# 5 Σύγκλιση σε τοπολογικούς χώρους

Στο κεφάλαιο αυτό πρόκειται να μελετήσουμε την έννοια της σύγκλισης σε γενικούς τοπολογικούς χώρους, πέραν των μετρικών χώρων. Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει

( πρβλ. τις παρατηρήσεις 2.7 (3), 2.20 (5) και την άσκηση 5 του κεφαλαίου 2 ), η κλειστότητα ενός συνόλου σε έναν τοπολογικό χώρο δεν μπορεί πάντοτε να περιγραφεί με ακολουθίες ( σε αντίθεση με τους μετρικοποιήσιμους χώρους).

Υπάρχει όμως μια γενίκευση της έννοιας της ακολουθίας η οποία «δουλεύει» (σχεδόν) εξίσου καλά και σε τυχόντες τοπολογικούς χώρους. Η βασική ιδέα είναι η αντικατάσταση του συνόλου δεικτών με ένα σύνολο περισσότερο γενικό από το σύνολο των φυσικών αριθμών $N$.

Ορισμός 5.1 . Ένα κατευθυνόμενο σύνολο, είναι ένα σύνολο $\mathrm{A}$ εφοδιασμένο με μια διμελή σχέση $\leq$ έτσι ώστε

(ι) $\alpha \leq \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathrm{A}$

(ιι) Αν $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ και

(ιιι) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$ υπάρχει $\gamma \in \mathrm{A}$ έτσι ώστε $\alpha \leq \gamma$ και $\beta \leq \gamma$.

Αν $\alpha \leq \beta$, θα γράφουμε επίσης $\beta \geq \alpha$. Σημειώνουμε ότι ένα σύνολο $\mathrm{A}$ που ικανοποιεί τις (ι) και (ιι) ονομάζεται προ διατεταγμένο. Επομένως ένα κατευθυνόμενο σύνολο είναι ένα προ διατεταγμένο σύνολο που ικανοποιεί την συνθήκη (ιιι).

Ένα δίκτυο σε ένα σύνολο $\mathrm{X}$ είναι μια απεικόνιση $\mathrm{A} \ni a \to x_a \in \mathrm{X}$, όπου $\mathrm{A}$ είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Θα συμβολίζουμε συνήθως μια τέτοια απεικόνιση με $(x_a)_{a \in \mathrm{A}}$ ή απλά με $(x_a)$ αν είναι σαφές ποιο είναι το $\mathrm{A}$.

<u>Παραδείγματα</u> 5.2. 1) Το σύνολο των φυσικών αριθμών $N$ με την συνήθη διάταξη ( και γενικότερα κάθε ολικά διατεταγμένο σύνολο).

2) Το σύνολο $R\setminus\{a\}$, όπου $a\in R$, με την κατεύθυνση $x\le y \Leftrightarrow |x-a|\ge|y-a|$.

3) Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα του $R\ (a,b\in R, a<b)$. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο διαμέριση του $[a,b]$ εννοούμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P$ του $[a,b]$ το οποίο περιέχει τα $a$ και $b$. Έστω $A\equiv A[a,b]$ το σύνολο όλων των διαμερίσεων του $[a,b]$. Το $A$ γίνεται κατευθυνόμενο σύνολο με τις ακόλουθες σχέσεις: (α) Ορίζουμε $P\le Q \Leftrightarrow \|P\|\ge\|Q\|$, όπου $P=\{t_0=a<t_1<\ldots<t_n=b\}$ και $\|P\|=\max\{t_k-t_{k-1}: k=1,2,\ldots,n\}$.

(β) $P\le Q \Leftrightarrow P\subseteq Q$.

4) Το σύστημα $N_x$ όλων των περιοχών του σημείου $x$ στον τοπολογικό χώρο $\mathrm{X}$ γίνεται κατευθυνόμενο σύνολο με την σχέση $U\le V \Leftrightarrow V\subseteq U$ . ( Λέμε τότε ότι το $N_x$ είναι κατευθυνόμενο με την αντίστροφη σχέση του περιέχεσθε. )

5) Το καρτεσιανό γινόμενο $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ δύο κατευθυνόμενων συνόλων $\mathrm{A}$ και $\mathrm{B}$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο με την σχέση $(a,\beta)\le(a',\beta')\Leftrightarrow a\le a'$ και $\beta\le\beta'$.

(Αυτή θα είναι πάντοτε η κατεύθυνση στο γινόμενο $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ δύο κατευθυνόμενων συνόλων.)

6) Ένα κατευθυνόμενο σύνολο δεν είναι πάντοτε μερικά διατεταγμένο. Πράγματι, για το κατευθυνόμενο σύνολο $\mathrm{A}=\mathrm{A}[0,1]$ του παραδείγματος 3 (α) παρατηρούμε ότι, αν

$P=\left\{0,\frac{1}{3},1\right\}$ και $Q=\left\{0,\frac{2}{3},1\right\}$ τότε $P\leq Q$ και $Q\leq P$ αφού $\|P\|=\|Q\|=\frac{1}{3}$, αλλά $P\neq Q$

Σημειώνουμε ότι τα παραδείγματα (1) – (3) τα έχουμε ήδη συναντήσει στα μαθήματα της Ανάλυσης. Ένα δίκτυο με σύνολο δεικτών το $N$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια ακολουθία. Επίσης δίκτυα όπως στα παραδείγματα (2) και (3) συναντώνται κατά τον ορισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ μιας συνάρτησης $f$ πραγματικής μεταβλητής καθώς και στον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann με χρήση ενδιαμέσων αθροισμάτων.

