1.3 Σχετική τοπολογία και υπόχωροι.

Ορισμός 1.37. Έστω (X,τ) τ.χ. Αν $Y \subseteq X$, τότε η οικογένεια

$$\tau|Y \underset{o\rho}{=} \{Y \cap U : U \in \tau\}$$

είναι μια τοπολογία στο σύνολο Y, η οποία ονομάζεται η σχετική (ή επαγόμενη) τοπολογία του Y. Ο χώρος $(Y,\tau|Y)$ ονομάζεται υπόχωρος του X.

Είναι εύκολο να εξακριβώσουμε ότι η $\tau|Y$ είναι τοπολογία. Αυτή περιέχει το $\varnothing$ και το Y επειδή

$$\varnothing = Y \cap \varnothing \text{ και } Y = Y \cap X .$$

Το γεγονός ότι είναι κλειστή για αυθαίρετες ενώσεις και πεπερασμένες τομές έπεται από τις ισότητες

$$\bigcup_{a\in J}(U_a \cap Y) = \left(\bigcup_{a\in J} U_a\right) \cap Y \text{ και}$$

$$(U_1 \cap Y) \cap .... \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap .... \cap U_n) \cap Y$$

Τα μέλη της $\tau|Y$ λέγονται ότι είναι ανοικτά ως προς Y η σχετικά ανοικτά ως προς Y.

Παραδείγματα 1.38. 1) Έστω $X = R$ με τη συνήθη τοπολογία και $Y = [0,1) \cup \{2\}$. Τα ακόλουθα σύνολα είναι ανοικτά ως προς Y:

(α) $\{2\}$

(β) όλα τα ανοικτά διαστήματα του R, που περιέχονται στο $[0,1)$,

(γ) όλα τα διαστήματα της μορφής $[0,a), 0 < a < 1$.

Τα σύνολα $[0,1)$ και $\{2\}$ είναι ανοικτά και συγχρόνως κλειστά ως προς Y. Παρατηρούμε ότι ένα ανοικτό (ή κλειστό) ως προς Y σύνολο δεν είναι απαραίτητα ανοικτό (ή κλειστό) στο χώρο R.

2) Στο σύνολο των πραγματικών R, επισυνάπτουμε δύο σημεία, $\{+\infty\},\{-\infty\}$ και θεωρούμε εκείνη την τοπολογία τ_e στο σύνολο $\overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$, η οποία έχει ως υποβάση τα σύνολα της μορφής:

$[-\infty,a) \underset{o\rho}{=} \{-\infty\} \cup \{x \in R : x < a\}$ και $(a,+\infty] \underset{o\rho}{=} \{+\infty\} \cup \{x \in R : x > a\}$ για $a \in R$. Ο τοπολογικός χώρος $(\overline{R},\tau_e)$ ονομάζεται η επεκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Είναι απλό να ελέγξουμε ότι η σχετική τοπολογία του R θεωρούμενου ως υποχώρου του $\left(\overline{R},\tau_e\right)$ ταυτίζεται με την συνήθη τοπολογία του R.

Σημείωση: Αν ορίσουμε $-\infty<x<+\infty$, για κάθε $x\in R$, τότε το $\overline{R}$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο και για κάθε $\varnothing\neq A\subseteq\overline{R}$ τα $\sup A$ και $\inf A$ πάντοτε υπάρχουν (και ενδέχεται να είναι ίσα με $\pm\infty$). Τα σύνολα (διαστήματα) $[-\infty,a)$ και $(a,+\infty]$ είναι περιοχές του $-\infty$ και $+\infty$ αντίστοιχα.

3) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $Y\subseteq X$. Τότε:

$$\tau_d|Y=\tau\left(d|Y\times Y\right)$$

Δηλαδή η σχετική τοπολογία του Y ταυτίζεται με την τοπολογία που επάγει στο Y ο περιορισμός της μετρικής από το $X\times X$ στο $Y\times Y$. Παρατηρούμε πρώτα ότι οι ανοικτές σφαίρες $B_Y(x,\varepsilon)$ του μετρικού χώρου $\left(Y,d|Y\times Y\right)$ είναι της μορφής $B_Y(x,\varepsilon)=Y\bigcap B(x,\varepsilon)$, όπου $x\in Y$ (γιατί;).

