2.2 Μετρικοποιησιμότητα γινομένου μετρικών χώρων.

Θα ασχοληθούμε στην συνέχεια με την μετρικοποιησιμότητα ενός καρτεσιανού γινομένου μετρικών χώρων. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τ.χ. (X,τ) λέγεται μετρικοποιήσιμος, αν υπάρχει μετρική d στον X ώστε $\tau=\tau_d$. Όπως θα διαπιστώσουμε ένα γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ μετρικών χώρων, με $|X_i|\geq 2$ για κάθε $i\in I$, μετρικοποιείται αν (και μόνο αν) το I είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο.

Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση ενός πεπερασμένου γινομένου μετρικών χώρων.

Πρόταση 2.14. Έστω $(X_1,d_1),....,(X_n,d_n)$, πεπερασμένη ακολουθία μετρικών χώρων. Τότε το γινόμενο $X=X_1\times...\times X_n$ $(=\prod_{k=1}^{n} X_k)$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος.

Απόδειξη Θέτομε $d(x,y)=d_1(x_1,y_1)+...+d_n(x_n,y_n)$, όπου $x=(x_1,...,x_n)$ και $y=(y_1,...,y_n)$ στοιχεία του X. Είναι απλό να εξακριβώσουμε ότι η d είναι μια μετρική στο X.

Θα αποδείξουμε ότι η τοπολογία τ_d συμπίπτει με την τοπολογία γινόμενο τ.

Παρατηρούμε ότι στην πεπερασμένη περίπτωση τα βασικά σύνολα της τοπολογίας γινόμενο είναι της μορφής $V_1\times...\times V_n$, όπου $V_k\subseteq X_k, 1\leq k\leq n$, ανοικτό σύνολο.

Έστω $U=V_1\times V_2\times...\times V_n$ βασικό ως προς την τοπολογία γινόμενο. Αν $x=(x_1,...,x_n)\in U$, τότε $x_k\in V_k,\ 1\leq k\leq n$ και αφού V_k ανοικτό στο χώρο X_k έπεται ότι υπάρχουν $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n>0$, ώστε $B_k(x_k,\varepsilon_k)\subseteq V_k,\ k=1,2,...n$. Θέτομε $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n\}$ και παρατηρούμε ότι $B_d(x,\in)\subseteq U$. Πράγματι αν

$$y\in B_d(x,\in)\Rightarrow d(x,y)<\varepsilon\Rightarrow d_k(x_k,y_k)<\varepsilon\leq\varepsilon_k, \qquad k=1,2,...,n$$

$$\Rightarrow y_k\in B_k(x_k,\varepsilon_k), k=1,2,...,n\Rightarrow y\in U.$$

Έστω $U \subseteq X = X_1 \times ... \times X_n$ ανοικτό ως προς την μετρική d και $x \in U$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0 : B_d(x,\varepsilon) \subseteq U$. Θέτομε, $\varepsilon_k = \dfrac{\varepsilon}{n}, k = 1,...,n$ και παρατηρούμε ότι αν $x = (x_1,...,x_n)$, τότε $x \in B_1(x_1,\varepsilon_1) \times ... \times B_n(x_n,\varepsilon_n) \subseteq B_d(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Από το κριτήριο του Hausdorff (πρόταση 1.27) έπεται ότι $\tau = \tau_d$.

Ακολουθεί το γενικότερο αποτέλεσμα για το γινόμενο ενός αριθμήσιμου πλήθους μετρικών χώρων.

<u>Λήμμα </u>2.15 . Έστω (X,d) μετρικός χώρος . Ορίζουμε $\overline{d} : X \times X \to [0,+\infty)$ με την εξίσωση

$$\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y),1\}.$$

Τότε η $\overline{d}$ είναι μια μετρική στον X η οποία επάγει την τοπολογία τ_d του X .

(Δηλαδή η $\overline{d}$ είναι ισοδύναμη με την d .)