<u>Ορισμός</u> 5.3 Έστω $\mathrm{X}$ τοπολογικός χώρος $\left(x_a\right)_{a\in\mathrm{A}}$ δίκτυο στον $\mathrm{X}$ και $x\in\mathrm{X}$.

(α) Θα λέμε ότι το $x$ είναι <u>όριο</u> του $\left(x_a\right)$ ή ότι το $\left(x_a\right)$ <u>συγκλίνει</u> στο $x$ και θα γράφουμε

$$x_a\to x,$$

Αν για κάθε περιοχή $U$ του $x$ υπάρχει $a_0=a_0\left(U\right)\in\mathrm{A}: a\geq a_0\Rightarrow x_a\in U$ .

(β) Θα λέμε ότι το $x$ είναι <u>οριακό σημείο</u> του $\left(x_a\right)$ αν για κάθε περιοχή $U$ του $x$ για κάθε $a\in\mathrm{A}$ υπάρχει $\beta\in\mathrm{A}$ τέτοιο ώστε $\beta\geq a$ και $x_\beta\in U$ .

Οι ακόλουθες τρείς προτάσεις μας υποδεικνύουν ότι τα δίκτυα υποκαθιστούν επαρκώς τις ακολουθίες σε γενικούς τοπολογικούς χώρους

<u>Πρόταση</u> 5.4 Έστω $\mathrm{X}$ τ.χ. $\mathrm{E}\subseteq\mathrm{X}$ και $x\in\mathrm{X}$. Τότε ισχύουν:

(α) Το $x$ είναι σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του $\mathrm{E}$ αν και μόνο αν υπάρχει δίκτυο $(x_a) \subseteq \mathrm{E} - \{x\}$ ώστε $x_a \to x$.

(β) $x \in \overline{\mathrm{E}}$ αν και μόνο αν υπάρχει δίκτυο $(x_a) \subseteq \mathrm{E}$ ώστε $x_a \to x$.

<u>Απόδειξη.</u> (α) '' $\Rightarrow$'' Αν $x$ είναι σ.σ. του $\mathrm{E}$, έστω $N_x$ το σύστημα των περιοχών του $x$ με την κατεύθυνση του παραδείγματος 5.2 (4). Για κάθε $U \in N_x$, επιλέγουμε $x_U \in (U \setminus \{x\}) \bigcap \mathrm{E}$. Είναι τότε σαφές ότι $x_U \to x$.

'' $\Leftarrow$''Αν $(x_a) \subseteq \mathrm{E} \setminus \{x\}$ και $x_a \to x$, τότε κάθε $U \setminus \{x\}$ όπου $U \in N_x$ περιέχει κάποιο $x_a$, επομένως το $x$ είναι σ.σ. του $\mathrm{E}$.

(β)'' $\Rightarrow$''Από την πρόταση 1.11 έχουμε ότι $\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \bigcup \mathrm{E}'$. Έτσι αν $x \in \overline{\mathrm{E}}$, τότε είτε $x \in \mathrm{E}$ οπότε θέτουμε $x_n = x$ για κάθε $n \in N$ ή $x \in \mathrm{E}'$ οπότε το αποτέλεσμα έπεται από τον ισχυρισμό (α)

'' $\Leftarrow$''Αν $(x_a) \subseteq \mathrm{E}$ και $x_a \to x$ τότε κάθε περιοχή $U$ του $x$ τέμνει το $\mathrm{E}$ και άρα $x \in \overline{\mathrm{E}}$ (πρβλ. την πρόταση 1.9).

<u>Πρόταση</u> 5.5. Έστω $\mathrm{X}, \mathrm{Y}$ τ.χ. και $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ συνάρτηση. Τότε η $f$ είναι συνεχής στο $x \in \mathrm{X}$ αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο $(x_a) \subseteq \mathrm{X} : x_a \to x \Rightarrow f(x_a) \to f(x)$

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $(x_a) \subseteq \mathrm{X}$ τυχόν δίκτυο ώστε $x_a \to x$.

Αν η $f$ είναι συνεχής στο $x$ και $V$ είναι περιοχή του $f(x)$, τότε το $f^{-1}(V)$ είναι περιοχή του $x$, επομένως υπάρχει $a_0 \in \mathrm{A} : a \geq a_0 \Rightarrow x_a \in f^{-1}(V)$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, $a \geq a_0 \Rightarrow f(x_a) \in V$. Δηλαδή $f(x_a) \to f(x)$.

Αντίστροφα, αν η $f$ δεν είναι συνεχής στο $x$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή $V$ του $f(x)$ ώστε , για κάθε $U \in N_x \Rightarrow f(U)$ δεν είναι υποσύνολο του $V$ (1)

Έπεται από την (1) ότι για κάθε $U \in N_x$ υπάρχει $x_U \in U$ ώστε $f(x_U)$ δεν ανήκει στο $V$.

