad (\text{Πόρισμα})$$

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ και ακολουθία εισόδων $\{\underline{u}_0, \underline{u}_1, \ldots \underline{u}_{k-1}\}$ τέτοια ώστε $\underline{x}_k = \underline{\xi}$ αν $\underline{x}_0 = \underline{0}$. Πράγματι αν υπήρχε τέτοια ακολουθία, τότε:

$$\underline{\xi} = \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B \underline{u}_j$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T \underline{\xi} = \|\underline{\xi}\|^2 = \sum_{j=0}^{k-1} \underline{\xi}^T A^{k-j-1} B \underline{u}_j = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\xi} = \underline{0} \quad (\text{άτοπο}). \qquad \square$$

αν (A,B) πλ. ελέγξιμ

<u>Παρατήρηση</u>: Η απόδειξη του Θεωρήματος λέει ότι για κάθε ζεύγος $(\underline{x}_a, \underline{x}_b)$ υπάρχει ακολουθία διανυσμάτων εισόδων πού οδηγεί τό σύστημα από την αρχική κατάσταση $\underline{x}_a$ στην τελική κατάσταση $\underline{x}_b$ σέ n τό πολύ βήματα. Μία ακολουθία με αυτήν την ιδιότητα είναι:

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_{n-1} \\ \underline{u}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix} = W^T (W W^T)^{-1} (\underline{x}_b - A^n \underline{x}_a).$$

$(\text{Rank}(W) = n \Rightarrow W W^T > 0)$. Πράγματι:

$$\underline{x}_n = A^n \underline{x}_a + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k-1} B\, \underline{u}_k =$$

$$= A^n \underline{x}_0 + W \begin{bmatrix} \underline{u}_{n-1} \\ \vdots \\ \underline{u}_0 \end{bmatrix} = A^n \underline{x}_a + W W^T (W W^T)^{-1} (x_b - A^n x_a)$$

$$= \underline{x}_b$$

<u>Παράδειγμα:</u> Ένα σύστημα πού δεν είναι πλήρως ελέγξιμο είναι:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}^1_{k+1} \\ \underline{x}^2_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1_k \\ x^2_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{u}_k$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \underline{x}^1_{k+1} &= A_{11} x^1_k + A_{12} x^2_k + B_1 u_k \\ \underline{x}^2_{k+1} &= A_{22} \underline{x}^2_k \end{aligned}\right\}.$$

Τό $\underline{x}^2_{k+1}$ δεν επηρεάζεται καθόλου από τό σήμα εισόδου (π.χ αν $\underline{x}^2_0 = 0 \Rightarrow \underline{x}^2_k = 0 \quad \forall k \geq 0$). Ο πίνακας ελεγξιμότητας

$$W = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \; A^{n-1} B].$$

όπου: $$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

και γενικά $$A^j B = \begin{bmatrix} A^j_{11} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Rank}(W) = \operatorname{Rank}\left(\begin{bmatrix} B_1 & A_{11} B & \cdots & A^{n-1}_{11} B \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\leq \dim(A_{11}) < n$$

<u>Θεώρημα</u>. Έστω ότι το σύστημα (A,B) δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε υπάρχει μη ιδιάζων πίνακας T με τις παρακάτω ιδιότητες. Αν

$$\tilde{A} = T^{-1}AT \quad , \quad \tilde{B} = T^{-1}\cancel{A}B$$

τότε οι πίνακες $\tilde{A}$ και $\tilde{B}$ γράφονται:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

όπου $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}}$, $\tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times m}$ $(\tilde{n} < n)$ και $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $W = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \, A^{n-1}B]$ ο πίνακας ελεγξιμότητας και $\tilde{n} = \text{Rank}(W)$. Έστω $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}}\}$ μία βάση του $\mathcal{R}(W)$ και $\{\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}}, \underline{v}_{\tilde{n}+1}, \ldots \underline{v}_n\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον πίνακα $T = [T_1 \,\vdots\, T_2]$ όπου

$$T_1 = [\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}}] \quad , \quad T_2 = [\underline{v}_{\tilde{n}+1}, \ldots \underline{v}_n]$$

δηλ. αν $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(W)$ τότε $\mathcal{X}_c \oplus \langle \underline{v}_{\tilde{n}+1}, \ldots \underline{v}_n \rangle = \mathbb{R}^n$). Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(I) $A\underline{v}_j \in \langle \underline{v}_1, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}} \rangle$ για $j = 1, 2, \ldots \tilde{n}$
(Ο χώρος $\mathcal{X}_c$ είναι A-αναλλοίωτος) :

Έστω $\underline{v}_j$ όπου $1 \leq j \leq \tilde{n}$. Εφόσον $\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c$

$$\underline{v}_j = [B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{bmatrix}$$

γιά κατάλληλα $\underline{a}_i \in \mathbb{R}^m$ $(i=1,2,\dots m)$. Τότε

$$A\underline{v}_j = [AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^nB] \begin{bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{bmatrix}$$

