Ασκ. 27

Βρήκαμε στο Παραδ. 2 – Μαθ. 10 την ασυμπτωτική κατανομή της $\tilde{\theta}_\nu = \frac{\nu+1}{\nu} X_{(\nu)}$ σε τ.δ. από $\mathcal{U}[0,\theta]$.

(i) Πώς συνδέεται η ασυμπτωτική κατανομή της $\tilde{\theta}_\nu$ με την $\mathcal{E}xp(\frac{1}{\theta})$;

(ii) Συμπεράνετε την ασυμπτωτική κατανομή της $X_{(\nu)}$.

Λύση

$$\nu(\tilde{\theta}_\nu - \theta) \xrightarrow{d} X, \text{ με } F_X(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{\theta}-1}, & -\infty < x \le \theta \\ 1, & x > \theta. \end{cases}$$

Επειδή $x \le \theta \iff \theta - x \ge 0$, υπολογίζουμε τη σ.κ. της $\theta - X$. Για $x \ge 0$

$$P(\theta - X \le x) = P(X \ge \theta - x) \overset{\text{συνεχής τ.μ.}}{=} 1 - P(X \le \theta - x) = 1 - F_X(\theta - x)$$
$$= 1 - e^{\frac{\theta - x}{\theta} - 1} = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x}.$$

Άρα $$F_{\theta - X}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{\theta}x}, & x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \theta - X \sim \mathcal{E}xp(\tfrac{1}{\theta}).$$

Ισοδύναμα $X \overset{d}{=} \theta - Y$, όπου $Y \sim \mathcal{E}xp(\frac{1}{\theta})$.

(ii) $$X_{(\nu)} = \frac{\nu}{\nu+1}\tilde{\theta}_\nu \Rightarrow X_{(\nu)} = \tilde{\theta}_\nu - \frac{1}{\nu+1}\tilde{\theta}_\nu.$$

$$\nu(X_{(\nu)} - \theta) = \nu\left(\tilde{\theta}_\nu - \frac{\tilde{\theta}_\nu}{\nu+1} - \theta\right) = \nu(\tilde{\theta}_\nu - \theta) - \frac{\nu}{\nu+1}\tilde{\theta}_\nu \quad (1)$$

Όμως $\nu(\tilde{\theta}_\nu - \theta) \xrightarrow{d} X$ και $-\underbrace{\frac{\nu}{\nu+1}}_{\to 1}\tilde{\theta}_\nu \xrightarrow{P} -\theta$.

Άρα από το Slutsky, και την (1), έχουμε

$$\nu(X_{(\nu)} - \theta) \xrightarrow{d} X - \theta.$$

Επειδή $\theta - X \sim \mathcal{E}xp(\frac{1}{\theta}) \Rightarrow \nu(X_{(\nu)} - \theta) \xrightarrow{d} -\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right)$

Άσκ. 28 (1)

Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $\mathcal{U}(\theta, b)$ με $\theta < b$ και b γνωστό.

(i) Ν.δ.ο. η $\hat{\theta}_\nu = X_{(1)}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του θ.

[α' τρόπος : απ' ευθείας (με ιδιότητες του minimum)

β' τρόπος : με μετασχηματισμό δεδομένων ; υπόδειξη : $Y_i = b - X_i$]

(ii) Να βρεθεί η ασυμπτωτική κατανομή της $\hat{\theta}_\nu$.

(με 2 τρόπους όπως το (i))

Λύση

(i) $$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta \\ \dfrac{x-\theta}{b-\theta}, & \theta \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases} \quad (1)$$

α' τρόπος

Έστω $\varepsilon > 0$.

$$P\left(\left|X_{(1)} - \theta\right| > \varepsilon\right) \overset{X_{(1)} > \theta}{=} P\left(X_{(1)} > \theta + \varepsilon\right) = P\left(X_1 > \theta+\varepsilon, \dots, X_\nu > \theta+\varepsilon\right)$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} \prod_{i=1}^{\nu} P(X_i > \theta+\varepsilon) \overset{\text{ισον.}}{=} \left(F^{c}_{X_1}(\theta+\varepsilon)\right)^\nu, \quad \left(F^{c}_{X_1}(x) = 1 - F_{X_1}(x)\right)$$