Είναι τώρα σαφές ότι το δίκτυο $x_U \to x$ και συγχρόνως το δίκτυο $\left(f\left(x_U\right)\right)$ δεν συγκλίνει στο $f\left(x\right)$,

άτοπο.

<u>Ορισμός</u> 5.6. (α) Έστω $\mathrm{A}$ κατευθυνόμενο σύνολο. Ένα υποσύνολο $\Gamma$ του $\mathrm{A}$ λέγεται ότι είναι <u>ομοτελικό</u> με το $\mathrm{A}$ αν για κάθε $\alpha \in \mathrm{A}$ υπάρχει $\gamma \in \Gamma : \gamma \geq a$.

Είναι απλό να αποδείξουμε ότι ένα ομοτελικό υποσύνολο κατευθυνόμενου συνόλου είναι και το ίδιο κατευθυνόμενο ως προς την ίδια σχέση.

(β) Έστω $\left(x_a\right)_{a\in\mathrm{A}}$ ένα δίκτυο στο σύνολο $\mathrm{X}$. Ένα υποδίκτυο του $\left(x_a\right)_{a\in\mathrm{A}}$ είναι ένα δίκτυο $\left(y_\beta\right)_{\beta\in\mathrm{B}}$ μαζί με μια απεικόνιση $\varphi : \beta \in \mathrm{B} \to \varphi\left(\beta\right) = a_\beta \in \mathrm{A}$ ώστε να ισχύουν:

(ι) Η $\varphi$ είναι αύξουσα ( δηλαδή, αν $\beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow \alpha_{\beta_1} \leq \alpha_{\beta_2}$ ).

(ιι) Το σύνολο $\varphi\left(\mathrm{B}\right) = \left\{\alpha_\beta : \beta \in \mathrm{B}\right\}$ ¨είναι ομοτελικό υποσύνολο του $\mathrm{A}$.

(ιιι) $y_\beta = x_{a_\beta} \left(= x_{\varphi(\beta)}\right)$.

<u>Παραδείγματα</u> 5.7. 1) Έστω $\left(x_a\right)_{a\in\mathrm{A}}$ ένα δίκτυο στο σύνολο $\mathrm{X}$ και $\mathrm{B}$ ένα ομοτελικό υποσύνολο του $\mathrm{A}$. Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $\varphi : \beta \in \mathrm{B} \to \varphi\left(\beta\right) = \beta \in \mathrm{A}$.

Είναι τότε προφανές ότι η $\varphi$ κάνει το $\left(x_\beta\right)_{\beta\in\mathrm{B}}$ ένα υποδίκτυο του $\left(x_a\right)_{a\in\mathrm{A}}$.

2)Πρέπει να είναι σαφές ότι κάθε υπακολουθία $\left(x_{n_k}\right)$ μιας δοσμένης ακολουθίας $\left(x_n\right)$ είναι ειδική περίπτωση του προηγουμένου παραδείγματος ( αφού η απεικόνιση $k \in N \to n_k \in N$ είναι γνήσια αύξουσα ). Εντούτοις κάθε υποδίκτυο μιας ακολουθίας δεν είναι κατά ανάγκη υπακολουθία. Πράγματι, έστω $\left(x_n\right)$ τυχούσα ακολουθία και $\mathrm{B} = \left[1, +\infty\right)$ με την συνήθη διάταξη. Τότε η απεικόνιση $\varphi : \mathrm{B} \to N : \varphi\left(t\right) = \left[t\right]$ (= το ακέραιο μέρος του πραγματικού $t$ ) είναι προφανώς αύξουσα και $\varphi(\mathrm{B})=N$ . Έτσι το $y_t = x_{\varphi(t)}, t\in \mathrm{B}$ είναι ένα υποδίκτυο της $(x_n)$ με το $\mathrm{B}$ υπεραριθμήσιμο σύνολο άρα δεν είναι υπακολουθία αυτής.

Όπως θα διαπιστώσουμε στην συνέχεια ( και έχοντας υπόψιν τα προηγούμενα παραδείγματα ) τα υποδίκτυα συμπεριφέρονται περίπου όπως και οι υπακολουθίες.

<u>Πρόταση</u> 5.8 .Αν $x_a \to x$ τότε κάθε υποδίκτυο του $(x_a)_{a\in \mathrm{A}}$ συγκλίνει στο $x$ .

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $y_\beta = x_{a_\beta}, \beta \in \mathrm{B}$ ένα υποδίκτυο του $(x_a)$. Αν $U$ είναι περιοχή του $x$ αφού $x_a \to x$ υπάρχει $a_0 \in \mathrm{A} : a \geq a_0 \Rightarrow x_a \in U$ . Το $\{a_\beta : \beta \in \mathrm{B}\}$ είναι ομοτελικό στο $\mathrm{A}$ άρα υπάρχει $\beta_0 : a_{\beta_0} \geq a_0$ . Έπεται, ότι αν $\beta \geq \beta_0$ τότε $a_\beta \geq a_{\beta_0} \geq a_0$ . Κατά συνέπεια $y_\beta = x_{a_\beta} \in U$ . Από όπου συμπεραίνουμε ότι $y_\beta \to x$ .