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton:

$$A^n = -\beta_{n-1}A^{n-1} - \beta_{n-2}A^{n-2} - \dots - \beta_0 I$$

όπου $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \beta_0$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Επομένως

$$A\underline{v}_j = \underbrace{[B \vdots AB \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]}_{W} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_{n-1} \end{bmatrix}}_{\underline{\psi}_1} + A^nB\underline{a}_n$$

$$+ \cancel{A^nB\underline{a}_n}$$

$$= W\underline{\psi} + [-\beta_0 I \vdots -\beta_1 A \vdots \cdots -\beta_{n-1}A^{n-1}]B\underline{a}_n$$

$$= W\underline{\psi}_1 - \underbrace{[B \vdots AB \cdots \vdots A^{n-1}B]}_{W} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_0\underline{a}_n \\ \beta_1\underline{a}_n \\ \vdots \\ \beta_{n-1}\underline{a}_n \end{bmatrix}}_{\underline{\psi}_2}$$

$$= W(\underline{\psi}_1 - \underline{\psi}_2)$$

και επομένως $A\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c$

Ο πίνακας $\tilde{A}$ ορίζεται ως: $T\tilde{A} = AT$. Έστω ότι

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \qquad \tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$$

$$\Rightarrow [T_1 \,\vdots\, T_2] \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = A [T_1 \,\vdots\, T_2].$$

$$\Rightarrow A T_1 = T_1 \tilde{A}_{11} + T_2 \tilde{A}_{21}$$

Οι στήλες του πίνακα AT_1 είναι $A\underline{v}_j \in \mathcal{X}_c$ γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των $\{\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}}\}$ μέσω του πίνακα $T_1 \tilde{A}_{11}$ και επομένως $\tilde{A}_{21} = 0$. (αν $\tilde{A}_{21} \neq 0$ ~~για~~ ένα τουλάχιστον διάνυσμα $A\underline{v}_j$ $(1 \leq j \leq \tilde{n})$ θα γραφόταν με δύο διαφορετικούς γραμμικούς συνδυασμούς ~~του~~ της βάσης $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_n\}$, αδύνατον!).

Ο πίνακας $\tilde{B}$ ορίζεται ως: $B = T\tilde{B}$. Έστω ότι

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times m}$$

Έχουμε: $$B = [T_1 : T_2] \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} = T_1 \tilde{B}_1 + T_2 \tilde{B}_2$$

Οι στήλες του B είναι οι πρώτες m στήλες του W και επομένως γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των $\{\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_{\tilde{n}}\}$ μέσω του πίνακα $T_1 \tilde{B}_1$ και επομένως $\tilde{B}_2 = 0$ (Αν $\tilde{B}_2 \neq 0$ ένα τουλάχιστον διάνυσμα $A\underline{v}_j$ $(1 \leq j \leq \tilde{n})$ θα γραφόταν ως γραμμικός συνδυασμός των $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots \underline{v}_n\}$ με τουλάχιστον δύο τρόπους, αδύνατον αφού $\{\underline{v}_1, \ldots \underline{v}_n\}$ βάση του $\mathbb{R}^n$).

Επομένως δείξαμε ότι:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Απομένει να δείξουμε ότι $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο. Έχουμε:

$$\tilde{n} = \text{Rank}\left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B\right]$$

$$= \text{Rank}\; T^{-1}\left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B\right]$$

$$= \text{Rank}\; T^{-1}\left[B \,\vdots\, AT\cdot T^{-1}B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}T\cdot T^{-1}B\right]$$

$$= \text{Rank}\left[(T^{-1}B) \,\vdots\, (T^{-1}AT)(T^{-1}B) \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, (T^{-1}AT)^{n-1}(T^{-1}B)\right]$$

$$= \text{Rank}\left[\tilde{B} \,\vdots\, \tilde{A}\tilde{B} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \tilde{A}^{n-1}B\right].$$

$$= \text{Rank}\left[\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \,\vdots\, \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \text{Rank}\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \cdots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Rank}\left[\tilde{B}_1 \,\vdots\, \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \tilde{A}_{11}^{\tilde{n}-1}\tilde{B}_1\right].$$

$\Rightarrow (\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο σύστημα. $\square$

<u>Παρατήρηση:</u> Ο ελέγξιμος υπόχωρος $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}(W)$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει τό $\mathcal{R}(B)$.

<u>Θεώρημα</u>: Το σύστημα (A,B) είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\text{Rank}\,[sI-A \,\vdots\, B] = n$ γιά όλες τις ιδιοτιμές του A.

