Στατιστική Ι - Άσκηση 26

Άσκηση. *Έστω* (X_n) *μία ακολουθία* k*-διάστατων τ.μ., δηλ.,* $X_n = (X_{n,1}, \dots, X_{n,k})$, $n \geq 1$ *και* $\|\cdot\|$ *η Ευκλείδια νόρμα στον* $\mathbb{R}^k$.

(i) *Επεκτείνουμε την* $\xrightarrow{a.s.}$ *σύγκλιση, και θα λέμε ότι η ακολουθία των (διανυσματικών) τ.μ.* (X_n) *συγκλίνει με* ***πιθανότητα 1*** *ή* ***σχεδόν βεβαίως*** *στην (διανυσματική) τ.μ.* $X = (X_1, \dots, X_k)$, *αν* $\|X_n - X\| \xrightarrow[n\to+\infty]{a.s.} 0$. *Θα το συμβολίζουμε επίσης* $X_n \xrightarrow{a.s.} X$. *Να δείξετε ότι:*

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \;\Leftrightarrow\; X_{n,i} \xrightarrow{a.s.} X_i, \quad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq k.$$

(ii) *Επεκτείνουμε την* $\xrightarrow{p}$ *σύγκλιση, και θα λέμε ότι η ακολουθία των (διανυσματικών) τ.μ.* (X_n) *συγκλίνει* ***κατά πιθανότητα*** *ή* ***στοχαστικά*** *στην (διανυσματική) τ.μ.* $X = (X_1, \dots, X_k)$, *αν* $\|X_n - X\| \xrightarrow[n\to+\infty]{p} 0$. *Θα το συμβολίζουμε επίσης* $X_n \xrightarrow{p} X$. *Να δείξετε ότι:*

$$X_n \xrightarrow{p} X \;\Leftrightarrow\; X_{n,i} \xrightarrow{p} X_i, \quad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq k.$$

(iii) *Επεκτείνουμε την* $\xrightarrow{d}$ *σύγκλιση, και θα λέμε ότι η ακολουθία των (διανυσματικών) τ.μ.* (X_n) *συγκλίνει* ***κατά κατανομή*** *στην (διανυσματική) τ.μ.* $X = (X_1, \dots, X_k)$,
αν $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ *σε κάθε σημείο συνεχείας* $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ *της* F, *όπου* F_n *και* F *είναι οι απο κοινού συναρτήσεις κατανομής των* X_n *και* X *αντίστοιχα. Θα το συμβολίζουμε επίσης* $X_n \xrightarrow{d} X$. *Να δείξετε ότι:*

$$X_n \xrightarrow{d} X \;\Rightarrow\; X_{n,i} \xrightarrow{d} X_i, \quad \text{για κάθε } 1 \leq i \leq k,$$

ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Βρείτε αντιπαράδειγμα για τη μη ισχύ του αντιστρόφου.

Λύση. *(i) Έστω*

$$\begin{aligned} C &= \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| = 0\} \\ C_i &= \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_{n,i}(\omega) = X_i(\omega)\}, \quad i = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Οι ορισμοί σύγκλισης με πιθανότητα 1 (πολυδιάστατος και μονοδιάστατος), μας υποδεικνύουν ότι

$$\begin{aligned} X_n \xrightarrow{a.s.} X \quad &\Leftrightarrow \quad P(C) = 1 \\ X_{n,i} \xrightarrow{a.s.} X_i \quad &\Leftrightarrow \quad P(C_i) = 1, \quad i = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε από την Ανάλυση ότι $C = \bigcap_{i=1}^k C_i$. *Εύκολα επαληθεύεται (δείξτε το) ότι*

$$P(C) = 1 \;\Leftrightarrow\; P(C_i) = 1, \quad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, k.$$

Από τα παραπάνω φτάνουμε στο ζητούμενο.