<u>Πρόταση</u> 5.9. Έστω $(x_a)_{a\in \mathrm{A}}$ ένα δίκτυο στον τ.χ. $\mathrm{X}$ και $x\in \mathrm{X}$ . Τότε το $x$ είναι οριακό σημείο του $(x_a)$ αν και μόνο αν το $(x_a)$ έχει ένα υποδίκτυο το οποίο συγκλίνει στο $x$ .

<u>Απόδειξη.</u> $'' \Rightarrow ''$ Έστω $x$ οριακό σημείο του $(x_a)$. Έστω ακόμη $N_x$ το σύστημα των περιοχών του $x$. Το $N_x \times \mathrm{A}$ γίνεται κατευθυνόμενο σύνολο με την σχέση $(U,a)\leq (U',a')$ αν και μόνο αν $U \supseteq U'$ και $a \leq a'$ ( πρβλ. τα παραδείγματα 5.2 (4) και (5)).

Θέτουμε $\mathrm{B} = \{(U,a)\in N_x \times \mathrm{A} : x_a \in U\}$, τότε το $\mathrm{B}$ είναι ομοτελικό υποσύνολο του $N_x \times \mathrm{A}$. Πράγματι, έστω $(U,a)$ στοιχείο του $N_x \times \mathrm{A}$, θεωρούμε $\beta \geq a : x_\beta \in U$ τότε $(U,a)\leq (U,\beta)$. Επομένως το $\mathrm{B}$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο και αν ορίσουμε $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{A} : \varphi(U,a) = a$ , τότε εύκολα έπεται ότι $\varphi$ αύξουσα και $\varphi(\mathrm{B})$ ομοτελικό υποσύνολο του $\mathrm{A}$. Ισχυριζόμαστε ότι το δίκτυο $\left(x_{\varphi(U,a)}\right)_{\mathrm{B}}$ συγκλίνει στο $x$. Έστω $U$ περιοχή του $x$ τότε υπάρχει $a_0 \in \mathrm{A} : x_{a_0} \in U$, έπεται ότι αν $(V,a) \in \mathrm{B} : (U,a_0) \leq (V,a)$ τότε $a_0 \leq a$ και άρα $x_a \in V \subseteq U$ το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

$'' \Leftarrow ''$ Αν $y_\beta = x_{a_\beta}$ είναι ένα υποδίκτυο του $(x_a)$ το οποίο συγκλίνει στο $x$ και $U$ είναι μια περιοχή του $x$, επιλέγουμε $\beta_1 \in \mathrm{B}$ ώστε $y_\beta \in U$ για κάθε $\beta \geq \beta_1$. Επίσης αν $a \in \mathrm{A}$ επιλέγουμε $\beta_2 \in \mathrm{B}$ ώστε $a_\beta \geq a$ για κάθε $\beta \geq \beta_2$. Τότε υπάρχει $\beta \in \mathrm{B}$ με $\beta \geq \beta_1$ και $\beta \geq \beta_2$ και έτσι έχουμε $a_\beta \geq a$ και $x_{a_\beta} = y_\beta \in U$. Άρα το $x$ είναι ένα οριακό σημείο του $(x_a)$.

……………………………………………

Οι τοπολογικοί χώροι Hausdorff χαρακτηρίζονται με την βοήθεια δικτύων με τον ακόλουθο τρόπο.

Πρόταση 5.10. Ένας τ.χ. $\mathrm{X}$ είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε δίκτυο στον $\mathrm{X}$ συγκλίνει (αν συγκλίνει ) σε το πολύ ένα σημείο.

Απόδειξη. $'' \Rightarrow ''$ Έστω ότι ο $\mathrm{X}$ είναι Hausdorff. Υποθέτουμε ότι το δίκτυο $(x_a)_{a\in\mathrm{A}}$ συγκλίνει σε δύο διαφορετικά σημεία $x$ και $y$ του $\mathrm{X}$. Θεωρούμε δύο ξένες περιοχές $U$ και $V$ των $x$ και $y$ αντίστοιχα, τότε υπάρχουν $a_1, a_2 \in \mathrm{A}$ ώστε, $a \geq a_1 \Rightarrow x_a \in U$ και $a \geq a_2 \Rightarrow x_a \in V$. Επειδή το $\mathrm{A}$ είναι κατευθυνόμενο υπάρχει $a_0 \in \mathrm{A}$ ώστε $a_0 \geq a_1$ και $a_0 \geq a_2$, τότε $x_{a_0} \in U \cap V$, άτοπο.

$'' \Leftarrow ''$ Έστω ότι κάθε συγκλίνον δίκτυο του $\mathrm{X}$ συγκλίνει σε ένα μόνο σημείο. Αν ο $\mathrm{X}$ δεν είναι Hausdorff, έστω $x$ και $y$ διαφορετικά σημεία του $\mathrm{X}$ για τα οποία δεν υπάρχει ένα ζεύγος ξένων περιοχών τους. Θεωρούμε το κατευθυνόμενο σύνολο

$\mathrm{A} = N_x \times N_y$, όπου $N_x$ και $N_y$ είναι τα συστήματα των περιοχών των σημείων $x$ και $y$ ( πρβλ. τα παραδείγματα 3.2 (4) και (5)).

Ορίζουμε ένα δίκτυο στον $\mathrm{X}$ με τον ακόλουθο τρόπο. Για κάθε $(U,V) \in \mathrm{A}$, από την υπόθεση έχουμε ότι $U \bigcap V \neq \varnothing$. Έτσι επιλέγουμε, χρησιμοποιώντας το αξίωμα επιλογής, ένα $x_{(U,V)} \in U \bigcap V$ .