<u>Απόδειξη</u>: $(\Rightarrow)$: Εστω ότι $\text{Rank}\,[s_0 I - A \,\vdots\, B] < n$ γιά κάποιο $s_0 \in \sigma(A)$. Τότε $\exists\, \underline{\xi} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{\xi} \neq 0$:

$$\underline{\xi}^T \left[s_0 I - A \;\vdots\; B \right] = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T B = 0 \text{ και } \underline{\xi}^T A = s_0 \underline{\xi}^T \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\xi}^T \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots \cdots A^{n-1} B \right] = \underline{0}$$

Εστω $\underline{\xi} = \underline{u} + i\underline{v}$, $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$. Εφόσον $\underline{\xi} \neq 0$, ένα τουλάχιστον από τα $(\underline{u}, \underline{v})$ είναι διάφορο του μηδενικού διανύσματος. Εχουμε

$$(\underline{u}^T + i\underline{v}^T) W = 0 \Rightarrow (\underline{u}^T W) + i (\underline{v}^T W) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{u}^T W = \underline{v}^T W = 0$$

Εφόσον $\underline{u} \neq 0$ ή $\underline{v} \neq 0$, $\text{Rank}(W) < n \Rightarrow (A,B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο.

$(\Leftarrow)$: Εστω ότι (A,B) δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Θα δείξουμε ότι $\text{Rank}\,[sI-A \,\vdots\, B] < n$ γιά κάποιο $s \in \mathbb{C}$. Εφόσον (A,B) δεν είναι πλήρως ελέγξιμο $\exists\, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(T) \neq 0$: $\tilde{A} = T^{-1} A T$ και $\tilde{B} = T^{-1} B$ οπου

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \vdots & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & \vdots & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad \left(\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times\tilde{n}},\ \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{\tilde{n}\times m},\ \tilde{n} < n \right).$$

Έστω ότι $s_0 \in \sigma(\tilde{A}_{22})$ και $\underline{\xi}^T \in \mathbb{C}^{n-\hat{n}}$ το αντίστοιχο (αριστερό) ιδιοδιάνυσμα, δηλ $\underline{\xi} \neq 0$: $\underline{\xi}^T \tilde{A}_{22} = s_0 \underline{\xi}^T$. Θα δείξουμε ότι $\text{Rank}[s_0 I - A \,\vdots\, B] < n$ η ισοδύναμα ότι:

$$\text{Rank}\left(T^{-1} [s_0 I - A \,\vdots\, B] \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\right) < n$$

Έχουμε:

$$[0 \,\vdots\, \underline{\xi}^T]\, T^{-1} [s_0 I - A \,\vdots\, B] \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} =$$

$$= [0 \,\vdots\, \underline{\xi}^T]\, [s_0 I - T^{-1} A T \,\vdots\, T^{-1} B] =$$

$$= [0 \,\vdots\, \underline{\xi}^T] \begin{bmatrix} s_0 I - \tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} & \vdots & \tilde{B}_1 \\ 0 & s_0 I - \tilde{A}_{22} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [\underline{0} \,\vdots\, \underline{\xi}^T (s_0 I - \tilde{A}_{22}) \,\vdots\, \underline{0}] = \underline{0}$$

Επομένως οι γραμμές του πίνακα $[s_0 I - A \,\vdots\, B]$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες και επομένως $\text{Rank}[s_0 I - A \,\vdots\, B] < n$.

<u>Παρατήρηση</u>: Εφόσον $\text{Rank}[s I_n - A] = n$ αν $s \notin \sigma(A)$ μία ισοδύναμη πρόταση με το Θεώρημα είναι (A, B) πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\text{Rank}[s I_n - A \,\vdots\, B] = n$ $\forall s \in \mathbb{C}$.

<u>Παρατηρησιμότητα</u>: Έστω το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A \underline{x}_k + B \underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C \underline{x}_k + D \underline{u}_k \end{aligned}\right\} \quad k \geq 0.$$

Ερώτηση: Αν η ακολουθία $\{\underline{u}_k : k \geq 0\}$ είναι γνωστή καί παρατηρούμε την έξοδο του συστήματος $\{\underline{y}_k : 0 \leq k \leq j\}$ είναι δυνατόν νά προβλέψουμε την έξοδο γιά $k > j$. ; Ναί, αν μπορούμε νά εκτιμήσουμε την αρχική κατάσταση $\underline{x}_0$ (γιατί από τά $(\underline{x}_0, \underline{u}_k)$ συμπεραίνουμε τά $(\underline{x}_k)$ καί από τά $(\underline{x}_k)$ καί $(\underline{u}_k)$ τά $(\underline{y}_k)$). Χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε νά υποθέσουμε ότι $\underline{u}_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Ορισμός: Έστω ότι $\underline{y}_k$, $k \geq 0$, είναι η λύση του συστήματος : $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k$ μέ αρχική κατάσταση $\underline{x}_0$. Τό σύστημα (A, C) είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν υπάρχη $k \geq 0$ έτσι ώστε η αρχική κατάσταση $\underline{x}_0$ νά καθορίζεται (μονοσήμαντα) από την ακολουθία $(\underline{y}_0, \underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_k)$.

Θεώρημα: Τό σύστημα (A, C) είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν καί μόνο αν $\text{Rank}(\Gamma_0) = n$ όπου:

$$\Gamma_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$$

Απόδειξη: Έχουμε $\underline{y}_k = CA^k \underline{x}_0$ $(k \geq 0)$ καί επομένως

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_0 \\ \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \underline{x}_0 = \Gamma_0 \underline{x}_0$$

$(\Leftarrow)$:

$(\Leftarrow)$: Αν $\text{Rank}(\Gamma_0) = n$ τότε $\underline{x}_0 = (\Gamma_0^T \Gamma_0)^{-1} \Gamma_0^T \begin{bmatrix} \underline{y}_0 \\ \vdots \\ \underline{y}_{n-1} \end{bmatrix}$.