<u>Απόδειξη.</u> Οι δύο πρώτες συνθήκες για μια μετρική προφανώς ικανοποιούνται. Έτσι αποδεικνύουμε την τριγωνική ανισότητα

$$(1) \qquad \overline{d}(x,z) \le \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z)$$

Αν είτε $d(x,y) \ge 1$ ή $d(y,z) \ge 1$, τότε η δεξιά πλευρά της (1) είναι τουλάχιστον 1, επειδή η αριστερά είναι (εξ ορισμού) το πολύ 1, η ανισότητα ισχύει.

Υποθέτουμε τώρα ότι $d(x,y) < 1$ και $d(y,z) < 1$. Τότε έχουμε

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) = \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z)$$

Επειδή $\overline{d}(x,z) \le d(x,z)$ από τον ορισμό της $\overline{d}$, η τριγωνική ανισότητα ισχύει για την $\overline{d}$.

Το γεγονός ότι οι d και $\overline{d}$ επάγουν την ίδια τοπολογία έπεται από τις σχέσεις (πρβλ. και την παρατήρηση 1.28)

$$B_d\left(x,\varepsilon\right)\subseteq B_{\overline{d}}\left(x,\varepsilon\right)$$

$$B_{\overline{d}}\left(x,\delta\right)\subseteq B_d\left(x,\varepsilon\right)$$

όπου $\delta=\min\left\{\varepsilon,1\right\}$. (Ακόμη παρατηρούμε ότι : Αν $0<\varepsilon\leq 1$ και $x\in X$ τότε, $d\left(x,y\right)<\varepsilon\Leftrightarrow\overline{d}\left(x,y\right)<\varepsilon$. Άρα $B_d\left(x,\varepsilon\right)=B_{\overline{d}}\left(x,\varepsilon\right)$.)

Θεώρημα 2.16 Έστω $\left(X_1,d_1\right),\ldots,\left(X_n,d_n\right),\ldots$ ακολουθία μετρικών χώρων. Τότε το γινόμενο, $X=X_1\times X_2\times\ldots\left(=\prod_{K=1}^{\infty}X_k\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος.

Απόδειξη. Το Λήμμα 2.15 επιτρέπει να υποθέσουμε, εν ανάγκη αντικαθιστώντας κάποιες από τις μετρικές d_k με $\overline{d_k}$, ότι $d_k\left(x,y\right)\leq 1$ για κάθε $k\in N$ και για κάθε $x,y\in X_k$.

Θέτουμε
$$d\left(x,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n\left(x_n,y_n\right)}{2^n}$$

Όπου $x=\left(x_1,\ldots,x_n,\ldots\right),y=\left(y_1,\ldots,y_n,\ldots\right)\in X$.

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα (εφόσον $\frac{d_n\left(x_n,y_n\right)}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}$) και είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η d είναι μετρική επί του X.

Θα αποδείξουμε ότι η τ_d ισούται με την τοπολογία γινόμενο τ. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε όπως και στην πρόταση 2.14 το κριτήριο Hausdorff.

(I) $\tau\subseteq\tau_d$: Έστω $x\in X, x=\left(x_1,\ldots,x_k,\ldots\right)$ και $U=B_1\left(x_1,\varepsilon_1\right)\times\ldots\times B_n\left(x_n,y_n\right)\times\prod_{k=n+1}^{\infty}X_k$ βασική περιοχή του x. Θέτουμε $\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon_1}{2^n},\ldots,\frac{\varepsilon_n}{2^n}\right\}$ και αποδεικνύουμε ότι $B_d\left(x,\varepsilon\right)\subseteq U$.

Πράγματι, έστω $y \in B_d(x,\varepsilon) \Rightarrow d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_k(x_k, y_k) < \varepsilon$ όπου $y = (y_1, ..., y_k, ...)$.

Έστω $1 \le \lambda \le n$. Τότε ισχύει $\frac{d_\lambda(x_\lambda, y_\lambda)}{2^\lambda} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_k(x_k, y_k) < \varepsilon = \frac{1}{2^n} \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$

$$\Rightarrow \frac{d_\lambda(x_\lambda, y_\lambda)}{2^\lambda} < \varepsilon \le \frac{\varepsilon_\lambda}{2^n} \le \frac{\varepsilon_\lambda}{2^\lambda} \Rightarrow d_\lambda(x_\lambda, y_\lambda) < \varepsilon_\lambda$$

Κατά συνέπεια $y_\lambda \in B_\lambda(x_\lambda, \varepsilon_\lambda)$, για κάθε $\lambda = 1, 2, ..., n$ και έτσι $y \in U$.

