2

- $K$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ κάθε ακολουθία του έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $K$.
- αν $(D, d)$ πλήρης μ.χ., τότε $K$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ $K$ κλειστό και ολικά φραγμένο
- $K$ ολικά φραγμένο $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \dots, x_n \in K : K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$
- $(D, \|\cdot\|)$ διαν. χώρος με νόρμα, αν $D$ διαν. χώρος και (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, (iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\Rightarrow (D, d_{\|\cdot\|})$ είναι μ.χ με $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\|$ (μετρική που επάγεται από νόρμα)

Παραδείγματα

1) $(\mathbb{R}^K, d_2)$ είναι μ.χ. με $d_2(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} |x_i - y_i|^2}$ : είναι πλήρης + διαχωρίσ. μ.χ.

2) $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ (εκτεταμένοι πραγμ. αριθμοί)

Ορίζουμε $d(x,y) = |\phi(x) - \phi(y)|$, όπου $\phi$ συνεχής & φραγμένη & $\nearrow$, από $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (επέκταση)

$(\overline{\mathbb{R}}, d)$ είναι συμπαγής μ.χ., π.χ. $\Phi \to N(0,1)$ με $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$

$\Rightarrow$ πλήρης + διαχωρίσιμος μ.χ. ή $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(-\infty) = -1$, $f(+\infty) = 1$.

3) χώροι με ομοιόμορφη νόρμα

Αν $T$ αυθαίρετο σύνολο, ορίζουμε $\ell^\infty(T) = \left\{ Z : T \to \mathbb{R} \;\middle|\; \|Z\|_\infty = \sup_{t \in T} |Z(t)| < \infty \right\}$

Αν $d_\infty(Z_1, Z_2) = \|Z_1 - Z_2\|_\infty$, τότε $(\ell^\infty(T), d_\infty)$ είναι πλήρης μ.χ.

Είναι διαχωρίσιμος $\Leftrightarrow$ $T$ είναι αριθμήσιμο.

4) χώρος του Skorohod

Έστω $T = [a,b] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε

$C[a,b] = \{ Z : [a,b] \to \mathbb{R} \mid Z \text{ συνεχής} \}$ (και φραγμένες)

$D[a,b] = \{ Z : [a,b] \to \mathbb{R} \mid Z \text{ δεξιά συνεχής } \forall t \in [a,b) \text{ \& } \exists \text{ αριστερά όρια}, \forall t \in (a,b] \}$

Αν $z \in D[a,b]$, τότε λέγεται cadlag (continue à droite, limite à gauche)

Ισχύει $C[a,b] \subset D[a,b] \subset \ell^\infty[a,b]$ (όλοι με ομοιόμορφη νόρμα)

$C[a,b]$: πλήρης + διαχωρ. μ.χ
$D[a,b]$: πλήρης μ.χ, όχι διαχωρίσιμος
$\ell^\infty[a,b]$: πλήρης μ.χ., όχι διαχωρίσιμος
(χώροι Banach)

- Παρατηρούμε ότι αν $F$ σ.κ. τότε είναι δεξιά συνεχής και $\nearrow$ $\Rightarrow$ $\exists$ τα όρια από αριστερά. Επιπλέον $F(-\infty) = 0$ και $F(+\infty) = 1$.

Άρα $F \in D[-\infty, +\infty] \Rightarrow \mathcal{F} \subset D[-\infty, +\infty]$, όπου $\mathcal{F} = \{ F : F \text{ σ.κ.} \}$

Αν $F, G$ σ.κ. τότε $d(F,G) = \|F - G\|_\infty$

## Σύγκλιση ακολουθίας τυχαίων στοιχείων



Για ακολουθίες τ.μ., γνωρίζουμε ότι:

- $X_\nu \xrightarrow{a.s.} X \iff P\left(\{\omega\in\Omega : \lim\limits_{\nu\to\infty} X_\nu(\omega) = X(\omega)\}\right) = 1$
- $X_\nu \xrightarrow{P} X \iff \forall \varepsilon>0,\ P(|X_\nu - X| > \varepsilon) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$.
- $X_\nu \xrightarrow{d} X \iff \lim\limits_{\nu\to\infty} F_{X_\nu}(x) \equiv \lim\limits_{\nu\to\infty} P(X_\nu \le x) = P(X\le x) \equiv F_X(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, που είναι σημείο συνεχείας της $F_X$.