Και επομένως (A, C) πλήρως παρατηρήσιμο.

$(\Rightarrow)$: Έστω ότι (A, C) πλήρως παρατηρήσιμο αλλά $\mathrm{Rank}(\Gamma_o) < n$.
Τότε $\exists\, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\xi} \neq \underline{0}$: $\Gamma_o \underline{\xi} = \underline{0}$

$$\Rightarrow C\underline{\xi} = CA\underline{\xi} = \cdots = CA^{n-1}\underline{\xi} = 0$$

$$\Rightarrow CA^k \underline{\xi} = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Και επομένως (A, C) δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο γιατί είναι αδύνατον από ακολουθία εξόδων $\{y_k = 0, 0 \leq k \leq N\}$ με αυθαίρετα μεγάλο N να ~~καθορίσουμε μόνο~~ καθορίσουμε την αρχική κατάσταση ως $\underline{x_0} = \underline{\xi}$ ή $\underline{x_0} = 0$.

<u>Θεώρημα</u>: (A, B) πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν (A^T, B^T) πλήρως παρατηρήσιμο.

<u>Απόδειξη</u>:

$$(A, B) \text{ πλήρως ελέγξιμο} \Leftrightarrow \mathrm{Rank}\left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B\right] = n$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} = n \Leftrightarrow (A^T, B^T) \text{ πλήρως παρατηρήσιμο.}$$

$\square$

<u>Παρατήρηση</u>: Οι έννοιες πλήρους ελεγξιμότητας / πλήρους παρατηρησιμότητας είναι "δυϊκές"

<u>Παρατήρηση</u>: $\mathcal{X}_{\bar{o}} = \mathcal{N}_r(\Gamma_o)$ είναι ο μη παρατηρήσιμος

υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Ο $\mathcal{X}_{\bar{o}}$ είναι ο μεγαλύτερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που περιέχεται στο $\mathcal{N}_r(\Gamma_o)$.

<u>Θεώρημα</u>: (A, C) πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν ~~Rea~~

$$\text{Rank}\begin{bmatrix} s_o I - A \\ C \end{bmatrix} = n \qquad \forall\, s_o \in \sigma(A).$$

<u>Απόδειξη</u>: (A, C) πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν $(A^T, \cancel{B}\, C^T)$ πλήρως ελέγξιμο

$$\Leftrightarrow \quad \text{Rank}\left[s_o I - A^T \,\vdots\, C^T \right] = n \qquad \forall\, s_o \in \sigma(A) = \sigma(A^T)$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Rank}\left(\begin{bmatrix} s_o I - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n \qquad \forall\, s_o \in \sigma(A)$$

$\square$

Ανάδραση καταστάσεων χώρου

Έστω σύστημα μιας εισόδου: $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}u_k$, $k \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Θέτουμε $u_k = \underline{f}^T \underline{x}_k$ (ανάδραση κατάστασης, $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$). Έστω ότι $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο, δηλ.

$$\Gamma_c = [\, \underline{b} \,\vdots\, A\underline{b} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}\underline{b} \,] \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad |\Gamma_c| \neq 0$$

Έστω $\varphi(\lambda)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, δηλ.

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Ορίζουμε τα διανύσματα $\underline{q}_n, \underline{q}_{n-1}, \ldots \underline{q}_1 \in \mathbb{R}^n$ ως εξής:

(i) $\underline{q}_n = \underline{b}$

(ii) $\underline{q}_{n-1} = A\underline{q}_n + a_{n-1}\underline{b} = A\underline{b} + a_{n-1}\underline{b}$

(iii) $\underline{q}_{n-2} = A\underline{q}_{n-1} + a_{n-2}\underline{b} = A^2\underline{b} + a_{n-1}A\underline{b} + a_{n-2}\underline{b}$

$\vdots$

(n) $\underline{q}_1 = A\underline{q}_2 + a_1\underline{b} = A^{n-1}\underline{b} + a_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \cdots + a_1\underline{b}$

Λήμμα: (i) $A\underline{q}_1 + a_0\underline{b} = 0$, (ii) Ο πίνακας $Q = [\underline{q}_1, \underline{q}_2 \ldots \underline{q}_n]$ είναι μη ιδιάζων αν και μόνο αν $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη: (i) $A\underline{q}_1 + a_0\underline{b} = A(A^{n-1}\underline{b} + a_{n-1}A^{n-2}\underline{b} + \cdots + a_1\underline{b}) + a_0\underline{b}$

$= A^n\underline{b} + a_{n-1}A^{n-1}\underline{b} + \cdots + a_1A\underline{b} + a_0\underline{b}$

$= (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I)\underline{b} = \varphi(A)\underline{b} = 0$

(Cayley-Hamilton)

Οι σχέσεις που ορίζουν τα $\underline{q}_i$ γράφονται:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 & \cdots & \underline{q}_{n-1} & \underline{q}_n \end{bmatrix}}_{Q} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{b} & A\underline{b} & \cdots & A^{n-2}\underline{b} & A^{n-1}\underline{b} \end{bmatrix}}_{\Gamma_c} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{H_a}$$

$$\Rightarrow |Q| = |\Gamma_c|\,|H_a| = (-1)^{n+1}\,|\Gamma_c|$$

και $\quad |Q| \neq 0 \iff (A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο.