Ισχυριζόμαστε τώρα για το δίκτυο $(x_a)_{a \in \mathrm{A}}$ ότι

(1) $x_a \to x$ και (2) $x_a \to y$.

Πράγματι, αν $U_0$ είναι τυχούσα περιοχή του $x$ και θέσουμε $a_0 = (U_0, \mathrm{X})$, τότε αν $a = (U,V) \geq (U_0, \mathrm{X})$ θα έχουμε ότι $U \subseteq U_0$ συνεπώς

$$x_a \in U \bigcap V \subseteq U \subseteq U_0 \text{, άρα } x_a \in U .$$

Δηλαδή ισχύει η (1). Όμοια αποδεικνύουμε και την (2).

Έτσι το δίκτυο $(x_a)_{a \in \mathrm{A}}$ συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια και αυτό αντιφάσκει με την υπόθεσή μας.

……………………………………………..

Όπως γνωρίζουμε, από τα μαθήματα της Πραγματικής Ανάλυσης, οι συμπαγείς μετρικοί χώροι $\mathrm{X}$ χαρακτηρίζονται ( μέσα στην κλάση των μετρικών χώρων ) από την ιδιότητα Bolzano-Weierstrass: Κάθε ακολουθία στον $\mathrm{X}$ έχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του $\mathrm{X}$. ( Πρβλ. και την άσκηση 9 του κεφαλαίου 3). Μία μορφή αυτής της ιδιότητας χαρακτηρίζει, αντικαθιστώντας τις ακολουθίες με δίκτυα, και τους γενικούς συμπαγείς χώρους.

<u>Θεώρημα</u> 5.11. Έστω $\mathrm{X}$ τ.χ., οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι

(α) Ο $\mathrm{X}$ είναι συμπαγής

(β) Κάθε δίκτυο στον $\mathrm{X}$ έχει ένα οριακό σημείο.

(γ) Κάθε δίκτυο στον $\mathrm{X}$ έχει ένα συγκλίνον υποδίκτυο.

<u>Απόδειξη.</u> Η ισοδυναμία των (β) και (γ) έπεται από την πρόταση 5.9. Αρκεί να αποδείξουμε την ισοδυναμία (α) $\Leftrightarrow$(β).

(α) $\Rightarrow$(β). Αν ο $\mathrm{X}$ είναι συμπαγής και $(x_a)$ είναι ένα δίκτυο στον $\mathrm{X}$, έστω $\mathrm{E}_a = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$. Επειδή για κάθε $a, \beta \in \mathrm{A}$ υπάρχει $\gamma \in \mathrm{A}$ με $\gamma \geq a$ και $\gamma \geq \beta$, η οικογένεια $\{\mathrm{E}_a : a \in \mathrm{A}\}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, έτσι από την παρατήρηση 3.7 (β), ισχύει ότι $\bigcap_{a \in \mathrm{A}} \overline{\mathrm{E}_a} \neq \varnothing$. Αν $x \in \bigcap_{a \in \mathrm{A}} \overline{\mathrm{E}_a}$ και $U$ είναι μια περιοχή του $x$, τότε η$U$ τέμνει κάθε $\mathrm{E}_a$, το οποίο σημαίνει ότι το $x$ είναι ένα οριακό σημείο του $(x_a)$.

(β) $\Rightarrow$(α). Υποθέτουμε ότι ο $\mathrm{X}$ δεν είναι συμπαγής , άρα θα υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{U_\beta : \beta \in \mathrm{B}\}$ του $\mathrm{X}$ χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα. Θεωρούμε το σύνολο $G$ των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathrm{B}$ το οποίο γίνεται κατευθυνόμενο με τη σχέση του περιέχεσθαι ( γιατί; )

Για κάθε $F \in G$ έστω $x_F$ ένα σημείο του συνόλου$\left(\bigcup_{\beta \in F} U_\beta\right)^c = \mathrm{X} \setminus \bigcup_{\beta \in F} U_\beta$. Τότε το $(x_F)_{F \in G}$ είναι ένα δίκτυο του $\mathrm{X}$ χωρίς οριακό σημείο. Πράγματι, αν $x \in \mathrm{X}$, επιλέγουμε $\beta \in \mathrm{B}$ με $x \in U_\beta$. Αν $F \in G$ και $F \geq \{\beta\} \Leftrightarrow \beta \in F$ τότε $x_F \notin U_\beta$ επομένως το $x$ δεν είναι οριακό σημείο του $(x_F)$. Έτσι αποδείξαμε ότι το δίκτυο $(x_F)$ δεν έχει οριακό σημείο στον χώρο $\mathrm{X}$ και αυτό αντιφάσκει με την υπόθεσή μας.

……………………………………………………

<u>Παρατηρήσεις</u> 5.12. 1) Η σύγκλιση σε τοπολογικούς χώρους μπορεί εναλλακτικά να οικοδομηθεί με την χρήση της έννοιας του φίλτρου ή της βάσης φίλτρου ( πρβλ. τον ορισμό 1.24 και τις ασκήσεις της παραγράφου 1.1 ).