Θέλουμε μια κατάλληλη γενίκευση των συγκλίσεων αυτών για τυχαία στοιχεία.

Προβλήματα (i): Οι μη μετρήσιμες $X_\nu$ σε "κλασικούς" χώρους πιθανότητας που ορίζονται τ.μ. είναι συνήθως παθολογικές και ακραίες, και δεν έχουν πρακτικό ενδιαφέρον. Όμως με τιμές σε χώρους συναρτήσεων δε συμβαίνει το ίδιο.

(ii) Η σύγκλιση κατά κατανομή μέσω συναρτήσεων κατανομής δεν είναι κατάλληλη για γενίκευση. Χρειάζονται πιο κατάλληλοι ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί.

Παράδειγμα (για το i).

Ορίζουμε $X : \Omega \to D[0,1]$, όπου $X = \mathbb{1}_{\{U\le x\}} - x$, $0\le x\le 1$,

και $U \sim Unif[0,1]$ (είναι μια ομοιόμορφη εμπειρική διαδικασία με μέγεθος δείγματος 1)

Θέτουμε $\forall A \subset [0,1]$: $J_A = \{f\in D[0,1] :$ f έχει άλμα ασυνέχειας σε κάποιο σημείο του $A\}$

$= \{f\in D[0,1] : f(x) \ne f(x-)$, για κάποιο $x\in A\}$

$= \bigcup\limits_{x\in A} J_x$, όπου $J_x$ χαρακτηρίζει τις $f\in D[0,1]$ με άλμα στο $x$.

Θέτουμε επίσης $A_x(f) = |f(x) - f(x-)|$, όπου $A_x : D[0,1] \to \mathbb{R}$.

Επειδή $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$ & $f_n(x-) \to f(x-) \Rightarrow A_x(f_n) \to A_x(f)$, έχουμε ότι η $A_x$ είναι συνεχής $\Rightarrow A_x^{-1}(0,+\infty) = J_x$ είναι ανοικτό, και άρα $J_A$ είναι ανοικτό. Όμως αν $X$ είναι $\mathcal{B}(D[0,1])$-μετρήσιμη, τότε

$$\{X\in J_A\} = \{U\in A\} \in \mathcal{A} \quad (\text{όπου } (\Omega,\mathcal{A},P), \text{ ο αρχικός χ.π.}).$$

Άρα το "μέτρο" πιθανότητας $\mu(A) := P(U\in A)$, ορίζεται σε όλα τα υποσύνολα του $[0,1]$. Επειδή $P(U\in A) = \lambda(A)$, $\forall$ Lebesgue-μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$, αυτό σημαίνει ότι το μέτρο Lebesgue, μπορεί να επεκταθεί στο $\mathcal{P}([0,1])$ που είναι αδύνατον.

Έτσι βλέπουμε ότι πολύ απλές συναρτήσεις, που μάλιστα είναι τυπικές πραγματοποιήσεις εμπειρικών διαδικασιών, δεν είναι Borel-μετρήσιμες.

Ανάλυση για το ii)

- Μας ενδιαφέρει να χαρακτηρίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας (κατανομή ενός τυχ. στοιχείου) από τις τιμές του σε μικρότερα υποσύνολα από τα $\mathcal{B}(D)$.

Ορσ: Μια κλάση $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(D)$ λέγεται διαχωρίζουσα (separating class) ή καθοριστική (determining), αν $P_1(C) = P_2(C), \forall C \in \mathcal{C} \Rightarrow P_1 = P_2$.

