3.2 Το θεώρημα Tychonoff.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με το θεώρημα Tychonoff, δηλαδή ότι ένα αυθαίρετο καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών χώρων είναι , με την τοπολογία γινόμενο, συμπαγής χώρος. Το θεώρημα αυτό είναι από τα πιο σπουδαία της Τοπολογίας και εξαιρετικά σημαντικό για την Ανάλυση.

Εφαρμογές του θεωρήματος Tychonoff θα εξετάσουμε και σε αυτές τις σημειώσεις.

Θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας πρώτα την πεπερασμένη εκδοχή του, δηλαδή ότι ένα καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος.

Θεώρημα 3.17. Έστω $\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n$ συμπαγείς χώροι, τότε ο χώρος $\mathrm{X}_1\times\ldots\times\mathrm{X}_n$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση δύο συμπαγών χώρων X και Y.

Έστω $\{U_i : i\in \mathrm{I}\}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$. Τότε για κάθε $x\in\mathrm{X}$ και $y\in\mathrm{Y}$, υπάρχει $i\in\mathrm{I}$ ώστε $(x,y)\in U_i$. Επομένως υπάρχει ένα βασικό ανοικτό σύνολο $V(x,y)\times W(x,y)$ στον $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ ώστε $(x,y)\in V(x,y)\times W(x,y)\subseteq U_i$.

Καθώς το (x,y) κινείται στον χώρο $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$, βρίσκουμε ένα ανοικτό κάλυμμα $\{V(x,y)\times W(x,y) : x\in\mathrm{X}, y\in\mathrm{Y}\}$ του $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ ώστε κάθε $V(x,y)\times W(x,y)$ περιέχεται σε κάποιο $U_i, i\in\mathrm{I}$. Επομένως για να αποδείξουμε ότι ο $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ είναι συμπαγής αρκεί να βρούμε ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του ανωτέρω καλύμματος.

Έστω $x_0\in\mathrm{X}$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\{x_0\}\times\mathrm{Y}$ του $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$.

Τα σύνολα της μορφής $V(x_0,y)\times W(x_0,y), y\in\mathrm{Y}$ συνιστούν προφανώς ένα ανοικτό κάλυμμα του $\{x_0\}\times\mathrm{Y}$ και συνεπώς τα σύνολα $\{W(x_0,y), y\in\mathrm{Y}\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου Y. Έστω $\{W(x_0,y_1),\ldots,W(x_0,y_n)\}$ ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του Y, τότε τα σύνολα $V(x_0,y_1)\times W(x_0,y_1),\ldots,V(x_0,y_n)\times W(x_0,y_n)$ είναι προφανώς ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του $\{x_0\}\times\mathrm{Y}$.

Θέτομε , $V(x_0)=V(x_0,y_1)\bigcap V(x_0,y_2)\bigcap\ldots\bigcap V(x_0,y_n)$, τότε το $V(x_0)$ είναι ανοικτή περιοχή του x_0 στον X και βέβαια ισχύει ότι το σύνολο $V(x_0)\times\mathrm{Y}$ περιέχεται στην ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους συνόλων της μορφής $V(x_0,y)\times W(x_0,y), y\in\mathrm{Y}$.

Έπεται ότι για να αποδείξουμε ότι ο $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ είναι συμπαγής, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ περιέχεται σε μια πεπερασμένη ένωση συνόλων της ανωτέρω μορφής $V(x)\times\mathrm{Y}$.

Πράγματι , κάθε $V(x)$ είναι ανοικτό στον X και περιέχει το x, η οικογένεια $\{V(x): x\in\mathrm{X}\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου X και άρα υπάρχουν $x_1,\ldots,x_n\in\mathrm{X}$ ώστε $\mathrm{X}=\bigcup_{k=1}^{n}V(x_k)$. Έπεται ότι, $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}=\bigcup_{k=1}^{n}\left(V(x_k)\times\mathrm{Y}\right)$, το οποίο τελειώνει την απόδειξη του θεωρήματος στην περίπτωση των δύο χώρων.

Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται με επαγωγή. Υποθέτουμε ότι το γινόμενο κάθε

$n-$άδας συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος. Ας θεωρήσουμε το γινόμενο $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times\ldots\times\mathrm{X}_n\times\mathrm{X}_{n+1}$ των συμπαγών χώρων $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2,\ldots,\mathrm{X}_n,\mathrm{X}_{n+1}$. Τότε, $\mathrm{X}\cong\left[\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times\ldots\times\mathrm{X}_n\right]\times\mathrm{X}_{n+1}$. Από την επαγωγική υπόθεση ο χώρος $\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times\ldots\times\mathrm{X}_n$ είναι συμπαγής, έτσι ο X είναι γινόμενο δύο συμπαγών χώρων και συνεπώς συμπαγής. Η επαγωγή είναι πλήρης και έτσι έχουμε αποδείξει το θεώρημα.

……………………………………………….

<u>Παρατήρηση</u> 3.18. Στο πρώτο μέρος της απόδειξης του προηγουμένου θεωρήματος χρησιμοποιήσαμε την ακόλουθη παρατήρηση: Έστω (X,τ) τ.χ. και $B\subseteq\tau$ μια βάση για την τοπολογία του. Τότε ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα $\alpha\subseteq B$ του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. (Αφήνεται ως άσκηση.)

<u>Πόρισμ</u>α 3.19. Έστω $a,b\in R, a<b$ και $n\in N$. Τότε ισχύουν:

(α) Ο κύβος $[a,b]^n$ είναι με την τοπολογία γινόμενο, συμπαγής χώρος και επί πλέον ,

(β) ένα συμπαγές υποσύνολο του Ευκλειδείου χώρου R^n .

Απόδειξη. Από το παράδειγμα 3.3 (4) το διάστημα $[a,b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του R .Έπεται από το θεώρημα 3.17 ότι το ο κύβος $[a,b]^n$ είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του R^n με την τοπολογία γινόμενο. Από την παρατήρηση 2.20 (6)έχουμε ότι η τοπολογία γινόμενο του R^n ταυτίζεται με την Ευκλείδεια τοπολογία, έτσι έχουμε το συμπέρασμα.

……………………………………………………….

Τώρα μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα συμπαγή υποσύνολα του ευκλειδείου χώρου. Ο προκύπτων χαρακτηρισμός αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως το « Γενικευμένο θεώρημα Heine – Borel».

Θεώρημα 3.20. Ένα υποσύνολο K του ευκλειδείου χώρου R^n είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη. $'' \Rightarrow ''$ Κάθε συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου είναι κλειστό και φραγμένο (πρβλ. παράδειγμα 3.13 (3)).

$'' \Leftarrow ''$ Για κάθε $x=(x_1,...,x_n)\in R^n$, θέτομε $\|x\|_\infty=\max(|x_1|,...,|x_n|)$ τότε η $\|\cdot\|_\infty$ είναι μία νόρμα στον R^n η οποία συνδέεται με την ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$ με τις ανισότητες

(1) $$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\cdot\|x\|_\infty ,\quad x\in R^n .$$

(Πρβλ. την παρατήρηση 2.20 (6) καθώς και την άσκηση 6 των παραγράφων 2.1 και 2.2 .)

Έπεται από την (1) ότι ένα υποσύνολο K του R^n είναι φραγμένο ως προς την ευκλείδεια μετρική, $d(x,y)=\|x-y\|_2 , x,y\in R^n$ αν και μόνο αν είναι φραγμένο για την μετρική, $\rho(x,y)=\|x-y\|_\infty , x,y\in R^n$.

Έστω λοιπόν K ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του ευκλειδείου χώρου R^n . Τότε το K είναι φραγμένο και για την μετρική ρ και συνεπώς υπάρχει N φυσικός αριθμός ώστε $K\subseteq B_\rho(0,N)=[-N,N]^n$. Από το προηγούμενο πόρισμα ο κύβος $[-N,N]^n$ είναι συμπαγές υποσύνολο του ευκλειδείου χώρου R^n, επειδή το K είναι κλειστό υποσύνολο (του R^n και συνεπώς) του $[-N, N]^n$ από την πρόταση3.8 έπεται το συμπέρασμα.

