Ασκ. 18 | (i) Ν.δ.ο. αν $X \sim G(a,\theta)$, $a>0, \theta>0$, τότε

$$M_X(t) = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^a \quad , \quad t<\theta.$$

(ii) Ν.δ.ο. αν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2>0$, τότε

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2} \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Λύση

(i) $X \sim G(a,\theta) \Rightarrow f_X(x) = \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}$, $x>0$.

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x}\, dx =$$

$$\frac{\theta^a}{(\theta-t)^a} \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{(\theta-t)^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(\theta-t)x}}_{\substack{\sigma.\pi.\pi.\ G(a,\theta-t) \\ (\text{για } t<\theta)}} dx = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^a \cdot 1 = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^a$$

$(t<\theta)$.

(ii) Αρκεί ν.δ.ο αν $Z \sim N(0,1)$, τότε $M_Z(t) = e^{t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

, αφού αν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, τότε $X = \mu + \sigma Z$,

και άρα $M_X(t) = E\left(e^{t(\mu+\sigma Z)}\right) = e^{\mu t} E\left(e^{(\sigma t)Z}\right) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) \overset{(*)}{=}$

$$= e^{\mu t} \cdot e^{(\sigma t)^2/2} = e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι,

$$M_Z(t) = E\left(e^{tZ}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}_{\phi(z)} dz$$

$$= e^{t^2/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(z^2 - 2tz + t^2\right)} dz$$

$$= e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}}_{\sigma.\pi.\pi.\ N(t,1)} dz = e^{t^2/2} \cdot 1 = e^{t^2/2}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ασκ. 19 (i) Αν $\{X_i\}_{1\le i\le \nu}$, ανεξ. τ.μ. με $X_i \sim G(a_i,\theta)$, τότε η $X=\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim G\left(\sum_{i=1}^{\nu} a_i, \theta\right)$

(ii) Αν $X\sim G(a,\theta)$, και $\lambda>0$, τότε $\lambda X \sim G\left(a, \frac{\theta}{\lambda}\right)$.

Λύση

(i)
$$M_X(t) \overset{\text{ανεξ.}\{X_i\}}{=} \prod_{i=1}^{\nu} M_{X_i}(t) \underset{X_i\sim G(a_i,\theta)}{\overset{\text{Ασκ. 18}}{=}} \prod_{i=1}^{\nu} \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^{a_i} = \left(\frac{\theta}{\theta-t}\right)^{\sum_{i=1}^{\nu} a_i}$$
, όπου $\theta>0$ και $\sum_{i=1}^{\nu} a_i>0$.

$\longrightarrow$ ροπογεννήτρια της $G\left(\sum_{i=1}^{\nu} a_i, \theta\right)$.

Από χαρακτηρισμό της κατανομής μέσω ροπογεννήτριας, συμπεραίνουμε ότι $X\sim G\left(\sum_{i=1}^{\nu} a_i, \theta\right)$.

(ii)
$$M_{\lambda X}(t) = E\left(e^{t(\lambda X)}\right) = E\left(e^{(\lambda t)X}\right) = M_X(\lambda t) \underset{\text{Ασκ. 18}}{\overset{X\sim G(a,\theta)}{=}}$$
$$= \left(\frac{\theta}{\theta-\lambda t}\right)^{a} = \left(\frac{\theta/\lambda}{\theta/\lambda - t}\right)^{a} \underset{\text{ροπογ. } G(a,\,\theta/\lambda)}{\overset{\text{χαρακτ. ροπογ.}}{\Longrightarrow}}$$
$$\lambda X\sim G(a,\theta/\lambda).$$

Ασκ. 20

(i) Να λυθεί η Ασκ 17 με τη βοήθεια της χ^2_{ν} (Ελαχιστοπ. του MSE για $c\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\bar{X})^2$).

(ii) Να συγκριθούν τα $|b(u)|$ και MSE (u) για $c=\frac{1}{\nu-1}$, $\frac{1}{\nu}$ και $\frac{1}{\nu+1}$.

Λύση

(i) Έστω $u = c\cdot\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\bar{X})^2 \Rightarrow u = c(\nu-1)S^2$

$\text{MSE}(u) = \text{Var}(u) + b^2(u) \quad (1).$

$$\text{Var}(u) = \text{Var}\left(c\sigma^2\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2}\right) = c^2\sigma^4\,\text{Var}\Big(\underbrace{\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2}}_{\sim\chi^2_{\nu-1}}\Big) = \boxed{2c^2(\nu-1)\sigma^4}$$

$\Rightarrow \text{Var}(\chi^2_{\nu-1}) = 2(\nu-1)$

$$b(u) = b\left(c\sigma^2\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2}\right) = c\sigma^2 E\Big(\underbrace{\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2}}_{\chi^2_{\nu-1}}\Big) - \sigma^2 = \boxed{(c(\nu-1)-1)\sigma^2} \Rightarrow$$

$\text{MSE}(u) = f(c)\sigma^4$, όπου $f(c) = (\nu-1)(\nu+1)c^2 - 2(\nu-1)c + 1 \overset{\text{όπως Ασκ 17}}{\Longrightarrow} c^* = \frac{1}{\nu-1}$

(ii)

Εκτιμήτρια u	S^2 $(c=\frac{1}{\nu-1})$		M_2 $(c=\frac{1}{\nu})$		u^* $(c=\frac{1}{\nu+1})$
$\lvert b(u)\rvert$	0	$<$	$\frac{\sigma^2}{\nu}$	$<$	$\frac{2\sigma^2}{\nu+1}$
MSE	$\frac{2}{\nu-1}\sigma^4$	$>$	$\left(\frac{2}{\nu}-\frac{1}{\nu^2}\right)\sigma^4$	$>$	$\frac{2}{\nu+1}\sigma^4$

Σχόλιο

Τα κριτήρια αμεροληψίας & MSE βγάζουν εντελώς αντίθετα αποτελέσματα!