Έτσι θα λέμε ότι μια βάση φίλτρου Β σε έναν τ.χ. $\mathrm{X}$ συγκλίνει στο σημείο $x$ του $\mathrm{X}$ και θα γράφουμε $B \to x$ αν για κάθε περιοχή $U$ του $x$ υπάρχει $\mathrm{A} \in B : \mathrm{A} \subseteq U$.

( Αν η $B$ είναι ένα φίλτρο τότε είναι σαφές ότι, $B \to x \Leftrightarrow N_x \subseteq B$, όπου $N_x$ είναι το σύστημα των περιοχών του $x$ στον $\mathrm{X}$. )

Οι δύο έννοιες σύγκλισης είναι ισοδύναμες σε κάθε τ.χ. $\mathrm{X}$ υπό την ακόλουθη έννοια:

(α) Κάθε δίκτυο $(x_a)_{a \in \mathrm{A}}$ ορίζει μια βάση φίλτρου $B = B(x_a)$ έτσι ώστε

$$x_a \to x \Leftrightarrow B \to x \qquad (1)$$

(β) Κάθε βάση φίλτρου $B$ ορίζει ένα δίκτυο $(x_a)_{a \in \mathrm{A}}$ έτσι ώστε

$$B \to x \Leftrightarrow x_a \to x \qquad (2).$$

Για τον ισχυρισμό (α) παρατηρούμε ότι αν $(x_a)_{a \in \mathrm{A}}$ είναι ένα δίκτυο στον $\mathrm{X}$ τότε η οικογένεια $B = B(x_a) = \{\mathrm{T}_a : a \in \mathrm{A}\}$, όπου $\mathrm{T}_\alpha = \{x_b : b \in \mathrm{A}, a \le b\}$ είναι μια βάση φίλτρου στον $\mathrm{X}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισοδυναμία (1).

Όσο για τον ισχυρισμό (β), αν $B$ είναι μια βάση φίλτρου στον $\mathrm{X}$, ορίζουμε ως $\mathrm{A}$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών $(\alpha, \mathrm{E})$, όπου $\alpha \in \mathrm{E} \in B$ και ακόμη ορίζουμε στο $\mathrm{A}$ την σχέση $(\alpha, \mathrm{E}_1) \le (b, \mathrm{E}_2) \Leftrightarrow \mathrm{E}_2 \subseteq \mathrm{E}_1$.

Επειδή η $B$ είναι βάση φίλτρου, έπεται εύκολα ότι το $(\mathrm{A}, \le)$ είναι κατευθυνόμενο σύνολο. Το δίκτυο που αντιστοιχεί στην $B$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισοδυναμία (2) ορίζεται από την απεικόνιση $(a, \mathrm{E}) \to a$, δηλαδή

$$x_{(a,\mathrm{E})} = a, \quad (a, \mathrm{E}) \in \mathrm{A}.$$

(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στην απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών.)

2) Έστω $f$ μια απεικόνιση ενός συνόλου $\mathrm{X}$ στον τοπολογικό χώρο $\mathrm{Y}$, και $B$ μια βάση φίλτρου στο $\mathrm{X}$. Ένα σημείο $y \in \mathrm{Y}$ λέγεται ότι είναι όριο της $f$ σχετικά με την

βάση φίλτρου $B$ αν το $y$ είναι όριο της βάσης φίλτρου $f(B)=\{f(\mathrm{E}):\mathrm{E}\in B\}$ του $\Upsilon$ (πρβλ. την άσκηση 10 της παραγράφου 1.1. ).

Γράφουμε τότε , $\lim\limits_{B} f = y$ .

Έτσι έχουμε,

$\lim\limits_{B} f = y \Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή $U$ του $y$ στον $\Upsilon$ υπάρχει $\mathrm{E}\in B: f(\mathrm{E})\subseteq U$ .

<u>Παραδείγματα</u>. (α) Μια ακολουθία σημείων $(x_n)_{n\in N}$ του τοπολογικού χώρου $\mathrm{X}$ είναι μία απεικόνιση $n\in N\to x_n\in \mathrm{X}$ . Έστω $B$ ένα φίλτρο στο $N$ τότε ( σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό ) έχουμε ότι,

$\lim\limits_{B} x_n = x \Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή $U$ του $x$ το σύνολο $\{n\in N : x_n\in U\}\in B$ .

Έπεται ιδιαίτερα ότι, αν $B$ είναι το φίλτρο του Frechet στο $N$

( $B=\{\mathrm{E}\subseteq N : N\setminus \mathrm{E}$ πεπερασμένο$\}$ ) τότε ,

$\lim\limits_{B} x_n = x \Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή $U$ του $x$ υπάρχει $n_0\in N : n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in U$ .

Αυτό σημαίνει ότι η οικεία από την κλασική Ανάλυση έννοια της σύγκλισης ακολουθίας ταυτίζεται με την σύγκλιση ακολουθίας ως προς το φίλτρο του Frechet.