<u>Άσκηση</u> . Αν το υποσύνολο K του R^n είναι φραγμένο για την ευκλείδεια νόρμα αποδείξτε ότι το K είναι φραγμένο και για τις νόρμες $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le +\infty$.

<u>Παραδείγματα</u> 3. 21 .1) Κάθε κλειστή σφαίρα $\hat{B}(x, \varepsilon)$, καθώς και η επιφάνειά της $S(x, \varepsilon) = \{x \in R^n : \|x\|_2 = 1\}$ του ευκλειδείου χώρου R^n είναι συμπαγή σύνολα, ως κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του R^n. Ειδικότερα η επιφάνεια, $S^{n-1} = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$ της μοναδιαίας σφαίρας $\hat{B}(0,1)$ του ευκλειδείου χώρου R^n είναι ένα συμπαγές σύνολο.

2)Ο υπόχωρος $\mathrm{X} = S^1 \times [0,1]$ του R^3 είναι συμπαγής ως γινόμενο δύο συμπαγών συνόλων. (Εξακριβώστε ότι ο X είναι η παράπλευρη επιφάνεια ενός κυλίνδρου.)

Το «καθήκον» μας τώρα είναι να αποδείξουμε το θεώρημα του Tychonoff στην γενική μορφή του. Η απόδειξη αυτή χρησιμοποιεί το Λήμμα του Zorn . Έτσι θα υπενθυμίσουμε πρώτα τους σχετικούς ορισμούς που αφορούν μερικές διατάξεις και θα διατυπώσουμε το Λήμμα του Zorn.

Μια μερική διάταξη επί ενός συνόλου S είναι μια διμελής σχέση $\le$, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες :

(ι) $x \le x$ για κάθε $x \in S$ (αυτοπαθής)

(ιι) $x \le y$ και $y \le x \Rightarrow x = y$ για κάθε x, y (αντισυμμετρική)

(ιιι) $x \le y$ και $y \le z \Rightarrow x \le z$ για κάθε $x, y, z \in S$ (μεταβατική)

Το σύνολο S εφοδιασμένο με την μερική διάταξη $\le$ ονομάζεται ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και συμβολίζεται με $(S, \le)$. Αν $x \le y$ και $x \ne y$, τότε γράφουμε $x < y$.

Ένα υποσύνολο C του S ονομάζεται <u>αλυσίδα</u>, αν τα στοιχεία του είναι ανά δύο συγκρίσιμα ως προς την σχέση $\leq$. (Για κάθε $x, y \in C$ έπεται ότι, είτε $x \leq y$ ή $y \leq x$.)

Έστω $\mathrm{A} \subseteq S$ και $a \in S$. Το a ονομάζεται ένα <u>άνω φράγμα</u> του A αν ισχύει, $x \leq a$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$. (Αντίστοιχα ορίζεται και το κάτω φράγμα.)

Ένα στοιχείο m του S ονομάζεται <u>μεγιστικό</u> (maximal) αν ισχύει ότι, $x \in S$ και $m \leq x$ τότε $m = x$. (Αντίστοιχα ορίζεται και ένα ελαχιστικό στοιχείο του S .)

<u>Λήμμα του Zorn</u> 3.22. Έστω μη κενό $(S,\leq)$ μερικά διατεταγμένο σύνολο. Αν κάθε αλυσίδα του S έχει άνω φράγμα, τότε το S έχει ένα μεγιστικό στοιχείο.

Σημειώνουμε ότι το λήμμα του Zorn είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα της επιλογής (Προτ. 2.2).

…………………………………………

Η απόδειξη του θεωρήματος του Tychonoff για ένα άπειρο γινόμενο συμπαγών χώρων δεν χρησιμοποιεί ανοικτές καλύψεις (όπως στο θεώρημα 3.17), αλλά την ισοδύναμη διατύπωση της συμπάγειας με κλειστά σύνολα (θεώρημα 3.6).