- Είναι γνωστό από τη θεωρία μέτρου ότι:

Πρότ: Αν $(D,d)$ μ.χ και $\mu$ πεπερασμένο μέτρο Borel στο D. Τότε $\forall A \in \mathcal{B}(D)$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) : G \supset A, G \text{ ανοικτό}\} = \sup\{\mu(F) : F \subset A, F \text{ κλειστό}\}.$$

$\Rightarrow$ ανοικτά και κλειστά είναι καθοριστικές κλάσεις των μέτρων πιθανότητας Borel

$\Rightarrow$ οι κατανομές των τυχαίων στοιχείων καθορίζονται μονοσήμαντα σε αυτές τις κλάσεις.

- Εναλλακτικά χαρακτηρίζουμε κατανομές από $E[f(X)]$, όταν $f \in$ κατάλληλη κλάση συναρτήσ.

Πρόταση: $P_1 f = P_2 f, \forall f \in C_b(D) \Rightarrow P_1 = P_2$. Μάλιστα ισχύει και για ομοιόμορφα συνεχείς.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$, $x^+ = \max\{0, x\}$ και $F^\varepsilon = \{x \in D : d(x,F) < \varepsilon\}$, $F$ κλειστό.

Εύκολα προκύπτει ότι αν $f(x) = \left(1 - \frac{d(x,F)}{\varepsilon}\right)^+$, τότε $1_F(x) \leq f(x) \leq 1_{F^\varepsilon}(x)$

[Πράγματι, $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in D$, και αρκεί ν.δ.ο. $1_F(x) \leq f(x)$, $x \in F$ & $f(x) \leq 1_{F^\varepsilon}(x)$, $x \notin F^\varepsilon$

Όμως $x \in F \Rightarrow d(x,F) = 0 \xRightarrow{f(x)=1} 1 \leq 1$ ✓ & $x \notin F^\varepsilon \Rightarrow d(x,F) \geq \varepsilon \Rightarrow f(x) = 0 \leq 0$ ✓ ]

Επίσης η $f(x)$ είναι συνεχής και μάλιστα ομοιόμορφα συνεχής: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{\varepsilon} d(x,y)$.

Τώρα $P_1(F) \leq P_1 f = P_2 f \leq P_2(F^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} P_2(F)$, αφού $F^\varepsilon \downarrow \overset{\text{κλειστό}}{F} = \{x \in D : d(x,F) = 0\}$.

Συμμετρικά παίρνουμε $P_2(F) \leq P_1(F) \Rightarrow P_1(F) = P_2(F)$, $\forall F$ κλειστό $\Rightarrow P_1 = P_2$.

Ορσ: Αν $P_n f \to Pf$, $\forall f \in C_b(D)$, τότε λέμε ότι $\{P_n\}_{n\geq 1}$ συγκλίνει ασθενώς στο $P$, και γράφουμε $P_n \Rightarrow P$.

Θεώρημα (Portmanteau): Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $P_n \Rightarrow P$

(ii) $P_n f \to Pf$, $\forall f \in \mathcal{U}C_b(D)$ (ομοιόμορφα συνεχείς & φραγμένες)

(iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$, $\forall F \in \mathcal{F}$ (κλειστά υποσύνολα του D)

(iv) $\liminf_n P_n(G) \geq P(G)$, $\forall G \in \mathcal{G}$ (ανοικτά υποσύνολα του D)

(v) $P_n(A) \to P(A)$, $\forall P$-συνεχές σύνολο $A$ (δηλ. $P(\partial A) = 0$, όπου $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$)

για τυχαία στοιχεία: γράφουμε $X_n \Rightarrow X$, και λέμε ότι συγκλίνει κατά κατανομή, αν $P_{X_n} \Rightarrow P_X$

Προφανώς, ισοδύναμες συνθήκες

(i) $X_n \Rightarrow X$

(ii) $Ef(X_n) \to Ef(X)$, $\forall f \in \mathcal{U}C_b(X)$

(iii) $\limsup_n P(X_n \in F) \leq P(X \in F)$, $\forall F \in \mathcal{F}$ (κλειστά).

(iv) $\liminf P(X_n \in G) \geq P(X \in G)$, $\forall G \in \mathcal{G}$ (ανοικτά).

(v) $P(X_n \in A) \to P(X \in A)$, $\forall X$-συνεχές σύνολο $A$ (δηλ. $P(X \in \partial A) = 0$).