(ΙΙ) $\tau_d \subseteq \tau$: Έστω $x \in X, x = (x_1, ..., x_k, ...)$ και $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε ένα βασικό ανοικτό U στην τοπολογία γινόμενο ώστε $x \in U \subseteq B_d(x, \varepsilon)$.

Έστω $n_0 \in N$ ώστε $\frac{1}{2^{n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Θέτομε $\varepsilon_\kappa = \frac{\varepsilon}{2}, k = 1, 2, ..., n_0$ και $U = B_1(x_1, \varepsilon_1) \times ... \times B_{n_0}(x_{n_0}, \varepsilon_{n_0}) \times \prod_{k=n_0+1}^{\infty} X_k$ και $x \in U$. Θα αποδείξουμε ότι $U \subseteq B_d(x, \varepsilon)$.

Πράγματι, αν $y = (y_1, ..., y_k, ...) \in U$ τότε έχουμε, $d_k(x_k, y_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ για $k \le n_0$ και $d_k(x_k, y_k) \le 1$ για $k > n_0$, επομένως

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_k(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{2^k} d_k(x_k, y_k) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d_k(x_k, y_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^{n_0}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow y \in B_d(x, \in).$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

<u>Πρόταση </u>2.17. Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια <u>μη</u> τετριμμένων τοπολογικών χώρων. Αν το I είναι υπεραριθμήσιμο, τότε ο χώρος $X = \prod_{i \in I} X_i$ <u>δεν</u> είναι μετρικοποιήσιμος.

<u>Απόδειξη</u> Υπενθυμίζουμε ότι η τετριμμένη τοπολογία επί ενός συνόλου Y είναι αυτή που έχει ως μόνα στοιχεία το Y και το $\varnothing$ (πρβλ. παράδειγμα 1.2 (3)). Έτσι, από την υπόθεσή μας, έχουμε ότι για κάθε $i \in I$ υπάρχει U_i ανοικτό στον χώρο X_i ώστε $\varnothing \neq U_i \subset X_i$. Έστω $x = (x_i) \in \prod_{i \in I} U_i$, τότε $x \in \pi_i^{-1}(U_i)$ για κάθε $i \in I$ και βέβαια κάθε $\pi_i^{-1}(U_i)$ είναι ανοικτό στην τοπολογία γινόμενο. Υποθέτουμε τώρα, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο X είναι μετρικοποιήσιμος και έστω d μια μετρική η οποία επάγει την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}$ του X. Επειδή η ακολουθία συνόλων $B_d\left(x, \frac{1}{n}\right), n \geq 1$, είναι βάση περιοχών του x στον τ.χ. X μπορούμε να επιλέξουμε για κάθε $i \in I$ ένα n_i έτσι ώστε $x \in B_d\left(x, \frac{1}{n_i}\right) \subseteq \pi_i^{-1}(U_i)$.

Έτσι ορίζεται μια απεικόνιση $\varphi : I \to N : \varphi(i) = n_i$. Έπεται ότι $I = \varphi^{-1}(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(\{n\})$. Όμως το I είναι υπεραριθμήσιμο άρα υπάρχει $n_0 \in N$, ώστε το $\varphi^{-1}(n_0)$ να είναι υπεραριθμήσιμο. Θέτουμε $F = \varphi^{-1}(n_0)$, επομένως για κάθε $i \in F$ έχουμε $\varphi(i) = n_0$ και $B_d\left(x, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq \pi_i^{-1}(U_i)$.