Θεώρημα: $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν $\exists\, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|Q| \neq 0$: $(A, \underline{b}) \overset{Q}{\sim} (Q^{-1}AQ,\, Q^{-1}\underline{b})$, $\tilde{\underline{x}} = Q^{-1}\underline{x}$, έτσι ώστε οι πίνακες $Q^{-1}AQ =: \tilde{A}$ και $Q^{-1}\underline{b} = \tilde{\underline{b}}$ να ικανοποιούν:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Σημείωση: Το σύστημα $(\tilde{A}, \tilde{\underline{b}})$ είναι σε μορφή companion ή canonical controllable form. (κανονική μορφή ελεγξιμότητας).

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$: Έστω $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο. Τότε $|\Gamma_c| \neq 0$. Ορίζουμε πίνακα Q όπως στο προηγούμενο Λήμμα. Θα επαληθεύσουμε τις σχέσεις $Q\tilde{A} = AQ$ και $Q\tilde{\underline{b}} = \underline{b}$:

$$\underline{q}_n = \underline{b} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{q}_1 & \underline{q}_2 & \cdots & \underline{q}_n \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{b}}} = \underline{b}$$

Από τις σχέσεις : (ω) − (η) :

$$A\underline{q}_n = \underline{q}_{n-1} - a_{n-1}\underline{b} = \underline{q}_{n-1} - a_{n-1}\underline{q}_n$$

$$\vdots$$

$$A\underline{q}_{n-1} = \underline{q}_{n-2} - a_{n-2}\underline{b} = \underline{q}_{n-2} - a_{n-2}\underline{q}_n$$

$$\vdots$$

$$A\underline{q}_2 = \underline{q}_1 - a_1\underline{b} = \underline{q}_1 - a_1\underline{q}_n$$

Σε αυτές προσθέτουμε :

$$A\underline{q}_1 = -a_0 \underbrace{\underline{b}}_{\underline{q}_n} \qquad (\text{Λήμμα } (\iota))$$

Σε μορφή πίνακα :

$$A\underbrace{[\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_{n-1}\ \underline{q}_n]}_{Q} = \underbrace{[\underline{q}_1\ \underline{q}_2 \cdots \underline{q}_{n-1}\ \underline{q}_n]}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{A}}$$

$$\text{δηλ. } AQ = Q\tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} = Q^{-1}AQ, \quad \underline{\tilde{b}} = Q^{-1}\underline{b}$$

(⇐): Έστω ότι υπάρχει μετασχηματισμός ισοδυναμίας Q, $|Q| \neq 0$, $(A, \underline{b}) \overset{Q}{\sim} (\tilde{A}, \underline{\tilde{b}})$ όπου $(\tilde{A}, \underline{\tilde{b}})$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας. Ο πίνακας ελεγξιμότητας του ζεύγους $(\tilde{A}, \tilde{b})$:

$$\tilde{\Gamma}_c = [\,\underline{\tilde{b}} \mid \tilde{A}\underline{\tilde{b}} \mid \cdots \mid \tilde{A}^{n-1}\underline{\tilde{b}}\,] \qquad \text{όπου :}$$

$$\underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}\underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^2\underline{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ * \\ * \end{bmatrix} \quad \text{κλπ,}$$

δηλ. $\tilde{\Pi}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & * \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \Rightarrow |\tilde{\Pi}_c| = (-1)^{n+1} \neq 0$

Επομένως $(\tilde{A}, \tilde{b})$ πλήρως ελέγξιμο $\Rightarrow$ $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο αφού ιδιότητα ελεγξιμότητας παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς ισοδυναμίας. $\square$

Έστω σύστημα $(A, \underline{b})$: $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}\, u_k$, $u_k = \underline{f}^T \underline{x}_k$

$$\Rightarrow \underline{x}_{k+1} = (A + \underline{b}\,\underline{f}^T)\underline{x}_k := A_c \underline{x}_k$$

Ισοδύναμο σύστημα: $(\tilde{A}, \tilde{b}) = (Q^{-1}AQ, Q^{-1}\underline{b})$: $\tilde{\underline{x}}_k = Q^{-1}\underline{x}_k$.

