Λύσεις

1 α)

- $S_f = \{1, 2, \dots\}$, άρα ανεξάρτητο του p (S_f: στήριγμα)
- $f(x;p) = p(1-p)^{x-1} = \frac{p}{1-p} e^{(\log(1-p))x} = b(p)\, e^{\eta(p)T(x)}$ $(h(x)=1)$

, όπου $b(p) = \frac{p}{1-p}$, $\eta(p) = \log(1-p)$ και $T(x) = x$.

Άρα η X ανήκει σε Ε.Ο.Κ.

β) Κανονική μορφή: $f(x;\eta) = \underset{\underset{1}{\|}}{h(x)}\, e^{\eta T(x) - A(\eta)} = e^{\eta x - A(\eta)}$,

και αρκεί να βρεθεί το $A(\eta)$. Όμως $A(\eta) = -\log b(p(\eta))$.

$\eta = \log(1-p) \Rightarrow 1-p = e^{\eta} \Rightarrow p = 1 - e^{\eta} = p(\eta)$.

Άρα $A(\eta) = -\log \frac{1-e^{\eta}}{e^{\eta}} = -\log(1-e^{\eta}) + \log e^{\eta} = \eta - \log(1-e^{\eta})$.

Τελικά $f(x;\eta) = e^{\eta x - \eta + \log(1-e^{\eta})}$, $x = 1, 2, \dots$, $\eta < 0$

γ)
- $E(X) = E[T(X)] = A'(\eta) = 1 + \frac{e^{\eta}}{1-e^{\eta}} = \frac{1-e^{\eta}+e^{\eta}}{1-e^{\eta}} = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = Var[T(X)] = A''(\eta) = (A'(\eta))' = \left(\frac{1}{1-e^{\eta}}\right)' = \frac{e^{\eta}}{(1-e^{\eta})^2} = \frac{1-p}{p^2}$
- $M_X(u) = e^{A(u+\eta) - A(\eta)} = e^{u+\cancel{\eta} - \log(1-e^{u+\eta}) - \cancel{\eta} + \log(1-e^{\eta})}$

$$= e^{u + \log\frac{1-e^{\eta}}{1-e^{u+\eta}}} = \frac{1-e^{\eta}}{1-e^{u+\eta}} \cdot e^{u} = \frac{p e^{u}}{1-(1-p)e^{u}}$$

2 α)

- $S_f = \{n, n+1, \dots\}$ ανεξάρτητο του p.
- $f(x;p) = \binom{x-1}{n-1} p^n (1-p)^{x-n} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n \binom{x-1}{n-1} e^{(\log(1-p))\cdot x}$

$= b(p)\, h(x)\, e^{\eta(p) T(x)}$, όπου

$b(p) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$, $h(x) = \binom{x-1}{n-1}$, $\eta(p) = \log(1-p)$, $T(x) = x$.

Άρα η X ανήκει σε Ε.Ο.Κ.

β) <u>κανονική μορφή</u> : $f(x;\eta) = h(x)\, e^{\eta T(x) - A(\eta)}$

όπου $h(x)$ και $T(x)$ όπως στο α) και μένει να βρούμε το $A(\eta)$.

Όμως $A(\eta) = -\log b(p(\eta))$ και $p(\eta) = 1 - e^{\eta}$ όπως στην Ασκ. 1.

Άρα $A(\eta) = -\log\left(\frac{1-e^{\eta}}{e^{\eta}}\right)^{n} = -n\log\left(\frac{1-e^{\eta}}{e^{\eta}}\right) = n A^{*}(\eta)$,

όπου $A^{*}(\eta)$ αυτό που υπολογίσαμε στην Άσκηση 1.

Συμπεραίνουμε ότι $f(x;\eta) = \binom{x-1}{n-1} e^{\eta x - n\eta + n\log(1-e^{\eta})}$,

$x = n, n+1, \ldots$, $\eta < 0$.

