Εισαγωγή στην Τοπολογία
13-1-2024

Θέμα 1ο (3 × 1 = 3 μον.)

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος Hausdorff, τότε για κάθε $n \geq 2$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ διαφορετικά ανά δύο σημεία του X, υπάρχουν ξένες ανά δύο ανοιχτές περιοχές $U_1, U_2, \ldots, U_n$ των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ αντίστοιχα.

(β) Αν ο X είναι φυσιολογικός (T_4) χώρος, τότε, για οποιαδήποτε A, B κλειστά και ξένα υποσύνολά του, υπάρχουν ανοιχτά $U, V \subseteq X$ με $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

(γ) Αν I είναι ένα άπειρο σύνολο και $(X_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων με $|X_i| \geq 2$ για κάθε $i \in I$, τότε ο χώρος γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Θέμα 2ο (2 × 1,5 = 3 μον.)

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) Αν ο τοπολογικός χώρος X είναι 2ος αριθμήσιμος και η οικογένεια $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι τυχούσα βάση για την τοπολογία του, τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$ που είναι επίσης βάση για την τοπολογία του X.

(β) Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι με τον Y συμπαγή και $x_0 \in X$. Αν το V είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $X \times Y$ με $\{x_0\} \times Y \subseteq V$, τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή W του x_0 στον X τέτοια ώστε $W \times Y \subseteq V$.

Θέμα 3ο (1 + 1,5 = 2,5 μον.)

(α) Εξετάστε αν οι τοπολογικοί χώροι $\mathbb{R}$ και $[0,1)$ (με τη συνήθη τοπολογία) είναι ομοιομορφικοί.

(β) Έστω Γ υπεραριθμήσιμο σύνολο. Εξετάστε αν ο χώρος γινόμενο $[0,1]^\Gamma$ είναι:
(i) συμπαγής, (ii) Hausdorff, (iii) φυσιολογικός (T_4), (iv) 1ος αριθμήσιμος,
(v) μετρικοποιήσιμος,
κάνοντας σαφή αναφορά στα θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσετε.

Θέμα 4ο (2 + 1 + 0,5 = 3,5 μον.)

Θεωρούμε την ευθεία του Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$, δηλαδή το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία $\mathscr{T}_S$ που έχει ως βάση την οικογένεια των δεξιά ημιανοιχτών διαστημάτων

$$\mathcal{B} = \big\{[a,b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\big\}.$$

(α) Εξετάστε αν ο χώρος $\mathbb{R}_S$ είναι:
(i) 1ος αριθμήσιμος, (ii) διαχωρίσιμος, (iii) 2ος αριθμήσιμος, (iv) μετρικοποιήσιμος,
(v) φυσιολογικός (T_4).

(β) Εξετάστε αν το διάστημα $[0,1]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}_S$.

(γ) Ποια είναι τα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}_S$;

Καλή Επιτυχία