(ii) Κατάρχήν γνωρίζουμε ότι

$$|X_{n,i} - X_i| \le \|X_n(\omega) - X(\omega)\| \le \sum_{i=1}^k |X_{n,i} - X_i|, \quad \text{για κάθε } 1 \le i \le k,\ n \ge 1. \tag{1}$$

Ισχυρισμός. *Άν* $(Y_{n,1}), \ldots, (Y_{n,s})$ *είναι* s *ακολουθίες θετικών τ.μ. για τις οποίες ισχύει* $Y_{n,i} \xrightarrow{p} Y_i$, *για κάθε* $1 \le i \le s$, *και* (Z_n) *μία άλλη ακολουθία, τότε*

$$0 \le Z_n \le \sum_{i=1}^s Y_{n,i},\ \forall n \ge 1 \;\Rightarrow Z_n \xrightarrow{p} 0 \text{ και } \sum_{i=1}^s Y_{n,i} \xrightarrow{p} 0.$$

Πράγματι, αν $\epsilon > 0$, *τότε*

$$\begin{aligned} \{Z_n > \epsilon\} \quad &\subset \quad \left\{\sum_{i=1}^s Y_{n,i} > \epsilon\right\} \subset \bigcup_{i=1}^s \left\{Y_{n,i} > \frac{\epsilon}{s}\right\} \Rightarrow \\ P(Z_n > \epsilon) \quad &\le \quad P\left(\sum_{i=1}^s Y_{n,i} > \epsilon\right) \le \sum_{i=1}^s P\left(Y_{n,i} > \frac{\epsilon}{s}\right). \end{aligned}$$

Από την υπόθεση και τις παραπάνω ανισότητες, παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$, *έπεται ο Ισχυρισμός.*

Επιλέγοντας $s = 1$, $Z_n = |X_{n,i} - X_i|$ *και* $Y_n = \|X_n(\omega) - X(\omega)\|$, *συμπεραίνουμε ότι το* $(\Rightarrow)$ *ισχύει, λόγω της πρώτης ανισότητας της (1) και του Ισχυρισμού. Επιλέγοντας* $s = k$, $Z_n = \|X_n(\omega) - X(\omega)\|$ *και* $Y_{n,i} = |X_{n,i} - X_i|$, *συμπεραίνουμε ότι το* $(\Leftarrow)$ *ισχύει, λόγω της δεύτερης ανισότητας της (1) και του Ισχυρισμού.*

Παρατήρηση: *Ο ισχυρισμός που εύκολα αποδείξαμε έχει δύο άμεσες συνέπειες (δείξτε το).*

Πόρισμα 1. *Έστω* (X_n), (L_n) *και* (R_n) *ακολουθίες τ.μ. για τις οποίες ισχύει* $L_n \leq X_n \leq R_n$ *για κάθε* $n \geq 1$. *Τότε*

$$L_n \xrightarrow{p} X \text{ και } R_n \xrightarrow{p} X \;\Rightarrow\; X_n \xrightarrow{p} X.$$

Πόρισμα 2. *Έστω* $(X_{n,i})_{1\leq i\leq k}$, k *ακολουθίες τ.μ. και* $(X_i)_{1\leq i\leq k}$, k *τ.μ.. Τότε*

$$X_{n,i} \xrightarrow{p} X_i \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq k \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{k} X_{n,i} \xrightarrow{p} \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

(iii) *Από το Θεώρημα Συνεχούς Απεικόνισης για διανυσματικές ακολουθίες τ.μ., έχουμε ότι εφ'όσον* $X_n \xrightarrow{d} X$, *έπεται ότι* $X_{n,i} = g_i(X_n) \xrightarrow{d} g_i(X) = X_i$, *όπου* g_i *είναι η συνάρτηση προβολής στην* i *συντεταγμένη που είναι συνεχής συνάρτηση.*

Το αντίστροφο βλέπουμε εύκολα ότι δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω $X_n = Y_n = Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, *για κάθε* $n \geq 1$, *και* $X = Y = -Z$. *Τότε* $X_n \xrightarrow{d} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{d} Y$, *αφού* $Z \overset{d}{=} -Z$.

Όμως $(X_n, Y_n) = (Z, Z) \xrightarrow{d} (Z, Z)$. *Εφόσον* $(Z,Z) \overset{d}{\neq} (-Z,-Z) = (X,Y)$, *συμπεραίνουμε ότι* $(X_n, Y_n) \overset{d}{\nrightarrow} (X, Y)$.