γ) Από τη σχέση $A(\eta) = n A^{*}(\eta)$, έχουμε

- $E(X) = E[T(X)] = A'(\eta) = \frac{n}{p}$
- $Var(X) = Var[T(X)] = A''(\eta) = \frac{n(1-p)}{p^2}$
- $M_X(u) = e^{A(u+\eta) - A(\eta)} = e^{n(A^{*}(u+\eta) - A^{*}(\eta))} = \left(\frac{p e^{u}}{1-(1-p)e^{u}}\right)^{n}$.

<u>Παρατήρηση</u> : Βλέπουμε λοιπόν ότι γενικεύονται τα αποτελέσματα της Άσκησης 1.

δ) Αν $S = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$, τότε

$M_S(u) \overset{\text{ανεξ}}{=} \prod_{i=1}^{\nu} M_{X_i}(u) = \prod_{i=1}^{\nu}\left(\frac{p e^{u}}{1-(1-p)e^{u}}\right)^{n_i} = \left(\frac{p e^{u}}{1-(1-p)e^{u}}\right)^{\sum_{i=1}^{\nu} n_i}$, και άρα

$S \sim NegBin\left(\sum_{i=1}^{\nu} n_i, p\right)$, αφού αυτή είναι η ροπογεννήτρια της NegBin με αυτές τις παραμέτρους.

Προφανώς, επειδή $Geo(p) \equiv NegBin(1,p)$, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim NegBin(\nu, p)$, όταν $X_i \sim Geo(p)$, από την παραπάνω ιδιότητα.

α) • $S_f = (0, +\infty)$ που είναι ανεξάρτητο του θ.

• $f(x;\theta) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} = \theta^a \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{-\theta x} =$

$b(\theta) h(x) e^{\eta(\theta) T(x)}$, όπου $b(\theta) = \theta^a$, $h(x) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)}$, $\eta(\theta) = -\theta$,

$T(x) = x$. Άρα η X ανήκει σε Ε.Ο.Κ.

Κανονική μορφή: $f(x;\eta) = h(x) e^{\eta T(x) - A(\eta)}$,

και αρκεί να βρεθεί το $A(\eta) = -\log b(\theta(\eta))$.

Όμως $\eta = -\theta \Rightarrow \theta = -\eta = \theta(\eta)$. Άρα

$A(\eta) = -\log(-\eta)^a = -a\log(-\eta)$.

Τελικά $f(x;\eta) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{\eta x + a\log(-\eta)}$, $x>0$, $\eta<0$.

β) • $E(X) = E(T(X)) = A'(\eta) = \frac{-a}{\eta} = \frac{a}{\theta}$.

• $Var(X) = Var(T(X)) = A''(\eta) = (A'(\eta))' = \left(-\frac{a}{\eta}\right)' = \frac{a}{\eta^2} = \frac{a}{\theta^2}$.

• $M_X(u) = e^{A(u+\eta) - A(\eta)} = e^{-a\log(-u-\eta) + a\log(-\eta)}$

$= e^{+a\log\frac{-\eta}{-u-\eta}} = \left(\frac{\eta}{\eta+u}\right)^a = \left(\frac{\theta}{\theta-u}\right)^a$

γ) Αν $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$, τότε

$M_T(u) \overset{\text{ανεξ+ισον.}}{=} M^\nu(u) = \left(\frac{\theta}{\theta-u}\right)^{\nu a}$, όπου M ροπογεννήτρια της $G(a,\theta)$

$\overset{\text{μονοσήμαντο}}{\Longrightarrow} T \sim G(\nu a, \theta)$.

Προφανώς, επειδή $\mathcal{E}xp(\theta) \equiv G(1,\theta)$, έχουμε

$T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim G(\nu, \theta)$.

- $S_f = (0, +\infty)$ που είναι ανεξάρτητο του $\phi = (a, \theta)$

- $f(x;\phi) = f(x;a,\theta) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} e^{(a-1)\log x - \theta x}$

$= b(\phi)\, e^{\eta_1(\phi) T_1(x) + \eta_2(\phi) T_2(x)}$, όπου

$b(\phi) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)}$, $\eta_1(\phi) = a-1$, $\eta_2(\phi) = -\theta$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = \log x$. $(h(x)=1)$.

