Ασκήσεις - Φυλλάδιο 3

(1) Αν X τ.μ, με $X \sim P(\lambda)$ και σ.π. $f(x;\lambda) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda > 0$, να βρεθεί το μ.π.-F για το

(i) λ, (ii) $\sqrt{\lambda}$ (iii) $\log \lambda$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

(2) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή $G(a, \theta)$ με σ.π.π.

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0 \text{ άγνωστη παράμετρος}$$

και $a > 0$ γνωστό. Ν.Δ.Ο. η σ.σ. $\delta = \delta(\underline{X}) = \dfrac{\nu a - 1}{\nu \overline{X}}$, είναι α.ε.ε.δ. του θ, ενώ δεν είναι αποτελεσματική εκτιμήτρια.

Με τί ισούται η απόδοση (αποτελεσματικότητα) της δ?

(3) Αν $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή $Bin(N, p)$ με σ.π.

$$f(x;p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x}, \quad x = 0, 1, \dots, N, \quad \text{όπου } 0 < p < 1,$$

άγνωστη παράμετρος και N γνωστός θετικός ακέραιος, να βρεθεί α.ε.ε.δ. του p και αφού υπολογιστεί το κάτω φράγμα διασποράς κατά Cramer-Rao (κ.φ.-C-R) να εξεταστεί η αποτελεσματικότητά της.

(4) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $Be(p)$, με σ.π.

$$f(x;p) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, \quad 0 < p < 1.$$

Δείξτε ότι (α) ο δ.μ. $\overline{X}$ είναι αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του p, (β) η σ.σ. $T_\nu = \dfrac{\sum_{i=1}^{\nu} X_i + c}{\nu + 2}$ είναι ασυμπτωτικά α.ε. και συνεπής εκτιμήτρια του p για $c \in (0, 2)$.

(γ) για $c = 1$, και $p = \frac{1}{2}$, βρείτε το ελάχιστο ν:

$$P\left[\left| T_\nu - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon \right] \geq 1 - a$$

(υπόδειξη: χρησιμοποιήστε ασυμπτωτική προσέγγιση)

(δ) Γιατί το c περιορίστηκε στο (β) στο $(0, 2)$?

(5) Έστω ότι ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων α από ραδιενεργό πηγή σε χρόνο t ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή t/θ. Αν $T_1, \dots, T_\nu$ είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών εκπομπών να βρεθεί: (α) η ε.μ.π. του θ (β) η ε.μ.π. της πιθανότητας ο χρόνος μεταξύ δύο εκπομπών (διαδοχικών) να είναι μεγαλύτερος του $t_0>0$.

(6) Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από κατανομή Gamma (a, θ). Να βρεθούν:

(α) η εκτιμήτρια ροπών του θ με το a γνωστό.

(β) η εκτιμήτρια ροπών του a με το θ γνωστό.

(γ) οι εκτιμήτριες ροπών του θ και του a, όταν και τα δύο είναι άγνωστα.

Δίνεται η σ.π.π. της $G(a,\theta)$: $f(x; a, \theta) = \dfrac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}$, $x>0$.

(7) Έστω $X \sim Unif[0, 2a]$, και $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία α.ι.τ.μ. με $X_n \overset{d}{=} X, n\geq 1$. Θέτουμε $X_{(\nu)} = \max\{X_1, \dots, X_\nu\}$ και $\overline{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i$.

(α) Υπολογίστε $E(X)$ και $Var(X)$.

(β) Αιτιολογείστε τη χρήση των $\frac{X_{(\nu)}}{2}$ και $\overline{X}_\nu$ ως "λογικών" εκτιμητριών του a.

(γ) Δείξτε ότι $\overline{X}_\nu$ είναι συνεπής εκτιμήτρια της $E(X)$. Συνάγετε μία συνεπή εκτιμήτρια της διασποράς.

(δ) Υπολογίστε τη σ.π.π. της $X_{(\nu)}$, δώστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της. Συνάγετε μία α.ε. της $E(X)$.

(ε) Συγκρίνετε τις 2 α.ε. της $E(X)$, δηλ. την $\overline{X}_\nu$ και αυτήν του ερωτ. (δ).

(8) Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu$ τ.δ. από μίξη 2 κανονικών, $N(0,1)$ και $N(0,4)$, με σ.π.π. $f(x;p) = p\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + (1-p)\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}}$, $0 \leq p \leq 1$.

(α) Ποιά είναι η δυσκολία που συναντάμε για να υπολογίσουμε την ε.μ.π. του p;

(β) Υπολογίστε μία εκτιμήτρια ροπών $\hat{p}_\nu$, του p, βασισμένοι σε ροπή $2^{ης}$ τάξης. Τροποποιήστε την ώστε να παίρνει τιμές στο $[0,1]$

(γ) Δείξτε ότι $\hat{p}_\nu$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του p, και βρείτε την οριακή κατανομή του $\sqrt{\nu}(\hat{p}_\nu - p)$, όταν $\nu \to +\infty$.