Κρίσιμο για την απόδειξη του θεωρήματος του Tychonoff είναι το ακόλουθο λήμμα, το οποίο έχει και γενικότερο ενδιαφέρον.

<u>Λήμμα</u> 3.23. Έστω X ένα σύνολο και F μια οικογένεια υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Τότε υπάρχει μια <u>μεγιστική</u> οικογένεια F_0 υποσυνόλων του X η οποία περιέχει την F και έχει την ι.π.τ. (Δηλαδή, αν F_1 έχει την ι.π.τ. και $F_0 \subseteq F_1$ τότε $F_0 = F_1$.)

<u>Απόδειξη.</u> Έστω a το σύνολο όλων των οικογενειών υποσυνόλων του X οι οποίες περιέχουν την F και έχουν την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (ι.π.τ.). Προφανώς $F \in a$ και άρα $a \neq \varnothing$. Θεωρούμε μια μερική διάταξη στο a ως εξής: Αν F_1 και F_2 ανήκουν στο a τότε θέτομε $F_1 \leq F_2$ αν $F_1 \subseteq F_2$. Έστω C μια αλυσίδα στο a . Θα αποδείξουμε ότι η C έχει ένα άνω φράγμα. Ισχυριζόμαστε ότι η οικογένεια $F(C) = \bigcup\{F' : F' \in C\}$ είναι ένα άνω φράγμα για την C. Προφανώς, $F' \subseteq F(C)$ για κάθε $F' \in C$ έτσι απομένει να αποδείξουμε ότι η $F(C)$ έχει την ι.π.τ.

Έστω $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n \in F(C)$. Τότε κάθε A_k ανήκει σε κάποιο μέλος F_k της C. Επειδή η C είναι μια αλυσίδα μια από τις οικογένειες $F_1,\dots,F_n$, έστω η F_{k_0} περιέχει όλες τις άλλες.

Επομένως τα σύνολα $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n$ ανήκουν στην F_{k_0} η οποία όμως έχει την ι.π.τ., κατά συνέπεια $\mathrm{A}_1 \bigcap \mathrm{A}_2 \bigcap \dots \bigcap \mathrm{A}_n \neq \varnothing$. Έτσι αποδείξαμε ότι η $F(C)$ έχει την ι.π.τ. και είναι επομένως ένα άνω φράγμα της C στο μερικά διατεταγμένο σύνολο a. Από το Λήμμα του Zorn έπεται ότι η a έχει ένα μεγιστικό στοιχείο.

……………………………………

<u>Παρατήρηση</u> 3.24. Έστω X σύνολο και F οικογένεια υποσυνόλων του X η οποία είναι μεγιστική ως προς την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Τότε ισχύουν :

(α) Για κάθε $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n \in F$ έπεται ότι, $\mathrm{A}_1 \bigcap \dots \bigcap \mathrm{A}_n \in F$, δηλαδή η F είναι κλειστή για τις πεπερασμένες τομές.

(β) Έστω A τυχόν υποσύνολο του X για το οποίο ισχύει, $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} \neq \varnothing$ για κάθε $\mathrm{B} \in F$, τότε $\mathrm{A} \in F$.

(γ) Αν $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$ και $\mathrm{A} \in F$, τότε $\mathrm{B} \in F$.

Πράγματι, αν $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n \in F$ τότε το σύνολο, $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \bigcap \dots \bigcap \mathrm{A}_n \neq \varnothing$ και η οικογένεια $F \bigcup \{\mathrm{A}\}$ έχει προφανώς την ι.π.τ.. Από την υπόθεσή μας έπεται ότι αναγκαία $\mathrm{A} \in F$. Έστω τώρα $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ ώστε $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B} \neq \varnothing$, για όλα τα $\mathrm{B} \in F$, τότε η οικογένεια $F \bigcup \{\mathrm{A}\}$ έχει την ι.π.τ. και άρα (όπως πριν) $\mathrm{A} \in F$. Έτσι αποδείξαμε τις (α) και (β). Η ιδιότητα (γ) έπεται αμέσως από την (β).