Άρα η X ανήκει σε διπαραμετρική Ε.Ο.Κ.

<u>κανονική μορφή</u>: $f(x;\eta) = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{h(x)}}\, e^{\eta_1 T_1(x) + \eta_2 T_2(x) - A(\eta)} = e^{\eta_1 x + \eta_2 \log x - A(\eta)}$,

και αρκεί να βρεθεί η $A(\eta) = -\log b(\phi(\eta))$, όπου $b(\phi) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)}$.

Όμως $\left.\begin{array}{l}\eta_1 = a-1 \\ \eta_2 = -\theta\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \eta_1 - 1 \\ \theta = -\eta_2 \end{array}\right| \Rightarrow \phi(\eta) = (a(\eta), \theta(\eta)) = (\eta_1 - 1, -\eta_2)$

$\Rightarrow b(\phi(\eta)) = \frac{(-\eta_2)^{\eta_1 - 1}}{\Gamma(\eta_1 - 1)} \Rightarrow A(\eta) = -\log \frac{(-\eta_2)^{\eta_1-1}}{\Gamma(\eta_1 - 1)}$

$= -(\eta_1 - 1)\log(-\eta_2) + \log \Gamma(\eta_1 - 1)$. Τελικά

$f(x;\eta) = e^{\eta_1 x + \eta_2 \log x + (\eta_1 - 1)\log(-\eta_2) - \log\Gamma(\eta_1 - 1)}$, $x > 0,\ \eta_1 > -1,\ \eta_2 < 0$.

β) $Cov(X, \log X) = Cov(T_1(X), T_2(X)) = \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_1}\right)}{\partial \eta_2}$. (1)

Όμως $\frac{\partial A(\eta)}{\partial \eta_1} = -\log(-\eta_2) + c(\eta_1) \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$Cov(X, \log X) = \frac{\partial^2 A(\eta)}{\partial \eta_2} = \frac{1}{-\eta_2} = \frac{1}{\theta}$

α) • $S_f = \{x \in \mathbb{N} : \alpha(x) > 0\}$ είναι ανεξάρτητο του θ.

• $f(x;\theta) = \dfrac{\alpha(x)\,\theta^x}{g(\theta)} = \dfrac{1}{g(\theta)}\,\alpha(x)\,e^{(\log\theta)x} = b(\theta)\,h(x)\,e^{\eta(\theta)T(x)}$,

όπου $b(\theta) = \dfrac{1}{g(\theta)}$, $h(x) = \alpha(x)$, $\eta(\theta) = \log\theta$, $T(x) = x$.

Άρα η X ανήκει σε Ε.Ο.Κ.

<u>κανονική μορφή</u>: $f(x;\eta) = h(x)\,e^{\eta T(x) - A(\eta)} = \alpha(x)\,e^{\eta x - A(\eta)}$,

όπου $A(\eta) = -\log b(\theta(\eta))$. Όμως

$\eta = \log\theta \Rightarrow \theta = e^{\eta} = \theta(\eta)$. Τελικά

$A(\eta) = -\log\dfrac{1}{g(\theta(\eta))} = \log g(e^{\eta})$, και

$f(x;\eta) = \alpha(x)\,e^{\eta x - \log g(e^{\eta})}$, $x \in S_f$, $\eta \in \mathbb{R}$ $(\eta = \log\theta,\ \theta > 0)$

β) $E(X) = E[T(X)] = A'(\eta) = \left(\log g(e^{\eta})\right)' = \dfrac{g'(e^{\eta})\,e^{\eta}}{g(e^{\eta})} = \dfrac{\theta\,g'(\theta)}{g(\theta)}$.

$M_X(u) = M_T(u) = e^{A(u+\eta) - A(\eta)} = e^{\log g(e^{\eta+u}) - \log g(e^{\eta})}$

$= e^{\log\frac{g(e^{\eta+u})}{g(e^{\eta})}} = \dfrac{g(e^{\eta+u})}{g(e^{\eta})} = \dfrac{g(e^{\eta}\cdot e^{u})}{g(e^{\eta})} = \dfrac{g(\theta e^{u})}{g(\theta)}$.