όπου λόγω (1), $$F^{c}_{X_1}(x) = \begin{cases} 1, & x < \theta \\ 1 - \dfrac{x-\theta}{b-\theta}, & \theta \le x < b \\ 0, & x \ge b. \end{cases} = \begin{cases} 1, & x < \theta \\ \dfrac{b-x}{b-\theta}, & \theta \le x < b \\ 0, & x \ge b \end{cases}$$

Τελικά, για $\varepsilon < b - \theta$

$$P\left(\left|X_{(1)} - \theta\right| > \varepsilon\right) = \left(\frac{b-\theta-\varepsilon}{b-\theta}\right)^\nu = \left(1 - \frac{\varepsilon}{b-\theta}\right)^\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι $X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta$ $(\forall \theta)$, και άρα $\hat{\theta}_\nu = X_{(1)}$ συνεπής.

β' τρόπος

$$X_i \sim \mathcal{U}(\theta, b) \Rightarrow Y_i = b - X_i \sim \mathcal{U}(0, b-\theta) \quad \forall\, 1 \le i \le \nu. \quad \left(\text{επαληθεύεται άμεσα}\right)$$

Επιπλέον $X_1, \dots, X_\nu$ ανεξ. τ.μ. $\Rightarrow Y_i = b - X_i$ ανεξ. τ.μ.

Άρα $Y_1, \dots, Y_\nu$ τ.δ. από $\mathcal{U}(0, b-\theta) = \mathcal{U}(0, \lambda)$, $\lambda = b - \theta > 0$.

Έχουμε δείξει $Y_{(\nu)} \xrightarrow{P} \lambda$, $\forall \lambda > 0 \Rightarrow (b - X)_{(\nu)} \xrightarrow{P} b - \theta$

$$\Rightarrow b - X_{(1)} \xrightarrow{P} b - \theta \Rightarrow X_{(1)} \xrightarrow{P} \theta, \ \forall \theta < b$$

(ii) **α' τρόπος**

Θ.δ.ο. $\nu(X_{(1)}-\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\beta-\theta}\right), \theta<\beta.$

Έστω $x>0$, F_ν η σ.κ. της $\nu(X_{(1)}-\theta)$, και F η σ.κ. της $\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\beta-\theta}\right)$

$$F_\nu(x) = P\left(\nu(X_{(1)}-\theta) \le x\right) = P\left(X_{(1)}-\theta \le \frac{x}{\nu}\right)$$

$$= P\left(X_{(1)} \le \theta+\frac{x}{\nu}\right) = 1-P\left(X_{(1)} > \theta+\frac{x}{\nu}\right)$$

$$= 1 - P\left(X_1 > \theta+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu} \overset{\text{για } (*)}{=\!=} 1-\left(\frac{\beta-\theta-\frac{x}{\nu}}{\beta-\theta}\right)^{\nu}$$

$$= 1-\left(1-\frac{\frac{x}{\beta-\theta}}{\nu}\right)^{\nu} \xrightarrow[\nu\to+\infty]{} 1-e^{-\frac{1}{\beta-\theta}\cdot x} = F(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Επειδή λοιπόν } \lim\limits_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = F(x), \ \forall x>0 \\ \text{και προφανώς } \lim\limits_{\nu\to\infty} F_\nu(x) = 0 = F(x), \ \forall x \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

η $\nu(X_{(1)}-\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\beta-\theta}\right), \forall \theta<\beta.$

β' τρόπος

Όπως πριν, $Y_1,\dots,Y_\nu$ με $Y_i = \beta - X_i$, $1\le i\le\nu$ είναι τ.δ. από $\mathcal{U}(0,\beta-\theta) = \mathcal{U}(0,\lambda)$, με $\lambda=\beta-\theta>0$.

Έχουμε δείξει ότι $\nu(Y_{(\nu)}-\lambda) \xrightarrow{d} -\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

$$\Rightarrow \nu\left(\beta-X_{(1)}-(\beta-\theta)\right) \xrightarrow{d} -\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\beta-\theta}\right).$$

$$\Rightarrow -\nu(X_{(1)}-\theta) \xrightarrow{d} -\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\beta-\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\nu(X_{(1)}-\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\beta-\theta}\right), \ \forall\theta<\beta.$$

Άσκ. 29

Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $G(\alpha, \theta)$, $\alpha > 0, \theta > 0$, όπου α γνωστό. Να βρεθεί η ε.μ.π. του θ, και να συγκριθεί με την ε.ρ.