Όμως η μετρική τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία γινόμενο $\mathcal{T}$, άρα υπάρχει βασικό ανοικτό V στην $\mathcal{T}$ ώστε

$$x \in V \subseteq B_d\left(x, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq \pi_i^{-1}(U_i) \text{ για κάθε } i \in F .$$

Κατά συνέπεια, $\pi_i(V) \subseteq \pi_i\left(\pi_i^{-1}(U_i)\right) = U_i$ για κάθε $i \in F$ και βέβαια $U_i \underset{\neq}{\subset} X_i$ για κάθε $i \in F$ (από την επιλογή των U_i). Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς (το V είναι βασικό ανοικτό στην τοπολογία γινόμενο και έτσι) η προβολή του $\pi_i(V)$ στον X_i, μπορεί να διαφέρει από τον X_i μόνο για ένα πεπερασμένο πλήθος δεικτών $i \in I$.

<u>Πόρισμα</u> 2.18. Έστω $(X_i, d_i), i \in I$, οικογένεια μετρικών χώρων ώστε $|X_i| \geq 2$ για κάθε $i \in I$. Αν το I είναι υπεραριθμήσιμο τότε ο χώρος $\prod_{i \in I} X_i$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

<u>Απόδειξη</u> Επειδή $|X_i| \geq 2$ για κάθε $i \in I$, η τοπολογία τ_{d_i} του μετρικού χώρου (X_i, d_i) δεν μπορεί να είναι η τετριμμένη τοπολογία (γιατί ;). Έτσι η προηγούμενη πρόταση μπορεί να εφαρμοσθεί.

<u>Ορισμός</u> 2.19 . Έστω X τ.χ. Θα λέμε ότι:

(α) Ο X είναι <u>$2^{ος}$ αριθμήσιμος</u> ή ότι ικανοποιεί το δεύτερο αξίωμα αριθμησιμότητας, αν έχει μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του.

(β)) Ο X είναι <u>$1^{ος}$ αριθμήσιμος</u> ή ότι ικανοποιεί το πρώτο αξίωμα αριθμησιμότητας , αν έχει σε κάθε σημείο του μια αριθμήσιμη βάση περιοχών.

(γ)) Ο X είναι <u>διαχωρίσιμος</u> αν περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D. Δηλαδή D αριθμήσιμο και $\overline{D} = X$.

Παρατηρούμε ότι αν ένας τ.χ. X είναι $2^{ος}$ αριθμήσιμος τότε όπως προκύπτει από την πρόταση 1.30 είναι και $1^{ος}$ αριθμήσιμος Επίσης ο X είναι διαχωρίσιμος. Πράγματι, αν $(U_n)_{n\geq 1}$ είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X και επιλέξουμε $x_n \in U_n$, τότε το σύνολο $D = \{x_n : n \in N\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του X . Προκειμένου για μετρικούς χώρους η διαχωρισιμότητα είναι ισοδύναμη με την $2^{η}$ αριθμησιμότητα (πρβλ., παράδειγμα 1.31 (2).)

<u>Παραδείγματα και παρατηρήσεις</u> 2.20

1)Οι ακόλουθοι τ.χ. είναι με την τοπολογία γινόμενο μετρικοποιήσιμοι (Συνέπεια του θεωρήματος 2.16): R^N , C^N , ο κύβος του Hilbert $[0,1]^N$ καθώς και το σύνολο Cantor $\{0,1\}^N$.

Ο R^N (και ο C^N) είναι επιπλέον διαχωρίσιμος, αφού το σύνολο D των ακολουθιών με ρητές συντεταγμένες που είναι τελικά μηδέν είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του R^N (ένα ανάλογο σύνολο είναι πυκνό στον C^N.) Ο κύβος του Hilbert και το σύνολο Cantor είναι διαχωρίσιμοι (με ένα ανάλογο επιχείρημα ή θεωρούμενοι) ως υπόχωροι του διαχωρίσιμου μετρικοποιήσιμου χώρου R^N.

Έπεται προφανώς ότι όλα τα παραπάνω παραδείγματα ικανοποιούν το 2^o αξίωμα της αριθμησιμότητας

2) Κάθε μετρικός χώρος $\left(X,d\right)$ ικανοποιεί το πρώτο αξίωμα αριθμησιμότητας , αφού αν $x\in X$ τότε η ακολουθία $B\left(x,\frac{1}{n}\right), n\geq 1$, είναι μία αριθμήσιμη βάση περιοχών του x.