Καθώς μια οικογένεια F με την ι.π.τ. συγκροτείται προφανώς από μη κενά σύνολα έπεται από τις (α) και (γ) ότι η F είναι φίλτρο επί του συνόλου X. Μάλιστα επειδή είναι μεγιστική ως προς την ι.π.τ. , είναι ένα υπερφίλτρο επί του X. (Πρβλ. τον ορισμό 1.24 και την άσκηση 9 της παραγράφου 1.1 .) Έτσι το Λήμμα 3.23 έχει ως συνέπεια ότι κάθε φίλτρο F επί ενός (μη κενού) συνόλου X περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο F_0 επί του X. (Δηλαδή έχουμε την λύση της άσκησης 9 της παραγράφου 1.1 .)

Αποδεικνύουμε τώρα το θεώρημα του Tychonoff.

Θεώρημα 3.25. (Θεώρημα Tychonoff). Έστω $\{\mathrm{X}_i : i \in \mathrm{I}\}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε X_i είναι συμπαγής χώρος.

Απόδειξη. '' $\Leftarrow$'' Έστω F μια οικογένεια υποσυνόλων του X με την ι.π.τ. Θα αποδείξουμε ότι η τομή

$$\bigcap\left\{\overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in F\right\}$$

είναι μη κενή. Η συμπάγεια του X έπεται τότε από το θεώρημα 3.6 (πρβλ. και την παρατήρηση 3.7 (β)).

Από το λήμμα 3.23, υπάρχει μια μεγιστική οικογένεια F_0 υποσυνόλων του X, η οποία περιέχει την F και έχει την ι.π.τ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η τομή $\bigcap\left\{\overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in F_0\right\} \neq \varnothing$.

Έστω $a \in \mathrm{I}$ και $\pi_a : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_a$, η προβολή στην συντεταγμένη a. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\left\{\pi_a(\mathrm{A}) : \mathrm{A} \in F_0\right\}$$

υποσυνόλων του χώρου X_a. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι αυτή η οικογένεια έχει την ι.π.τ. Επειδή ο X_a είναι συμπαγής, μπορούμε για κάθε $a \in \mathrm{I}$ να επιλέξουμε ένα σημείο $x_a \in \mathrm{X}_a$ ώστε

$$x_a \in \bigcap\left\{\overline{\pi_a(\mathrm{A})} : \mathrm{A} \in F_0\right\}$$

Έστω x το σημείο $(x_a)_{a \in \mathrm{I}}$ του χώρου X. Θα αποδείξουμε ότι $x \in \overline{\mathrm{A}}$, για κάθε $\mathrm{A} \in F_0$ και τότε η απόδειξή μας θα έχει τελειώσει

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι αν $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = U_\beta \times \prod_{a \neq \beta} \mathrm{X}_a$ είναι ένα υποβασικό σύνολο (για την τοπολογία γινόμενο επί του X) το οποίο περιέχει το x, τότε το $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ τέμνει κάθε μέλος της F_0: Το σύνολο U_β είναι μια περιοχή του x_β στον X_β.

Έστω $\mathrm{A} \in F_0$, επειδή $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(\mathrm{A})}$, το U_β τέμνει το $\pi_\beta(\mathrm{A})$ σε κάποιο $\pi_\beta(y)$, όπου $y \in \mathrm{A}$. Αυτό σημαίνει ότι,. $y \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \bigcap \mathrm{A}$ Έπεται από την ιδιότητα (β) της παρατήρησης 3.25

ότι, κάθε υποβασικό σύνολο το οποίο περιέχει το x ανήκει στην F_0. Άρα από την ιδιότητα (α) της ίδιας παρατήρησης κάθε βασικό σύνολο το οποίο περιέχει το x ανήκει στην F_0. Επειδή η F_0 έχει την ι.π.τ., αυτό σημαίνει ότι κάθε βασικό σύνολο το οποίο περιέχει το σημείο x τέμνει κάθε μέλος της F_0, από αυτό έπεται ότι $x \in \overline{\mathrm{A}}$, για κάθε $\mathrm{A} \in F_0$.