Λύση

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \frac{\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\theta x_i} = \frac{\theta^{\nu\alpha}}{\Gamma^{\nu}(\alpha)} \left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{\nu} x_i}$$

$$\Rightarrow \ell(\theta) = \log L(\theta) = \nu\alpha \log\theta - \nu \log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{\nu} \log x_i - \theta \sum_{i=1}^{\nu} x_i \Rightarrow$$

$$\ell'(\theta) = \frac{\nu\alpha}{\theta} - \sum_{i=1}^{\nu} x_i \quad \text{και} \quad \ell''(\theta) = -\frac{\nu\alpha}{\theta^2} < 0, \ \forall \theta > 0.$$

(γνήσια κοίλη συνάρτηση).

Έχουμε $\ell'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{\nu\alpha}{\theta} = \sum_{i=1}^{\nu} x_i \Leftrightarrow \theta^* = \frac{\nu\alpha}{\sum_{i=1}^{\nu} x_i} = \frac{\alpha}{\overline{X}_\nu}$

Επειδή $\ell(\theta)$ γνήσια κοίλη $\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\alpha}{\overline{X}_\nu}$ είναι η ε.μ.π. του θ.

Λύνοντας $E(X) = \overline{X}_\nu \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\theta} = \overline{X}_\nu \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha}{\overline{X}_\nu}$

συμπεραίνουμε ότι $\overline{\theta}_\nu = \frac{\alpha}{\overline{X}_\nu}$ είναι η ε.ρ. του θ που συμπίπτει με την ε.μ.π.

Άσκ 30

Λύθηκε Μαθ. 11 + 12.

Άσκ. 31

Μαθ 8° – Παράδ. 4 στις σημειώσεις 2016 – 17.

Άσκ. 32 Βρείτε την ε.μ.π. του σ^2 στο τ.δ. $N(\mu, \sigma^2)$, μ γνωστό, μέσω αναπαραμέτρησης $\theta = \frac{1}{\sigma^2}$.

Λύση

Η σ.π.π. της $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ είναι

$$f(x;\sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}.$$

Με $\theta = \frac{1}{\sigma^2} > 0$, έχουμε

$$L(\theta) = (2\pi)^{-\frac{\nu}{2}} \theta^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2} \Longrightarrow$$

$$\ell(\theta) = -\frac{\nu}{2}\log(2\pi) + \frac{\nu}{2}\log\theta - \frac{1}{2}\theta \cdot \sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2 \Longrightarrow$$

$$\ell'(\theta) = \frac{\nu}{2\theta} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2$$

Άρα $\ell'(\theta)=0 \iff \theta^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2}$. (μοναδικό στάσιμο σημείο).

Επιπλέον $\ell''(\theta) = -\frac{\nu}{2\theta^2} < 0$, $\forall \theta > 0 \Rightarrow \ell(\theta)$ γνήσια κοίλη συνάρτηση,

και έτσι $\hat{\theta} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2}{\nu}\right)^{-1}$

Επειδή $\sigma^2 = \frac{1}{\theta}$ και $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{\hat{\theta}}$ (από αναλλοίωτο) $\Longrightarrow$ $\boxed{\hat{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\mu)^2}{\nu}}$.

Άσκ. 33

Να βρείτε την ε.μ.π. της $E(X)$, όταν $X \sim \mathcal{E}xp(\theta)$, $\theta > 0$.
παραμ. ρυθμού

Λύση

Από την Άσκ. 29, έχουμε $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}_\nu}$ $(\alpha = 1)$.

Επειδή $E(X) = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \widehat{E(X)} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \overline{X}_\nu$

Ασκ. 34

Έστω $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. από $\mathcal{U}(-\theta, 0)$, $\theta > 0$.
Να βρεθεί η ε.μ.π. του θ (i) άμεσα και (ii) με $Y_i = -X_i$.

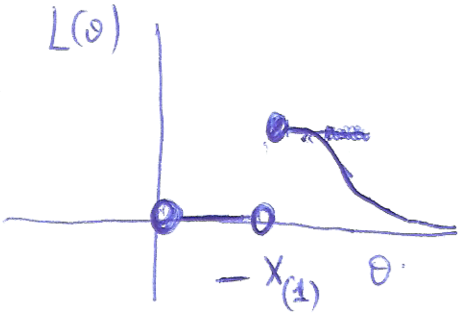
Λύση

(i) $f_X(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[-\theta, 0]}(x)$, όπου $X \sim \mathcal{U}(-\theta, 0)$.