Η απόδειξη τώρα του ισχυρισμού είναι εύκολη . Έστω $V\in\tau_d|Y$ τότε $V=Y\bigcap U$ για κάποιο $U\in\tau$. Αν $x\in V$ τότε $x\in U$ και άρα υπάρχει $\varepsilon>0:B(x,\varepsilon)\subseteq U$ και έτσι $x\in Y\bigcap B(x,\varepsilon)\subseteq Y\bigcap V=V$ ή $x\in B_Y(x,\varepsilon)\subseteq V$. Έπεται ότι το V γράφεται ως ένωση ανοικτών σφαιρών του $\left(Y,d|Y\times Y\right)$ και άρα $V\in\tau\left(d|Y\times Y\right)$.
Αντίστροφα, αν $V\in\tau\left(d|Y\times Y\right)$ τότε για κάθε $x\in V$ υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B_Y(x,\varepsilon_x)\subseteq V$. Δηλαδή , $x\in V\Rightarrow Y\bigcap B(x,\varepsilon_x)\subseteq V$ και κατά συνέπεια $V=\left[\bigcup_{x\in V}B(x,\varepsilon_x)\right]\bigcap Y\in\tau_{d|Y}$.

4) Ο υπόχωρος ενός υποχώρου του τοπολογικού χώρου X είναι υπόχωρος του X. (η απόδειξη είναι απλή.)

Πρόταση 1.39. Έστω (X,τ) τ.χ. και $Y\subseteq X$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(α) $V\subseteq Y$ είναι ανοικτό ως προς Y αν και μόνο αν $V=U\bigcap Y$ για κάποιο για κάποιο $U\subseteq X$ ανοικτό.
(β) $A\subseteq Y$ είναι κλειστό ως προς Y αν και μόνο αν $A=F\bigcap Y$ για κάποιο $F\subseteq X$ κλειστό.
(γ) Αν $A\subseteq Y$ τότε $cl_YA=cl_XA\bigcap Y$, $A'_Y=A'\bigcap Y$, $Y\bigcap\operatorname{int}(A)\subseteq\operatorname{int}_Y(A)$ και $Bd_Y(A)\subseteq Y\bigcap Bd(A)$.
(δ) Αν $\{U_a:a\in J\}$ είναι μία βάση (αντίστοιχα υποβάση) για την τ, τότε η οικογένεια $\{Y\bigcap U_a:a\in J\}$ είναι μία βάση (αντιστοίχως υποβάση) για την $\tau|Y$.

Απόδειξη (α) Έπεται από τον ορισμό της σχετικής τοπολογίας (β) A κλειστό ως προς $Y \Leftrightarrow Y \setminus A$ ανοικτό ως προς $Y \Leftrightarrow Y \setminus A = U \bigcap Y$ για κάποιο $U \in \tau \Leftrightarrow A = Y \bigcap (X \setminus U)$ με $X \setminus U = F$ κλειστό στο X.

(γ) Λαμβάνοντας υπόψιν τον χαρακτηρισμό της κλειστότητας ενός συνόλου και το γεγονός ότι $A \subseteq Y$ έχουμε: $y \in cl_X A \bigcap Y \Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή U του y ισχύει $U \bigcap A \neq \varnothing \Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή U του y ισχύει $(U \bigcap Y) \bigcap A \neq \varnothing \Leftrightarrow y \in cl_Y A$

Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται ανάλογα (όπου με A'_Y συμβολίζουμε το παράγωγο σύνολο του A στον χώρο $(Y, \tau|Y)$) Οι άλλες δύο σχέσεις ελέγχονται εύκολα και έτσι αφήνονται ως άσκηση.

(δ) Ομοίως και ο ισχυρισμός αυτός είναι εύκολος και αφήνεται ως άσκηση.

Παρατηρήσεις 1.40. Έστω Y υπόχωρος του τ.χ. X.

1)Αν ο Y είναι ανοικτό υποσύνολο του X τότε $U \subseteq Y$ είναι ανοικτό ως προς $Y \Leftrightarrow U$ είναι ανοικτό στον X. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει αν ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του X. (Άσκηση.)