Ο μετρικός χώρος $\left(X,d\right)$ δεν είναι κατ' ανάγκη 2^{ος} αριθμήσιμος . Πράγματι , αν το X είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο και d = η διακριτή μετρική στον X , τότε ο $\left(X,d\right)$ δεν έχει αριθμήσιμη βάση (γιατί;).

3) Ο χώρος R_S, (= η ευθεία Sorgenfrey) είναι διαχωρίσιμος (π.χ. $\overline{Q}=R$ και στην τοπολογία αυτή), αλλά όπως έχουμε ήδη αποδείξει (πρβλ. παράδειγμα 1.33 (2)) ο R_S δεν είναι 2^{ος} αριθμήσιμος. Ο R_S είναι βέβαια πρώτος αριθμήσιμος, αφού αν $a\in R$ τότε τα διαστήματα $\left[a,q\right)$ με $q\in Q$ και $a<q$ είναι μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του a.

4)Έστω $\left\{X_i : i\in I\right\}$, οικογένεια μη τετριμμένων τοπολογικών χώρων και $X=\prod_{i\in I} X_i$. Αν I υπεραριθμήσιμο τότε από την μέθοδο απόδειξης της πρότασης 2.17 (πρβλ. και το πόρισμα 2.18), προκύπτει ότι ο X δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος. Έπεται ιδιαίτερα ότι αν Γ υπεραριθμήσιμο σύνολο τότε ο R^Γ, με την τοπολογία γινόμενο , δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος, μάλιστα ο R^Γ δεν έχει σε κανένα σημείο του αριθμήσιμη βάση περιοχών. Έπεται ιδιαίτερα ότι ο R^Γ δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Σημειώνουμε ότι αν $\left|\Gamma\right|\leq\left|R\right|$ ο R^Γ είναι διαχωρίσιμος (πρβλ. $\left[E\right], Th.2.3.15$).

5)Ο χώρος R^N με την box τοπολογία δεν είναι 1ος αριθμήσιμος και άρα δεν είναι μετρικοποιήσιμος (πρβλ. τις ασκήσεις).

6)Έστω $(X_1,d_1),...,(X_n,d_n)$ πεπερασμένη ακολουθία μετρικών χώρων. Όπως διαπιστώσαμε, με την πρόταση 2.14 η τοπολογία γινόμενο τ του $X=\prod_{k=1}^{n} X_k$, μετρικοποιείται με την μετρική $d=d_1(x_1,y_1)+...+d_n(x_n,y_n)$, όπου $x=(x_1,...,x_n)$ και $y=(y_1,...,y_n)$ στοιχεία του X. Σημειώνουμε ότι και οι ακόλουθες μετρικές μετρικοποιούν την τ και είναι συνεπώς ισοδύναμες μετρικές με την d:

(α) $\sigma_\infty(x,y)=\max\left(d_1(x_1,y_1),...,d_n(x_n,y_n)\right)$

(β) $\sigma_p(x,y)=\left(\left(d_1(x_1,y_1)\right)^p+...+\left(d_n(x_n,y_n)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1\le p<+\infty$

(Η σ_1 είναι η μετρική d που μετρικοποιεί την τ .)

Το γεγονός ότι η σ_∞ είναι μετρική είναι απλό να αποδειχθεί. Όσον αφορά τις μετρικές σ_p με $1<p<+\infty$, η τριγωνική ιδιότητα έπεται με χρήση της ανισότητας Minkowski. Η ισοδυναμία των μετρικών σ_p, $1<p\le+\infty$ με την $d=\sigma_1$ μπορεί να αποδειχθεί και με χρήση ακολουθιών ως εξής:

Έστω $x_k=\left(x_1^k,...,x_n^k\right)$, $k\ge1$ ακολουθία στον X και $x=(x_1,...,x_n)\in X$ τότε, $x_k\xrightarrow[k\to\infty]{\sigma_p}x \Leftrightarrow x_n^k\xrightarrow[k\to\infty]{}x^k$ για κάθε $k=1,2,...,n \Leftrightarrow x_k\xrightarrow{\tau}x$.