Έχουμε $L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i; \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^\nu \prod_{i=1}^{\nu} \mathbb{1}_{[-\theta, 0]}(x_i)$.

Έχουμε $-\theta \le x_i \le 0$, $\forall 1 \le i \le \nu \iff \begin{matrix} -\theta \le x_i \\ x_i \le 0 \end{matrix}$, $\forall 1 \le i \le \nu \overset{x_i \le 0 \checkmark}{\iff}$

$-\theta \le x_{(1)} \iff -x_{(1)} \le \theta$. Άρα $L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^\nu \mathbb{1}_{[-x_{(1)}, +\infty)}$, $\theta > 0$.



Επειδή $\left(\frac{1}{\theta}\right)^\nu$ φθίνουσα συμπεραίνουμε ότι $\hat{\theta}_\nu = -X_{(1)}$.

(ii) $X_1, \dots, X_\nu$ τ.δ. $\mathcal{U}(-\theta, 0) \implies$

$Y_1 = -X_1, \dots, Y_\nu = -X_\nu$ είναι τ.δ. από $\mathcal{U}(0, \theta)$ (επαληθεύεται άμεσα)

Γνωρίζουμε ότι $\hat{\theta}_\nu = Y_{(\nu)}$ είναι η ε.μ.π. του θ.

Όμως $Y_{(\nu)} = \max\{Y_1, \dots, Y_\nu\} = \max\{-X_1, \dots, -X_\nu\}$

$= -\min\{X_1, \dots, X_\nu\} = -X_{(1)}$.

$\implies \hat{\theta}_\nu = -X_{(1)}$.

Άσκ. 35 Έστω $X_1,\dots,X_\nu$ τ.δ. από $\mathcal{U}(-\theta,\theta)$, $\theta>0$. Να βρεθεί (6)

(i) η ε.μ.π. του θ

(ii) Ν.δ.ο. είναι συνεπής εκτιμήτρια του θ.

(iii) Να βρεθεί η ασυμπτωτική κατανομή της ε.μ.π.

Λύση

(i) Αν $X\sim\mathcal{U}(-\theta,\theta)$, τότε $f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}\mathbb{1}_{[-\theta,\theta]}(x)$.

Άρα $L(\theta)=\prod_{i=1}^{\nu} f(x_i;\theta)=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^{\nu}\prod_{i=1}^{\nu}\mathbb{1}_{[-\theta,\theta]}(x_i)$.

Όμως $-\theta\le x_i\le\theta$ $\forall 1\le i\le\nu$ $\iff$ $\left.\begin{matrix}-\theta\le x_{(1)}\\ x_{(\nu)}\le\theta\end{matrix}\right|$ $\iff$ $\left.\begin{matrix}-x_{(1)}\le\theta\\ x_{(\nu)}\le\theta\end{matrix}\right|$ $\iff$

$\theta\ge\max\{-x_{(1)},x_{(\nu)}\}=|x|_{(\nu)}$, όπου

$|x|_{(\nu)}=\max\{|x_1|,\dots,|x_\nu|\}$.

Άρα $L(\theta)=\left(\frac{1}{2\theta}\right)^{\nu}\mathbb{1}_{[|x|_{(\nu)},+\infty)}(\theta)$.

Επειδή $\left(\frac{1}{2\theta}\right)^{\nu}$ είναι φθίνουσα $\Longrightarrow$ $\boxed{\hat{\theta}_\nu=|X|_{(\nu)}}$

(ii) Αν θέσουμε $Y_i=|X_i|$, $1\le i\le\nu$. Τότε $Y_1,\dots,Y_\nu$ είναι τ.δ. από $\mathcal{U}(0,\theta)$ (επαληθεύεται εύκολα ότι $|X_i|\sim\mathcal{U}(0,\theta)$).

$\xRightarrow{\text{Άσκ.}}$ $Y_{(\nu)}=|X|_{(\nu)}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του θ.

(iii). Επιπλέον $\nu\left(Y_{(\nu)}-\theta\right)\xrightarrow{d.}-\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right)\Longrightarrow$

$\nu\left(\hat{\theta}_\nu-\theta\right)\xrightarrow{d.}-\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right)$.