γ) (i) $Be(p)$: $f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} = (1-p)\left(\dfrac{p}{1-p}\right)^x = \dfrac{\alpha(x)\,\theta^x}{g(\theta)}$,

όπου $\alpha(x) = 1$, $x = 0,1$, $\theta = \dfrac{p}{1-p}$, $g(\theta) = \theta + 1$

& $\alpha(x) = 0$, $\forall x > 1$, (θέτουμε $\dfrac{1}{1-p} = g(\theta)$, και εκφράζουμε το p ως $p(\theta)$)

(ανάλογα και τα υπόλοιπα ...)

6 Από γνωστή Πρόταση, αρκεί ν.δ.ο. $X_i \in$ μονοδιάστατη μονοπαραμετρική Ε.Ο.Κ., όταν $X_i \sim G(a,\theta)$, με θ γνωστό.

α)

- $S_f = (0,+\infty)$ ανεξάρτητο του a.
- $f(x_i;a) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x_i^{a-1} e^{-\theta x_i}$, $x_i>0$ $(a>0)$.

Άρα $f(x_i;a) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} e^{-\theta x_i} e^{(a-1)\log x_i} = b(a)h(x_i)e^{\eta(a)T(x_i)}$,

όπου $b(a) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)}$, $h(x_i) = e^{-\theta x_i}$, $\eta(a) = a-1$, $T(x_i) = \log x_i$.

Άρα $X_i \in$ Ε.Ο.Κ. (a), και συμπεραίνουμε ότι

$X = (X_1,\dots,X_\nu)^t \in$ ν-διάστατη Ε.Ο.Κ.(a) με

$$f(x;a) = f(x_1,\dots,x_\nu;a) = b^*(a)\,h^*(x)\,e^{\eta(a)T^*(x)}, \quad x_i>0,\ 1\le i\le \nu$$

όπου $b^*(a) = b^\nu(a) = \frac{\theta^{\nu a}}{\Gamma^\nu(a)}$, $h^*(x) = \prod_{i=1}^{\nu} h(x_i) = \prod_{i=1}^{\nu} e^{-\theta x_i} = e^{-\theta\sum_{i=1}^{\nu} x_i}$,

$\eta(a) = a-1$, $T^*(x) = \sum_{i=1}^{\nu} T(x_i) = \sum_{i=1}^{\nu} \log x_i$.

<u>κανονική μορφή</u>: $f(x;a) = h^*(x)\, e^{\eta T^*(x) - A^*(\eta)}$, $x_i>0,\ 1\le i\le\nu,\ \eta>-1$,

όλα γνωστά εκτός από $A^*(\eta) = -\log b^*(a(\eta)) =$

$$-\log\frac{\theta^{\nu(\eta+1)}}{\Gamma^\nu(\eta+1)} = \nu\left[\log\Gamma(\eta+1) - \log\theta^{(\eta+1)}\right]$$

$$= \nu\left(\log\Gamma(\eta+1) - (\eta+1)\log\theta\right).$$

β) • $E\left(\sum_{i=1}^{\nu}\log X_i\right) = E\left(T^*(X)\right) = \left(A^*(\eta)\right)' = \nu\left(\frac{\Gamma'(\eta+1)}{\Gamma(\eta+1)} - \log\theta\right)$

$$= \nu\left(\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \log\theta\right) = \nu\left(\psi(a) - \log\theta\right)$$

(ψ: digamma function, $\psi(a) := \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = (\log\Gamma(a))'$).

• $Var\left(\sum_{i=1}^{\nu}\log X_i\right) = Var\left(T^*(X)\right) = \left(A^*(\eta)\right)'' = \nu\left[(\log\Gamma(\eta+1))' - \log\theta\right]'$

$$= \nu\left(\log\Gamma(\eta+1)\right)'' = \nu\left(\log\Gamma(a)\right)'' = \nu\,\psi_1(a),$$

όπου $\psi_1(a) := (\log\Gamma(a))''$ και λέγεται trigamma function.