Έπεται ιδιαίτερα ότι η τοπολογία γινόμενο του χώρου R^N (ή του C^n) συμπίπτει με την Ευκλείδεια τοπολογία δηλαδή την επαγόμενη από την μετρική σ_2

(Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες και πρβλ. την άσκηση 6) .)

Ασκήσεις

1)Έστω $\{X_i : i \in I\}$ οικογένεια τ.χ. και για κάθε $i \in I$, $A_i \subseteq X_i$. Θέτουμε $X = \prod_{i \in I} X_i$.

Αποδείξτε ότι:

(α)
$$\prod_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i \in I} A_i}$$

(β) Αν κάθε A_i είναι κλειστό στον X_i τότε το $\prod_{i \in I} A_i$ είναι κλειστό στον X.

(γ) Αν I άπειρο, κάθε X_i έχει την διακριτή τοπολογία και τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε ο χώρος X δεν έχει την διακριτή τοπολογία.

(δ) Αν $x^0 = (x_i^0)$ είναι στοιχείο του X και $D = \{x = (x_i) : x \text{ και } x^0 \text{ διαφέρουν σε ένα το πολύ πεπερασμένο σύνολο δεικτών}\}$ τότε το D είναι πυκνό υποσύνολο του X

(ε) Το $\prod_{i \in I} A_i$ είναι πυκνό υποσύνολο του $X \Leftrightarrow$ κάθε A_i είναι πυκνό στον X_i.

2)Έστω X τ.χ. και Y υπόχωρος του X. Αποδείξτε ότι αν ο X είναι 1ος αριθμήσιμος (αντίστοιχα 2ος αριθμήσιμος) τότε ο Y είναι 1ος αριθμήσιμος (αντίστοιχα 2ος αριθμήσιμος).

3)Έστω $(X_n), n \geq 1$, ακολουθία τ.χ. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν για κάθε $n \geq 1$ ο X_n είναι 1ος αριθμήσιμος τότε ο $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι 1ος αριθμήσιμος.

(β) Αν για κάθε $n \geq 1$ ο X_n είναι 2ος αριθμήσιμος τότε ο $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι 2ος αριθμήσιμος.

4)Έστω X 1ος αριθμήσιμος χώρος και Y τ.χ. Αποδείξτε ότι :

(α) Αν $A \subseteq X$ και $a \in X$ τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq A : x_n \to a$

(β) Αν $f : X \to Y$ και $a \in X$, τότε η f είναι συνεχής στο $a \Leftrightarrow$ για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $x_n \to a$ στον $X \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

5) Αποδείξτε ότι: (α) Ο χώρος R^N με την box τοπολογία $\mathcal{T}$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος και άρα δεν είναι μετρικοποιήσιμος

(β) Η απεικόνιση $f : R \to R^N : f(t) = (t, t, ..., t, ...)$ δεν είναι συνεχής όταν ο R^N έχει την $\mathcal{T}$.

[Υπόδειξη Για το (α): Έστω $A = \{(x_k) \in R^N : x_k > 0 \text{ για κάθε } k \in N\}$. Τότε το 0 του R^N ανήκει στην $\overline{A}$, αλλά δεν υπάρχει ακολουθία $(a_n) \subseteq A : a_n \xrightarrow{\tau} 0$. Πράγματι, αν $a_n = (x_{kn}), n \geq 1$ και $U = (-x_{11}, x_{11}) \times (-x_{22}, x_{22}) \times ...$, τότε το U είναι βασικό ανοικτό στην τ, $0 \in U$ αλλά $a_n \notin U$ για κάθε $n \geq 1$.

Για το (β) : Αν $V = (-1,1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times ... \times \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \times ...$ τότε το $f^{-1}(V)$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του R .]

6) Στον R^n ορίζουμε $\|x\|_p = \left(|x_1|^p + ... + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < +\infty$ και $\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|, ..., |x_n|\right)$, όπου $x = (x_1, ..., x_n)$. Αποδείξτε ότι:

(α) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\|_\infty$, $x \in R^n, 1 \leq p < +\infty$.