" $\Rightarrow$ "Αν ο X είναι συμπαγής χώρος τότε, επειδή οι προβολές $\pi_\alpha : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_\alpha, \alpha \in \mathrm{I}$ είναι συνεχείς και επί απεικονίσεις, από την πρόταση 3.14 έχουμε το συμπέρασμα.

<u>Παραδείγματα</u> 3.26. 1) Αν $\Gamma \neq \varnothing$ σύνολο τότε οι χώροι $[0,1]^\Gamma, \{0,1\}^\Gamma$ είναι με την τοπολογία γινόμενο συμπαγείς (και όπως θα αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο και Hausdorff).

2) Ειδικότερα ο κύβος του Hilbert $[0,1]^N$ και το σύνολο Cantor $\{0,1\}^N$ είναι συμπαγείς μετρικοποιήσιμοι χώροι.

<u>Ιστορική σημείωση</u> 3.27 . Όπως ήδη αναφέραμε, ο ορισμός της συμπάγειας με ανοικτές καλύψεις είναι πιο φυσιολογικός (και ιστορικά ανιχνεύεται) στα πλαίσια της θεωρίας Μέτρου. Ο Borel στην Διδακτορική του διατριβή, μελετώντας ένα πρόβλημα σχετιζόμενο με αναλυτική συνέχιση απέδειξε το ακόλουθο αποτέλεσμα: Αν το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\mathrm{I}_n)$ των μηκών μιας ακολουθίας διαστημάτων $(\mathrm{I}_n), n \geq 1$, του R είναι γνήσια μικρότερο του μήκους $\lambda(\mathrm{I})$ ενός άλλου διαστήματος I, τότε υπάρχει $x \in \mathrm{I}$ που δεν ανήκει σε οποιοδήποτε από τα διαστήματα I_n. Το αποτέλεσμα αυτό ισοδυναμεί με το ότι, αν για τα διαστήματα I και $\mathrm{I}_n, n \geq 1$, ισχύει ότι, $\mathrm{I} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n$ τότε $\lambda(\mathrm{I}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\mathrm{I}_n)$. (Αυτό στην γλώσσα της θεωρίας μέτρου σημαίνει ότι το μήκος $\lambda(\mathrm{I})$ του I είναι μικρότερο είτε ίσο του εξωτερικού μέτρου Lebesgue, $\lambda^*(\mathrm{I})$ του I.) Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η απόδειξη του αποτελέσματος του Borel ανάγεται στην ειδική περίπτωση που το I είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του R ($\mathrm{I} = [a,b]$) και τα I_n, $n \geq 1$ ανοικτά και φραγμένα διαστήματα του R. Εν τέλει ο Borel ανακάλυψε αυτό που τώρα αποκαλούμε θεώρημα Heine- Borel (Κάθε κάλυψη

του διαστήματος $\mathrm{I}=[a,b], a<b\in R$ από ανοικτά διαστήματα ή γενικότερα ανοικτά υποσύνολα του R έχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη.). Ενωρίτερα ο Heine είχε αποδείξει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to R$ είναι ομοιόμορφα συνεχής,. Έτσι προήλθε και η ορολογία θεώρημα Heine- Borel για το θεώρημα κάλυψης, λόγω της στενής συνάφειας του θεωρήματος ομοιόμορφης συνέχειας και του θεωρήματος κάλυψης του Borel. Σημειώνουμε ότι ο Borel απέδειξε το αποτέλεσμα του (1893) για αριθμήσιμες καλύψεις, ο Lebesgue παρατήρησε ότι ισχύει για κάθε ανοικτή κάλυψη (1905) και κατόπιν ο Borel, ενσωματώνοντας την παρατήρηση του Lebesgue επεξέτεινε το αποτέλεσμα σε όλα τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα ενός ευκλειδείου χώρου.