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{\underline{x}}_k + \tilde{\underline{b}}\, u_k \quad , \quad u_k = \tilde{\underline{f}}^T \tilde{\underline{x}}_k$$

$$\Rightarrow \tilde{\underline{x}}_{k+1} = (\tilde{A} + \tilde{\underline{b}}\,\tilde{\underline{f}}^T)\tilde{\underline{x}}_k =: \tilde{A}_c \tilde{\underline{x}}_k.$$

$$\Rightarrow Q^{-1}\underline{x}_{k+1} = (Q^{-1}AQ + Q^{-1}\underline{b}\,\tilde{f}^T)Q^{-1}\underline{x}_k$$

$$\Rightarrow \underline{x}_{k+1} = A + \underline{b}\,\tilde{f}^T Q^{-1}\, \underline{x}_k$$

$$\Rightarrow \tilde{\underline{f}}^T Q^{-1} = \underline{f}^T \Rightarrow \underline{\tilde{\underline{f}}^T = \underline{f}^T Q \Leftrightarrow \underline{f}^T = \tilde{\underline{f}}^T Q^{-1}}$$

<u>Πρόβλημα τοποθέτησης ιδιοτιμών:</u> Επιλέξτε $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_{A_c}(\lambda) = |\lambda I - A - \underline{b}\,\underline{f}^T|$ $= \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_1\lambda + d_0$ όπου $\underline{d}^T = [d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}]$ δοσμένο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$.

Πρόβλημα σταθεροποίησης: Επιλέξτε $\underline{f} \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε η φασματική ακτίνα $\rho(A_c) = \rho(A + \underline{b}\underline{f}^T) < 1$.

Θεώρημα: $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν για κάθε διάνυσμα $\underline{d}^T = [d_0, d_1, \dots, d_{n-1}]^T$ $\exists\, \underline{f} \in \mathbb{R}^n : \chi_{A_c}(\lambda) =$
$= \det(\lambda I - A - \underline{b}\underline{f}^T) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_0$.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$: Έστω $(A, \underline{b})$ πλήρως ελέγξιμο και $\chi_{A_c}(\lambda) =$
$= \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$ το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Από προηγούμενο Θεώρημα $\exists\, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|Q| \neq 0$:
$(A, \underline{b}) \overset{Q}{\sim} (\tilde{A}, \tilde{\underline{b}})$, $\tilde{\underline{x}}_k = Q^{-1}\underline{x}_k$, και όπου $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$, $\tilde{b} = Q^{-1}\underline{b}$ σε κανονική μορφή ελεγξιμότητας:

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{\underline{x}}_k + \tilde{\underline{b}}\, u_k \quad , \quad \text{όπου}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} , \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, με νόμο ανάδρασης κατάστασης

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1} = \tilde{A}\underline{x}_k + \tilde{\underline{b}}\, u_k = \tilde{A}\underline{x}_k + \tilde{b}(\tilde{\underline{f}}^T\tilde{\underline{x}}_k)$$

$$= (\tilde{A} + \tilde{\underline{b}}\tilde{\underline{f}}^T)\tilde{\underline{x}}_k$$

Έστω ότι $\tilde{f}^T = [\tilde{f}_0\ \tilde{f}_1 \cdots \tilde{f}_{n-1}]^T$. Τότε:

$$\tilde{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{f}_0 & \tilde{f}_1 & \cdots & \tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0+\tilde{f}_0 & -a_1+\tilde{f}_1 & \cdots & & -a_{n-1}+\tilde{f}_{n-1} \end{bmatrix}$$

επίσης σε μορφή companion. Επιλέγοντας $d_i = \tilde{f}_i - a_i$ $\Leftrightarrow$ $\tilde{f}_i = d_i - a_i$ $(i=0,1,\dots,n-1)$ ή $\tilde{f}^T = \underline{d}^T - \underline{a}^T$ όπου $a^T = [a_0\ a_1 \dots a_{n-1}]$ έχουμε:

$$\chi_{\tilde{A}_c}(\lambda) = |\lambda I - \tilde{A}_c| = |\lambda I - \tilde{A} - \tilde{b} f^T| =$$

$$= \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$$

Εφόσον χαρακτηριστικό πολυώνυμο αναλλοίωτο από μετασχηματισμούς ομοιομορφίας:

$$\chi_{A_c}(\lambda) = \chi_{\tilde{A}_c}(\lambda) = |\lambda I - A_c| = |\lambda I - A - \underline{b}\underline{f}^T|$$

$$= \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$$

αν $\underline{f}^T = \tilde{\underline{f}}^T Q^{-1}$. Απο προηγούμενο θεώρημα $Q^{-1} = (\Pi_c H_a)^{-1} =$
$= H_a^{-1}\Pi_c^{-1}$, όπου

$$\Pi_c = [\underline{b}\ A\underline{b} \dots A^{n-1}\underline{b}], \qquad H_a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

και επομένως: $\underline{f}^T = (\underline{d}^T - \underline{a}^T)(\Gamma_c H_a)^{-1}$, η κατάλληλη ανάδραση κατάστασης ώστε $|\lambda I - A_c| = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_0$.