2)Αν $p \in Y$ τότε η $N_p^Y = \{U \bigcap Y : U \in N_p\}$ είναι το σύστημα των περιοχών του p στον χώρο Y. Επίσης αν B_p είναι μια βάση περιοχών του p στον χώρο X τότε η $B_p^Y = \{U \bigcap Y : U \in B_p\}$ είναι μια βάση περιοχών του p στον χώρο Y. (Άσκηση.)

Παραδείγματα 1.41. 1) Έστω X τ.χ., Y υπόχωρος του X και $A \subseteq Y$ τότε, $Y \bigcap \operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}_Y(A)$ (Πρόταση 1.39 (γ)). Εν γένει δεν ισχύει η ισότητα. Πράγματι έστω R^2 το Ευκλείδειο επίπεδο, $X = \{(x,0) : x \in R\}$ ο άξονας των x και $A = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$. Είναι τότε προφανές ότι $\operatorname{int}(A) = \varnothing$ και άρα $X \bigcap \operatorname{int}(A) = \varnothing$, ενώ $\operatorname{int}_X(A) = A \neq \varnothing$. Άρα η ισότητα δεν ισχύει γενικά.

2) Στο ευκλείδειο επίπεδο R^2 οι πραγματικοί αριθμοί ταυτίζονται με το υποσύνολο (γραμμικό υπόχωρο) $R \times \{0\}$ του R^2. Είναι τότε απλό να εξακριβώσουμε ότι η σχετική τοπολογία στο $R \times \{0\}$ συμπίπτει με την συνήθη τοπολογία του R. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες)

Ασκήσεις

1)Έστω (X, τ) τ.χ. ,(x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$. Διατυπώστε το «σωστό» ορισμό της σύγκλισης της (x_n) στο x.

[Υπόδειξη: $x_n \xrightarrow{\tau} x \Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $\nu_0 \in N : n \geq \nu_0 \Rightarrow x_n \in U$].

2) Έστω (X_1, τ_1), (X_2, τ_2) τ.χ. και B_1, B_2 βάσεις για τις τ_1 και τ_2 αντίστοιχα.

(α) Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\Sigma=\{X_1\times V : V\in B_2\}\bigcup\{U\times X_2 : U\in\tau_2\}$ είναι μια υποβάση και η $B=\{U_1\times U_2 : U_1\in\tau_1, U_2\in\tau_2\}$ μία βάση για την τοπολογία γινόμενο τ στον $X_1\times X_2$. Επίσης αποδείξτε ότι αν $(x_n,y_n), n\geq 1$ είναι μία ακολουθία στον $X_1\times X_2$ και $(x,y)\in X_1\times X_2$ τότε $(x_n,y_n)\xrightarrow{\tau}(x,y)\Leftrightarrow x_n\xrightarrow{\tau_1}x$ και $y_n\xrightarrow{\tau_2}y$.
(β) Έστω $(X_1,\tau_1),\ldots,(X_n,\tau_n)$ $(n\geq 2)$ μία πεπερασμένη ακολουθία τ.χ. Να ορίσετε την τοπολογία γινόμενο στο καρτεσιανό γινόμενο $X=X_1\times\ldots\times X_n$ και να αποδείξετε ένα αποτέλεσμα αντίστοιχο του (α).
(γ) Έστω $X_1=X_2=\ldots=X_n=R$, με την συνήθη τοπολογία. Αποδείξτε ότι η ευκλείδεια τοπολογία στον χώρο R^n συμπίπτει με την τοπολογία γινόμενο σε αυτόν.

