Λύση Ασκ. 1

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_5$ οι παρατηρήσεις μας. Προφανώς $x_i \in \{0,1\}$, $\forall 1 \leq i \leq 5$. Σχηματίζουμε τη συνάρτηση πιθανοφάνειας.

$$L(p) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_5 = x_5 ; p) \overset{\text{ανεξ.}}{=} \prod_{i=1}^{5} P(X_i = x_i ; p).$$

Όμως $X_i \sim Be(p) \Rightarrow P(X_i = x_i ; p) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

Άρα $L(p) = p^{\sum_{i=1}^{5} x_i}(1-p)^{5-\sum_{i=1}^{5} x_i}$.

(i) Υποθέτουμε ότι $0 < \sum_{i=1}^{5} x_i < 5$.

Τότε μεγιστοποιούμε την $l(p) = \log L(p) = \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)\log p + \left(5 - \sum_{i=1}^{5} x_i\right)\log(1-p)$

$p \in (0,1)$, για την εύρεση της εκτιμ. μέγιστης πιθανοφάνειας.

Έχουμε $l'(p) = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{p} - \dfrac{5 - \sum_{i=1}^{5} x_i}{1-p}$ και

$$l'(p) = 0 \iff \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{p} = \frac{5 - \sum_{i=1}^{5} x_i}{1-p} \iff$$

$$(1-p)\sum_{i=1}^{5} x_i = p\left(5 - \sum_{i=1}^{5} x_i\right) \iff 5p = \sum_{i=1}^{5} x_i \iff p^* = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}.$$

Το p^* είναι το μοναδικό στάσιμο σημείο της παραγωγ. $l(p)$, στο $p \in (0,1)$.

$$l''(p) = -\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{p^2} - \frac{5 - \sum_{i=1}^{5} x_i}{(1-p)^2} < 0, \quad \forall p \in (0,1).$$

Άρα $l''(p^*) < 0$, και άρα είναι ολικό μέγιστο της $l(p)$.

Συμπεραίνουμε ότι $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = \overline{X}$ είναι η ε.μ.π.

(ii) $\sum_{i=1}^{5} x_i = 0 \iff x_1 = \ldots = x_5 = 0$.

Τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι η $l(p)$ δεν έχει μέγιστο στο $(0,1)$

(iii) $\sum_{i=1}^{5} x_i = 5 \iff x_1 = \ldots = x_5 = 1$.

Παρόμοια η $l(p)$ δεν έχει μέγιστο στο $(0,1)$.

*. Μια σκέψη θα ήταν να επιτρέψουμε $p \in [0,1]$, και τότε πράγματι $\hat{p} = \overline{X}$ προκύπτει σε όλες τις περιπτώσεις.