Ασκ. 7 (Μαθ. 3)

Δίνονται ο υπολογισμός της μέσης τιμής για την $HypGeo(n, N, r)$ και για την $Beta(a, \beta)$ που αρκετοί δεν τις έχουν δει στις Πιθανότητες I.

(i) Έστω $X \sim HypGeo(n, N, r)$.

Είδαμε σε προηγ. Άσκηση έναν απλό τρόπο υπολογισμού της.
Εδώ θα υπολογιστεί με τον ορισμό.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \text{αφού } P(X=x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

$x = 0, 1, \ldots, n$ (εμπεριέχονται εδώ μηδενικές πιθανότητες για ευκολία στον υπολογισμό, χωρίς η άθροιση να εκτείνεται κατ' ανάγκη στο στήριγμα της X).

Υπενθύμιση: Ισχύει ότι $\binom{r}{x} = \frac{r}{x}\binom{r-1}{x-1}$, για $x = 1, 2, \ldots$ (1)

και $$\binom{r+s}{n} = \sum_{x=0}^{n} \binom{r}{x}\binom{s}{n-x} \quad \text{(δείξτε το συνδυαστικά!)} \quad (2)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} \cancel{x}\frac{r}{\cancel{x}}\binom{r-1}{x-1}\binom{N-r}{n-x} \overset{(1)}{=}$$

$$\frac{r \cdot n}{N} \cdot \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \sum_{x=1}^{n} \binom{r-1}{x-1}\binom{N-r}{n-x} \overset{x-1 \to x}{=} \frac{rn}{N} \cdot \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \underbrace{\sum_{x=0}^{n-1} \binom{r-1}{x}\binom{N-r}{n-1-x}}_{\overset{(2)}{=} \binom{N-1}{n-1}}$$

$$= \frac{rn}{N}.$$

(ii). Αν $X \sim Beta(a,b)$, τότε

$$f(x;a,b) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad \underline{0<x<1}$$

$$E(X) = \int_0^1 x f(x;a,b)\,dx = \int_0^1 x \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1} dx = \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)},$$

όπου $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$.

Όμως $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, άρα $E(X) = \dfrac{\dfrac{\Gamma(a+1)\cancel{\Gamma(b)}}{\Gamma(a+b+1)}}{\dfrac{\Gamma(a)\cancel{\Gamma(b)}}{\Gamma(a+b)}} =$

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+1)} = \frac{a\cancel{\Gamma(a)}}{\cancel{\Gamma(a)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(a+b)}}{(a+b)\cancel{\Gamma(a+b)}} = \boxed{\frac{a}{a+b}},$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνάρτησης Γάμμα, ότι

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^a (e^{-x})' dx =$$

$$-\underbrace{\left[x^a e^{-x}\right]_0^{+\infty}}_{0} + a\underbrace{\int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx}_{\Gamma(a)} = a\,\Gamma(a).$$