Εισαγωγή στην Τοπολογία - Τελική Εξέταση (2-4-2024)

Θέμα 1ο $(1+1=2$ μον.$)$

(α) Θεωρούμε την κλάση $\mathscr{T}$ υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\mathscr{T}=\Big\{U\subseteq\mathbb{N}\ :\ \forall n\in U\ \{q\in\mathbb{N}:q\,|n\}\subseteq U\Big\}.$$

Αποδείξτε ότι η $\mathscr{T}$ είναι τοπολογία στο $\mathbb{N}$ και εξετάστε αν ο τοπολογικός χώρος $(\mathbb{N},\mathscr{T})$ είναι Hausdorff.

(β) Έστω X τοπολογικός χώρος. Αποδείξτε ότι ο X είναι χώρος Hausdorff αν και μόνο αν η διαγώνιος $\Delta=\{(x,x)\ :x\in X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X\times X$ (με την τοπολογία γινόμενο).

Θέμα 2ο $(1+1=2$ μον.$)$

Έστω $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος στο Ευκλείδειο επίπεδο.

(α) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $f:[0,2\pi)\to S^1$ με $f(t)=(\cos t,\sin t),\ t\in[0,2\pi)$, είναι συνεχής, 1-1 και επί του S^1, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός.

(β) Έστω $g:S^1\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η g δεν μπορεί να είναι ούτε 1-1 ούτε επί του $\mathbb{R}$.

Θέμα 3ο $(1,5+1,5=3$ μον.$)$

Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος είναι φυσιολογικός (T_4).

(β) Κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff είναι φυσιολογικός. (*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι είναι κανονικός (T_3).)

Θέμα 4ο $(1+1+1=3$ μον.$)$

Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών εφοδιασμένο με τη συνήθη τοπολογία και με $\mathbb{R}_S$ την ευθεία του Sorgenfrey , δηλαδή το ίδιο σύνολο με την τοπολογία $\mathscr{T}_S$ που έχει ως βάση την οικογένεια των δεξιά ημιανοιχτών διαστημάτων $\mathcal{B}=\big\{[a,b)\ :\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\big\}$.

(α) Αποδείξτε ότι κάθε δεξιά συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (δηλαδή f με την ιδιότητα $\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, για κάθε $a\in\mathbb{R}$) είναι συνεχής ως συνάρτηση από τον $\mathbb{R}_{\mathbb{S}}$ στον $\mathbb{R}$.

(β) Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\mathcal{U}=\Big\{(p,q):p,q\in\mathbb{Q},\ p<q\Big\}$ είναι βάση για την τοπολογία του $\mathbb{R}$.

(γ) Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\mathcal{V}=\Big\{[p,q):p,q\in\mathbb{Q},\ p<q\Big\}$ δεν είναι βάση για την τοπολογία του $\mathbb{R}_S$.

Θέμα 5ο $(1+1=2$ μον.$)$

Στο σύνολο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ των πραγματικών ακολουθιών θεωρούμε την τοπολογία γινόμενο $\mathscr{T}$ και την box τοπολογία $\mathscr{T}_{\text{box}}$. Έστω c_{00} το υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ που αποτελείται από τις τελικά μηδενικές ακολουθίες, δηλαδή: $x=\big(x(n)\big)\in c_{00}\iff\exists k\in\mathbb{N}$ με $x(n)=0$ για κάθε $n\geq k$. Βρείτε

(α) Την κλειστή θήκη του c_{00} στον χώρο $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathscr{T})$.

(β) Την κλειστή θήκη του c_{00} στον χώρο $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\mathscr{T}_{\text{box}})$.

Καλή Επιτυχία