3) Θεωρούμε τον τοπολογικό (R_s,τ_s) (= η ευθεία Sorgenfrey). Αποδείξτε ότι:
(α) Η οικογένεια $\Sigma=\{(-\infty,b): b\in Q\}\bigcup\{[a,+\infty): a\in R\}$ είναι μία υποβάση και η $B=\{[a,b): a,b\in R \text{ , } b\in Q \text{ και } a<b\}$ είναι μία βάση για την τ_s. (Όπου Q=οι ρητοί)
(β) Η οικογένεια $B_1=\{[a,b): a,b\in Q, a<b\}$ είναι βάση για μία τοπολογία στο R διαφορετική και από την συνήθη αλλά και από την τ_S.
(γ) Ο (R_s,τ_s) έχει σε κάθε σημείο μία αριθμήσιμη βάση περιοχών.
(δ) Κάθε διάστημα $[a,b)$, $a,b\in R$, $a<b$ είναι ανοικτό αλλά και κλειστό υποσύνολο του (R_s,τ_s).
(ε) Η Ευκλείδεια τοπολογία τ είναι γνήσια μικρότερη της τ_S.
(στ) Χαρακτηρίστε τις συγκλίνουσες ακολουθίες (x_n) στον τ.χ. R_S και αποδείξτε ότι αυτές περιέχουν τις φθίνουσες και φραγμένες ακολουθίες πραγματικών. Είναι η ακολουθία $x_n=1-\dfrac{1}{n}$, $n\geq 1$ συγκλίνουσα στον R_S;

4) Έστω $(X,\leq)$ ολικά διατεταγμένο σύνολο (για κάθε $a,b\in X$ με $a\neq b\Rightarrow$ είτε $a<b$ ή $b<a$) με τουλάχιστον δύο στοιχεία.

Αν $a,b\in X$ με $a<b$, ορίζουμε το ανοικτό διάστημα (a,b) ως το σύνολο $(a,b)=\{x\in X : a<x<b\}$. Επίσης θέτομε $(-\infty,a)=\{x\in X : x<a\}$ και $(a,+\infty)=\{x\in X : a<x\}$ για $a\in X$.

Ανάλογα ορίζονται και τα διαστήματα $[a,b],[a,b)$ και $(a,b]$. Αποδείξτε ότι:
(α) Η οικογένεια B όλων των διαστημάτων της μορφής $(-\infty,a)$ και $(b,+\infty)$, $a,b\in X$ είναι υποβάση για μια τοπολογία $\tau_0(X)$ στο X, την οποία ονομάζουμε <u>τοπολογία της διάταξης</u>

(β) Η συνήθης τοπολογία του R ταυτίζεται με την τοπολογία της συνήθους διάταξης του R.

(γ) Σε ποιο από τα ακόλουθα υποσύνολα $X \subseteq R$ η τοπολογία $\tau_0(X)$ (το $X \subseteq R$ θεωρείται ολικά διατεταγμένο με την επαγόμενη διάταξη από το R) συμπίπτει με την σχετική τοπολογία από το R (θεωρούμενο με την συνήθη τοπολογία): $N, [0,1) \cup \{2\}$ και $\{0\} \cup \{x \in R : |x| > 1\}$;

5) Θεωρούμε την επεκτεταμένη ευθεία $(\overline{R}, \tau_e)$ των πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι:

(α) Ο $(\overline{R}, \tau_e)$ έχει αριθμήσιμη βάση

(β) Η τοπολογία τ_e συμπίπτει με την τοπολογία $\tau_0(\overline{R})$ (πρβλ άσκηση (4) (γ)).

(γ) Έστω $(x_n) \subseteq R$. Τότε $x_n \xrightarrow{\tau_e} +\infty \Leftrightarrow$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in N : n \geq \nu_0 \Rightarrow x_n > \varepsilon$. Αποδείξτε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για $x_n \xrightarrow{\tau_e} -\infty$.

(δ) Αν $\varnothing \neq A \subseteq \overline{R}$ τότε $\sup A \in \overline{A}$.

6)Έστω B μία βάση για μια τοπολογία τ στο σύνολο X. Αποδείξτε ότι η τ είναι ίση με την τομή όλων των τοπολογιών επί του X οι οποίες περιέχουν την B. Αποδείξτε το ίδιο για μια υποβάση.

7)Αποδείξτε ότι οι ρητοί Q ως υπόχωρος του R (με την συνήθη τοπολογία) δεν έχουν την διακριτή τοπολογία.

8) Περιγράψτε την σχετική τοπολογία του μοναδιαίου κύκλου $S_1 = \{z \in R^2 : \|z\|_2 = 1\}$ του ευκλείδειου επιπέδου.