($\Leftarrow$): Έστω ότι τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού πίνακα $A + \underline{b}\underline{f}^T$ μπορεί νά καθοριστεί αυθαίρετα μέσω της ανάδρασης $\underline{f}^T$. Υποθέτουμε γιά αντίφαση ότι $(A, \underline{b})$ δέν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε $\exists R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $|R| \neq 0$:

$$(A, \underline{b}) \overset{R}{\sim} (\hat{A}, \hat{\underline{b}}), \quad \hat{A} = R^{-1} A R, \quad \hat{\underline{b}} = R^{-1}\underline{b}$$

όπου: $$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι γιά κάθε $\hat{\underline{f}}^T \in \mathbb{R}^n$, $\hat{\underline{f}}^T = [\hat{f}_1^T \ \hat{f}_2^T]$:

$$\hat{A}_{cf} =: \hat{A} + \hat{b}\hat{\underline{f}}^T = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_1^T & \hat{f}_2^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + \cancel{\hat{A}_{12}}\, \hat{b}_1 \hat{f}_1^T & \hat{A}_{12} + \hat{b}_1 \hat{f}_2^T \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow |\lambda I - \hat{A} - \hat{b}\hat{f}^T| = \underbrace{|\lambda I - \hat{A}_{11} - \hat{b}_1 \hat{f}_1^T|}_{\varphi_1(\lambda)} \cdot \underbrace{|\lambda I - \hat{A}_{22}|}_{\varphi_2(\lambda)}$$

$\Rightarrow \varphi_2(\lambda) \mid \chi_{\hat{A}_c}(\lambda) \Rightarrow \varphi_2(\lambda) \mid \chi_{A_c}(\lambda)$ και επομένως τό $\chi_{A_c}(\lambda)$ δέν μπορεί νά καθοριστεί αυθαίρετα. $\square$

<u>Πόρισμα</u>: $\exists \underline{f}^T \in \mathbb{R}^n : \rho(A + \underline{b}\underline{f}^T) < 1$ αν και μόνο αν $|\lambda_i(A)| < 1$ γιά κάθε $\lambda_i(A)$: $\text{Rank}\,[\lambda_i I - A \,\vdots\, b] < n$.

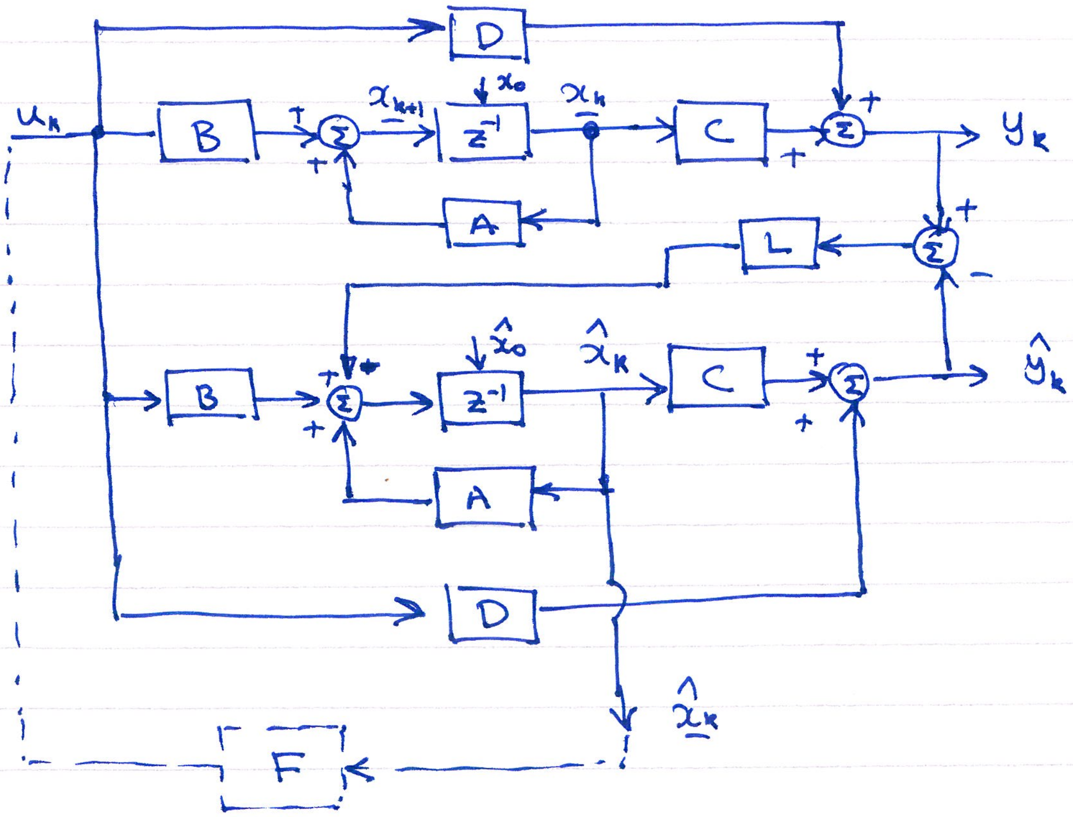
Παρατηρητές (Εκτιμητές κατάστασης) – Observers.