Ασκήσεις

1)Αποδείξτε ότι η επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος χώρος (Πρβλ. παράδειγμα 1.35 (2) .)

2)Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής $1-1$ συνάρτηση από τον μοναδιαίο κύκλο S^1 του R^2 στο R. Επίσης αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση από τον S^1 επί του R.

3)Είναι το διάστημα $[0,1]$ του R συμπαγές σύνολο στις ακόλουθες τοπολογίες;

(α) Την τοπολογία τ των συναριθμήσιμων συνόλων

$$\tau=\{U\subseteq R: R\setminus U \text{ είναι το πολύ αριθμήσιμο}\}\cup\{\varnothing\}$$

(β) Την τοπολογία τ_S που έχει ως βάση τα ημιανοικτά διαστήματα $[a,b), a,b\in R, a<b$ του R (Πρβλ. το παράδειγμα 1.33 (2), δηλαδή την ευθεία Sorgenfrey.)

4) Αποδείξτε ότι κάθε καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένων τοπολογικών χώρων είναι συμπαγής χώρος. Συμπεράνατε ότι κάθε καρτεσιανό γινόμενο πεπερασμένων χώρων που ο καθένας έχει την διακριτή τοπολογία είναι συμπαγής χώρος.

5)Έστω X τοπολογικός χώρος Hausdorff. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι κλειστό.

(β) Κάθε πεπερασμένη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του X είναι συμπαγές σύνολο.

(γ) Αν K και Ω είναι ξένα συμπαγή υποσύνολα του X τότε υπάρχουν U και V ανοικτά ξένα υποσύνολα του X ώστε $\mathrm{K} \subseteq U$ και $\Omega \subseteq V$.

6)Έστω X και Y τ.χ. με τον Y συμπαγή, και $x_0 \in \mathrm{X}$. Αποδείξτε ότι αν V είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ ώστε $\{x_0\} \times \mathrm{Y} \subseteq V$, τότε υπάρχει ανοικτή περιοχή W του x_0 στον X ώστε $W \times \mathrm{Y} \subseteq V$.

7)Έστω X ένας τ.χ. και F οικογένεια υποσυνόλων του X η οποία είναι μεγιστική ως προς την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής.

Αποδείξτε ότι :

(α) $x \in \overline{\mathrm{A}}$ για κάθε $\mathrm{A} \in F$ $\Leftrightarrow$ κάθε περιοχή του x ανήκει στην F.

(β) Αν $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ και $\mathrm{A} \in F$ $\Rightarrow \mathrm{B} \in F$

(γ) Αν ο X είναι Hausdorff, τότε η τομή $\bigcap \left\{ \overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in F \right\}$ περιέχει το πολύ ένα σημείο. Αν επί πλέον ο X είναι συμπαγής τότε αυτή η τομή έχει ακριβώς ένα σημείο.

8)Έστω X, Y τ.χ., χώροι Hausdorff, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ συνεχής συνάρτηση και $(F_n), n \geq 1$, φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$

.

9) Έστω X τ.χ., (x_n) ακολουθία στον X και $x_0 \in \mathrm{X}$. Λέμε ότι το x_0 είναι οριακό σημείο (ο.σ.) της (x_n) αν για κάθε περιοχή U του x_0 και για κάθε $n \in N$ υπάρχει $m \geq n : x_m \in U$.

Έστω X συμπαγής χώρος. Αποδείξτε ότι:

(α) Κάθε ακολουθία $(x_n) \subseteq \mathrm{X}$ έχει ένα τουλάχιστον ο.σ. και

(β) αν επιπλέον ο X είναι 1ος αριθμήσιμος, τότε η (x_n) έχει υπακολουθία συγκλίνουσα μέσα στον X.

10) Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται <u>ακολουθιακά συμπαγής</u> αν κάθε ακολουθία στον X έχει υπακολουθία συγκλίνουσα σε σημείο του X. Παραδείγματα ακολουθιακά συμπαγών χώρων είναι οι συμπαγείς μετρικοί χώροι (πρβλ. άσκηση 9).