(β)Ο ορισμός του ολοκληρώματος Riemann για μια φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to R$ μπορεί να διατυπωθεί με την βοήθεια της παρατήρησης (1) ( πρβλ. και το παράδειγμα 5.2 (3)(α) ) με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω $P=\{t_0=a<t_1<\ldots<t_n=b\}$ μία διαμέριση του $[a,b]$. Κάθε άθροισμα της μορφής $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(t_k-t_{k-1})$, όπου $x_k\in[t_{k-1},t_k]$,

$k=1,2,\ldots,n$, είναι τυχούσα επιλογή ενδιάμεσων σημείων, ονομάζεται ένα άθροισμα Riemann και συμβολίζεται με $S(f,P,(x_k))$.

Έστω $R_P=\{S(f,P,(x_k)):(x_k)$ επιλογή ενδιαμέσων σημείων για την $P\}$.

Θέτουμε $A_P = \bigcup\{R_Q : \|Q\| < \|P\|\}$. Τότε η οικογένεια

$\mathcal{U} = \{A_P : P$ διαμέριση του $[a,b]\}$ είναι μια βάση φίλτρου στο $R$ και η $f$ ( λέγεται ότι ) είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν και μόνο αν υπάρχει $I \in R$ ώστε $\mathcal{U} \to I$.

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = I$.

Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την κατεύθυνση του παραδείγματος 5.2 (3) (β) : Έτσι ορίζουμε $B_P = \bigcup\{R_Q : P \subseteq Q\}$, τότε η $B = \{B_P : P$ διαμέριση του $[a,b]\}$ είναι βάση φίλτρου στο $R$ και (αποδεικνύεται ότι ) η $f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει $I \in R$ ώστε $B \to I$ .

(Συγκρίνετε τους ορισμούς του ολοκληρώματος Riemann που δίνονται στον Απειροστικό Λογισμό και βεβαιωθείτε ότι είναι ισοδύναμοι με τους παραπάνω ορισμούς. )

**Ασκήσεις**

1)Έστω $X \neq \varnothing$. Αποδείξτε ότι:

(α)Το σύνολο $P(X)$ όλων των υποσυνόλων του $X$ γίνεται κατευθυνόμενο με την σχέση του περιέχεσθαι, δηλαδή $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(β) Ομοίως το σύνολο $F = F(X)$ των πεπερασμένων υποσυνόλων του $X$ είναι κατευθυνόμενο με την ίδια σχέση.

2)Έστω $(x_a)_{a\in A}$ ένα δίκτυο στον τ.χ. $X$. Αποδείξτε ότι ένα σημείο $x$ του $X$ είναι οριακό σημείο του $(x_a) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in A} \overline{T_\alpha}$, όπου $T_\alpha = \{x_b : b \in A : a \leq b\}$.

3)Έστω $\left(x_a\right)_{a\in \mathrm{A}}$ ένα δίκτυο στον τ.χ. $\mathrm{X}$. Αποδείξτε ότι $x_a \to x \Leftrightarrow$ για κάθε ομοτελικό $\mathrm{B}\subseteq \mathrm{A}$ υπάρχει ομοτελικό $\Gamma \subseteq \mathrm{B}$: το δίκτυο $\left(x_\gamma\right)_{\gamma\in\Gamma}$ συγκλίνει στο $x$.

4)Έστω $\mathrm{X}=\prod\limits_{i\in \mathrm{I}}\mathrm{X}_i$ ένα καρτεσιανό γινόμενο τ.χ. . Αποδείξτε ότι

(α) Ένα δίκτυο $\left(x_a\right)_{a\in \mathrm{A}}$ συγκλίνει στο $x\in \mathrm{X} \Leftrightarrow$ το δίκτυο $\left(\pi_i\left(x_a\right)\right)_{a\in \mathrm{A}}$ συγκλίνει στο $\pi_i\left(x\right)$ για κάθε $i\in \mathrm{I}$.

(β) Θεωρούμε τον τ.χ. $R^\Gamma$ με την τοπολογία γινόμενο $\tau$ .

Αποδείξτε ότι ένα δίκτυο συναρτήσεων, $f_\alpha : \Gamma \to R, a\in \mathrm{A}$ συγκλίνει στην συνάρτηση $f:\Gamma\to R$ Ως προς την $\tau$ $\Leftrightarrow$ $f_a\left(\gamma\right)\to f\left(\gamma\right)$ για κάθε $\gamma\in\Gamma$. ( Το αποτέλεσμα αυτό δικαιολογεί και την ορολογία <u>τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο</u> για την $\tau$ .)

5)Έστω $g:\mathrm{A}\subseteq R\to R$ συνάρτηση, $\alpha\in \mathrm{A}'$ (= το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του $\mathrm{A}$ ) και $b\in R$. Θέτουμε $F=\left\{\mathrm{A}\bigcap\left(U\setminus\{a\}\right):U \text{ περιοχή του α στο } R\right\}$ . Αποδείξτε ότι:

(α) Το $F$ είναι ένα φίλτρο στο $\mathrm{A}$.

(β) $\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)=b \Leftrightarrow \lim\limits_{F} g=b$.