(β) $B_p(x, \varepsilon) \subseteq B_\infty(x, \varepsilon)$ και $B_\infty\left(x, \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{p}}}\right) \subseteq B_\infty(x, \varepsilon), x \in R^n, 1 \leq p < +\infty$ και $\varepsilon > 0$.

(γ) Συμπεράνατε ότι οι μετρικές που ορίζουν οι νόρμες $\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq +\infty$ (είναι μεταξύ τους ισοδύναμες και) επάγουν την τοπολογία γινόμενο στον R^n .

7) Αν $\{d_i : i \in I\}$ είναι οικογένεια μετρικών στο σύνολο X και $\sup\{d_i(x,y) : i \in I\} < +\infty$ για κάθε $(x,y) \in X \times X$ τότε η $d(x,y) = \sup\{d_i(x,y) : i \in I\}$, $(x,y) \in X \times X$ είναι μια μετρική στο X.

8) Έστω $\Gamma \neq \varnothing$ σύνολο. Στον διανυσματικό χώρο R^Γ ορίζουμε εκείνη την τοπολογία τ_u που έχει ως βάση B τα σύνολα της μορφής

$$V_{f,\varepsilon} = \left\{ g \in R^\Gamma : \sup_{\gamma \in \Gamma} \left| f(\gamma) - g(\gamma) \right| < \varepsilon \right\},\ f \in R^\Gamma, \varepsilon > 0.$$

Η τ_u ονομάζεται τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης .

Αποδείξτε ότι :

(α) Η B είναι πράγματι μια βάση για την τ_u

(β) Η σχετική τοπολογία που επάγει η τ_u στον διανυσματικό υπόχωρο $\ell_\infty(\Gamma)$ (των φραγμένων συναρτήσεων $f : \Gamma \to R$) του R^Γ συμπίπτει με την τοπολογία της $\sup - norm$ $\|\cdot\|_\infty$ του (χώρου Banach) $\ell_\infty(\Gamma)$, όπου $\|f\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |f(\Gamma)|$, $f \in \ell_\infty(\Gamma)$.

(γ) Η τοπολογία τ_u είναι μετρικοποιήσιμη και μία μετρική η οποία την επάγει είναι η ακόλουθη $d(f,g) = \sup\left\{ \min\left(1, \left| f(\gamma) - g(\gamma) \right| \right) : \gamma \in \Gamma \right\}$, $f, g \in R^\Gamma$..

Πότε μια ακολουθία $(f_n) \subseteq R^\Gamma$ συγκλίνει στην $f \in R^\Gamma$ ως προς την d ;

(δ) Αν $\tau =$ η τοπολογία γινόμενο στον R^Γ τότε $\tau \subseteq \tau_u$ και αν Γ άπειρο σύνολο τότε $\tau \underset{\neq}{\subset} \tau_u$.

[<u>Υπόδειξη</u> . Για τα (α) και (β) : $V_{f,\varepsilon} = f + B(0,\varepsilon)$, όπου $B(0,\varepsilon) = \left\{ g \in \ell_\infty(\Gamma) : \|g\|_\infty < \varepsilon \right\}$. Για το (γ) : Η $\rho(x,y) = \min(1, |x-y|)$, $x, y \in R$ είναι μια μετρική στο R ισοδύναμη με την συνήθη (πρβλ. Λήμμα 2.15). Αν $0<\varepsilon\leq 1$ και $f\in R^{\Gamma}$, τότε $B_d\left(f,\varepsilon\right)=V_{f,\varepsilon}$.]

9 (α) Συγκρίνετε τις ακόλουθες τοπολογίες στον R^N. Την *box* τοπολογία, την τοπολογία γινόμενο και την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης.

(β) Σε ποιες από τις παραπάνω τοπολογίες είναι οι ακόλουθες συναρτήσεις από το R στον R^N συνεχείς;

$f\left(t\right)=\left(t,2t,3t,...\right)$, $g\left(t\right)=\left(t,t,...,t,...\right)$ και $h\left(t\right)=\left(t,\frac{1}{2}t,\frac{1}{3}t,...\right)$.