Θα περιγράψουμε ένα παράδειγμα ακολουθιακά συμπαγούς χώρου που δεν είναι συμπαγής και ένα παράδειγμα συμπαγούς χώρου που δεν είναι ακολουθιακά συμπαγής .

(α) Έστω Γ άπειρο σύνολο. Αποδείξτε ότι ο χώρος $\mathrm{X} = \Sigma\left([0,1]^{\Gamma}\right)$ όλων των συναρτήσεων $f : \Gamma \to [0,1]$ με αριθμήσιμο φορέα (δηλαδή το σύνολο $\sigma(f) = \{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο) είναι, με την τοπολογία γινόμενο, ακολουθιακά συμπαγής και πυκνός υπόχωρος του συμπαγούς χώρου $[0,1]^{\Gamma}$. Συμπεράνατε ότι αν το Γ είναι υπεραριθμήσιμο τότε ο X δεν είναι συμπαγής.

(β) Έστω $\pi_n : [0,1]^N \to [0,1], n \geq 1$, η ακολουθία των προβολών

($\pi_n(x) = x(n), x \in [0,1]^N, n \in N$). Αποδείξτε ότι η (π_n) δεν έχει υπακολουθία η οποία να είναι κατά σημείο συγκλίνουσα επί του $[0,1]^N$. Συμπεράνατε ότι ο συμπαγής χώρος $[0,1]^{\Gamma}$, όπου $\Gamma = [0,1]^N$, δεν είναι ακολουθιακά συμπαγής.

[<u>Υπόδειξη</u>. Για το (α): Έστω $(f_n) \subseteq \mathrm{X}$, τότε το $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(f_n)$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του Γ και $\{f_n : n \in N\} \subseteq [0,1]^{\Delta} \times \prod_{\gamma \in \Gamma - \Delta} \{0\}_{\gamma}$. Για το (β) : Έστω (π_{n_k}) τυχούσα υπακολουθία της (π_n). Θέτουμε $\mathrm{M} = \{n_{2\lambda} : \lambda \geq 1\}$ και $x = x_{\mathrm{M}}$ (= η χαρακτηριστική συνάρτηση του M)

Αποδείξτε ότι η ακολουθία πραγματικών $\left(\pi_{n_k}(x)\right)$ δεν είναι συγκλίνουσα. Έπεται ότι η (π_n) δεν έχει κατά σημείο συγκλίνουσα ακολουθία επί του $\Gamma = [0,1]^N$ και επειδή $(\pi_n) \subseteq [0,1]^\Gamma$ ο χώρος $[0,1]^\Gamma$ δεν είναι ακολουθιακά συμπαγής .

(Σημειώνουμε ότι η κλειστότητα Υ του $\{\pi_n : n \in N\}$ στον $[0,1]^\Gamma$ είναι ένας συμπαγής στον οποίο κάθε μη τετριμμένη ακολουθία δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, πρβλ. την παράγραφο 5.3 του [F-H-H-M-Z].)]

11) Έστω Γ άπειρο σύνολο και p ένα σημείο το οποίο δεν ανήκει στο Γ. Θέτουμε $\tilde{\Gamma} = \Gamma \bigcup \{p\}$ και $\tau = P(\Gamma) \bigcup \left\{ U \subseteq \tilde{\Gamma} : p \in U \text{ και } \tilde{\Gamma} \backslash U \text{ πεπερασμένο υποσύνολο του } \Gamma \right\}$.

Αποδείξτε ότι: (α) Η τ είναι μια τοπολογία στο $\tilde{\Gamma}$ ώστε ο $\left(\tilde{\Gamma}, \tau\right)$ είναι συμπαγής και Hausdorff.

(β) Ο $\left(\tilde{\Gamma}, \tau\right)$ είναι ακολουθιακά συμπαγής χώρος.

(γ) Ο $\left(\tilde{\Gamma}, \tau\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν το σύνολο Γ είναι αριθμήσιμο.