6)Έστω $\mathrm{X}\neq\varnothing$ σύνολο και $f:\mathrm{X}\to\left[0,+\infty\right)$ συνάρτηση. Ορίζουμε το σύμβολο $\sum\limits_{x\in \mathrm{X}} f\left(x\right)$ ως εξής,

$$\sum_{x\in \mathrm{X}} f\left(x\right)=\sup\left\{\sum_{x\in F} f\left(x\right): F\subseteq \mathrm{X} \text{ πεπερασμένο}\right\}$$

Αν $f:\mathrm{X}\to\left[0,+\infty\right)$ είναι δεδομένη συνάρτηση και $\mathrm{A}=\left\{x\in \mathrm{X}: f\left(x\right)>0\right\}$, αποδείξτε ότι:

(α) Αν το $\mathrm{A}$ είναι υπεραριθμήσιμο τότε $\sum_{x\in \mathrm{X}} f(x)=+\infty$

(β) Αν το $\mathrm{A}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο τότε $\sum_{x\in \mathrm{X}} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f(g(n))$, όπου $g:N\to R$ είναι οποιαδήποτε $1-1$ και επί συνάρτηση.

[Υπόδειξη: $\mathrm{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n$ , όπου $\mathrm{A}_n=\left\{x: f(x)>\frac{1}{n}\right\}$. Αν το $\mathrm{A}$ είναι υπεραριθμήσιμο τότε κάποιο $\mathrm{A}_{n_0}$ είναι υπεραριθμήσιμο και $\sum_{x\in F} f(x)>\frac{|F|}{n_0}$, για κάθε πεπερασμένο $F\subseteq \mathrm{A}_{n_0}$, και άρα $\sum_{x\in \mathrm{X}} f(x)=+\infty$.

Αν το $\mathrm{A}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο, $g:N\to \mathrm{A}$ είναι $1-1$ και επί και $\mathrm{B}_N=g(\{1,2,...,N\})$, τότε κάθε πεπερασμένο $F\subseteq \mathrm{A}$ περιέχεται σε κάποιο $\mathrm{B}_N$. Έπεται ότι $\sum_{x\in F} f(x)\le \sum_{n=1}^{N} f(g(n))\le \sum_{x\in \mathrm{X}} f(x)$. Αν θεωρήσουμε το supremum πρώτα ως προς $N$ και κατόπιν ως προς $F$, έχουμε το συμπέρασμα.]

7)Έστω $\mathrm{X}\neq\varnothing$ σύνολο και $f:\mathrm{X}\to R$ συνάρτηση. Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $F$ του $\mathrm{X}$, θέτουμε $Z_F=\sum_{x\in F} f(x)$ και θεωρούμε το σύνολο $\Gamma$ των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathrm{X}$ ως κατευθυνόμενο με την σχέση του περιέχεσθαι (πρβλ. την άσκηση 1). Αποδείξτε ότι το δίκτυο $(\mathrm{Z}_F)_{F\in\Gamma}$ συγκλίνει σε σημείο του $R$ αν και μόνο αν το σύνολο $\{x\in \mathrm{X}; f(x)\neq 0\}$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο έστω $\{x_n, n\ge 1\}$ και $\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|<+\infty$. Τότε ισχύει ότι $Z_F\to\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$.

8) Αν $\mathrm{X}$ είναι τ.χ. ένα σημείο $x\in \mathrm{X}$ λέγεται οριακό σημείο μιας βάσης φίλτρου $B$ του $\mathrm{X}$ αν $x\in\bigcap\left\{\overline{\mathrm{E}}:\mathrm{E}\in B\right\}$.

Αποδείξτε ότι:

(α) $x$ είναι οριακό σημείο της βάσης φίλτρου $B \Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή $U$ του $x$ για κάθε $\mathrm{E} \in B \Rightarrow U \bigcap \mathrm{E} \neq \varnothing$.

(β) $x$ είναι οριακό σημείο του φίλτρου $F \Leftrightarrow$ υπάρχει φίλτρο $F'$ με $F \subseteq F'$ ώστε $F' \to x$.

(γ) Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ του $\mathrm{X}$ συγκλίνει στο $x \in \mathrm{X} \Leftrightarrow$ το $x$ είναι οριακό σημείο του $\mathcal{U}$ .

(δ) Ένας τ.χ. $\mathrm{X}$ είναι συμπαγής $\Leftrightarrow$ κάθε υπερφίλτρο του $\mathrm{X}$ συγκλίνει σε σημείο του $\mathrm{X} \Leftrightarrow$ κάθε φίλτρο του $\mathrm{X}$ έχει ένα οριακό σημείο.

9) Αποδείξτε με ένα παράδειγμα ότι ένα υποδίκτυο $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}, \beta \in \mathrm{B}$, μιας ακολουθίας $(x_n)$ δεν είναι κατ' ανάγκη υπακολουθία της $(x_n)$, ακόμα και αν το $\mathrm{B}$ είναι αριθμήσιμο και η $\varphi$ $1-1$ και επί του $N$ . [ <u>Υπόδειξη</u>. Έστω $\mathrm{B}$ το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του $N \bigcup \{0\}$ με την σχέση του περιέχεσθαι. Θεωρούμε την απεικόνιση, $\varphi : \mathrm{B} \to N : \varphi(F) = \sum_{k \in F} 2^k$ .]

10)Βρείτε ένα παράδειγμα ενός μερικά διατεταγμένου συνόλου το οποίο δεν είναι κατευθυνόμενο. [<u>Υπόδειξη.</u> Έστω $(\mathrm{T}, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο με μια διάταξη δένδρου. Θεωρήστε δύο μη συγκρίσιμα στοιχεία $x$ και $y$ του $\mathrm{T}$.]