Έστω το σύστημα $\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k$, $\underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k$ ($k \geq 0$) όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Ένας γραμμικός παρατηρητής κατασκευάζει εκτίμηση του διανύσματος κατάστασης $\underline{x}_k$, $\hat{\underline{x}}_k$, χρησιμοποιώντας ως πληροφορία την είσοδο και έξοδο του συστήματος $\underline{u}_m$, $0 \leq m \leq k$ και $\underline{y}_m$, $0 \leq m \leq k$. Ο παρατηρητής είναι δυναμικό σύστημα που ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} = A\hat{\underline{x}}_k + B\underline{u}_k - L(\underline{y}_k - \hat{\underline{y}}_k), \quad \hat{\underline{y}}_k = C\hat{\underline{x}}_k + D\underline{u}_k$$

Ο πίνακας $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ είναι ο "πίνακας ενίσχυσης" του παρατηρητή. Θα επιλέξουμε τον πίνακα L έτσι ώστε $\hat{\underline{x}}_k \to \underline{x}_k$ $\forall\, \underline{x}_0, \hat{\underline{x}}_0 \in \mathbb{R}^n$. Σχηματικά:



Ορίζουμε τό σφάλμα εκτίμησης $\underline{e}_k = \underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k$ καί έχουμε:

$$\underline{e}_{k+1} = \underline{x}_{k+1} - \hat{\underline{x}}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k - \left[A\hat{\underline{x}}_k + B\underline{u}_k - L(C\underline{x}_k - C\hat{\underline{x}}_k)\right]$$

$$= (A+LC)(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k) = (A+LC)\,\underline{e}_k$$

$$\Rightarrow \quad \underline{e}_k = (A+LC)^k \underline{e}_0 \quad , \quad \underline{e}_0 = \underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0$$

Συνεπώς $\underline{e}_k \to 0$ $\forall\, \underline{e}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν καί μόνο αν ~~σ(A+LC)~~ $\rho(A+LC) < 1$

Παρατηρούμε ότι αν τό σύστημα ~~(A,C~~ (A,C) είναι πλήρως παρατηρήσιμο (ισοδύναμα (A^t, C^t) πλήρως ελέγξιμο) τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_{A+LC}(\lambda)$ μπορεί νά επιλεγεί αυθαίρετα μέσω τών πίνακα L:

$$\chi_{A^T + C^T L^T}(\lambda) = \chi_{A+LC}(\lambda) = \det[\lambda I - A - LC].$$

καί τό πρόβλημα ανάγεται σέ ανάδραση κατάστασης (μέ $F = L^T$, $A \leftarrow A^T$, $B \leftarrow C^T$).

Ανάδραση εξόδου καί αρχή διαχωρισμού

Συνδιασμός παρατηρητή καί ανάδρασης κατάστασης (μέσω εκτίμησης $\hat{\underline{x}}_k$) που έχει ως αποτέλεσμα έναν δυναμικό ~~παρα~~ αντισταθμιστή ανάδρασης εξόδου. Οι εξισώσεις είναι:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= A\underline{x}_k + B\underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C\underline{x}_k + D\underline{u}_k \\ \underline{x}_0 &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_{k+1} &= A\hat{\underline{x}}_k + B\underline{u}_k - L(\underline{y}_k - \hat{\underline{y}}_k) \\ \hat{\underline{y}}_k &= C\hat{\underline{x}}_k + D\underline{u}_k \\ \hat{\underline{x}}_0 &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\}$$

$$\underline{u}_k = \underline{r}_k + K\hat{\underline{x}}_k \quad (\underline{r}_k \text{ εξωτερικό σήμα}).$$

Οι εξισώσεις γράφονται ως εξής:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B(K\hat{\underline{x}}_k + \underline{r}_k)$$

$$\hat{\underline{x}}_{k+1} = A\hat{\underline{x}}_k + BK\hat{\underline{x}}_k + B\underline{r}_k - LC(\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k)$$

$$= -LC\underline{x}_k + (A+BK+LC)\hat{\underline{x}}_k + B\underline{r}_k$$

$$\underline{y}_k = C\underline{x}_k + D(K\hat{\underline{x}}_k + \underline{r}_k) = C\underline{x}_k + DK\hat{\underline{x}}_k + D\underline{r}_k$$

ή

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x}_{k+1} \\ \hat{\underline{x}}_{k+1} \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+BK+LC \end{bmatrix}}^{A_c} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \hat{\underline{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \underline{r}_k \\ \underline{y}_k &= \begin{bmatrix} C & \vdots & DK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_k \\ \hat{\underline{x}}_k \end{bmatrix} + D\underline{r}_k \end{aligned}\right\}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}}^{T} \begin{bmatrix} A & BK \\ -LC & A+BK+LC \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix}}^{T=T^{-1}} =$$

$$= \begin{bmatrix} A+BK & -BK \\ 0 & A+LC \end{bmatrix}$$

Και επομένως: $\sigma(A_c) = \sigma(A+BK) \cup \sigma(A+LC)$

δηλ. $\rho(A_c) < 1$.