

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

## Τοπολογία

Σημειώσεις Παραδόσεων

Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης

Αθήνα 2015

## Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές βασίζονται στις παραδόσεις του μαθήματος «Εισαγωγή στην Τοπολογία», το οποίο εδίδαξα κατά το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2014-15.

Εξαίρεση αποτελούν οι παράγραφοι 2.3 (Χώροι πηλίκου και απεικονίσεις πηλίκου) του κεφαλαίου 2 και το κεφάλαιο 6 (Συνεκτικοί τοπολογικοί χώροι) τα οποία προστέθηκαν εκ των υστέρων για λόγους πληρότητας.

Ελπίζω αργότερα να μπορέσω να συμπληρώσω (και να βελτιώσω) τις παρούσες σημειώσεις προσθέτοντας στο κεφάλαιο 4 κάποια στοιχεία για την θεωρία των συμπαγοποιήσεων τοπολογικών χώρων (ιδιαίτερα αναφέρομαι στην συμπαγοποίηση Stone- Cech).

Μια βασική γνώση της θεωρίας των μετρικών χώρων (στο τμήμα μας διδάσκεται στο μάθημα της Πραγματικής Ανάλυσης) είναι χρήσιμη αλλά όχι απαραίτητη για την μελέτη αυτών των σημειώσεων.

Ο συμβολισμός και η ορολογία που χρησιμοποιούμε είναι λίγο πολύ καθιερωμένοι.

Ιδιαίτερα σημειώνουμε τα ακόλουθα: Αν  $(X, d)$  είναι μετρικός χώρος  $x \in X$  και

$\varepsilon > 0$ , με  $B(x, \varepsilon)$  συμβολίζουμε την ανοικτή σφαίρα κέντρου  $x$  και ακτίνας

$\varepsilon (= \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\})$  και με  $\hat{B}(x, \varepsilon)$  την αντίστοιχη κλειστή σφαίρα

$(= \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\})$ . Με τον όρο ο «ευκλείδειος χώρος  $R^n$ » εννοούμε τον διανυσματικό χώρο  $R^n$  εφοδιασμένο με την μετρική την οποία επάγει η ευκλείδεια νόρμα  $(d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2})$  όπου  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$ . Ειδικότερα όταν  $n=1$  (οπότε έχουμε την πραγματική ευθεία  $R$  με την μετρική της απόλυτης τιμής) χρησιμοποιούμε και την ορολογία, «ο χώρος  $R$  με την συνήθη τοπολογία».

Αν  $X$  σύνολο συμβολίζουμε με  $|X|$  το πλήθος των στοιχείων (πληθάριθμο) του  $X$ .

Τέλος οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον φίλο μου Κώστα Θανόπουλο για τον κόπο που πήρε ώστε να μεταφέρει και αυτές τις χειρόγραφες σημειώσεις μου (μετά τις σημειώσεις των μαθημάτων, Απειροστικός Λογισμός III και μεταπτυχιακής Ανάλυσης II) στο Word.

Αθήνα Ιούλιος 2015

Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης

## Περιεχόμενα

### 1 Τοπολογικοί χώροι

- 1.1 Στοιχειώδεις έννοιες της τοπολογίας
- 1.2 Βάσεις και υποβάσεις
- 1.3 Σχετική τοπολογία και υπόχωροι
- 1.4 Συνεχείς συναρτήσεις

### 2 Πράξεις σε τοπολογικούς χώρους

- 2.1 Η τοπολογία γινόμενο
- 2.2 Μετρικοποιησιμότητα γινομένου μετρικών χώρων
- 2.3 Χώροι πηλίκου και απεικονίσεις πηλίκου

### 3 Συμπαγείς χώροι

- 3.1 Συμπαγείς χώροι και βασικές ιδιότητες
- 3.2 Το θεώρημα Tychonoff

### 4 Διαχωριστικά αξιώματα

- 4.1 Χώροι Hausdorff ( $T_2$ ), κανονικοί ( $T_3$ ) και φυσιολογικοί ( $T_4$ )
- 4.2 Το Λήμμα του Urysohn, το Λήμμα της Εμφύτευσης και το θεώρημα μετρικοποίησης του Urysohn.

- 4.3 Τελείως κανονικοί χώροι  $\left( T_{3\frac{1}{2}} \right)$

### 5 Σύγκλιση σε τοπολογικούς χώρους

### 6 Συνεκτικοί τοπολογικοί χώροι

## Βιβλιογραφία

[B] N. Bourbaki, Elements of Mathematics, General Topology

Part 1, Hermann Paris, 1966.

[D] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[E] R. Engelking, General Topology, Polish Scientific Publishers Warsaw, 1977.

[K]. Β. Κανελλόπουλος. Σημειώσεις παραδόσεων Τοπολογίας, ΕΜΠ, 2014.

[Mu] J. R. Munkres, Topology, a first course, Prentice Hall of India, 1994.

[Mo] S. A. Morris, Topology without tears, [www.topologywithouttears.net](http://www.topologywithouttears.net),

e-mail: morris.sidney@gmail.com .

[N] Σ.Α. Νεγρεπόντη, Σημειώσεις παραδόσεων Γενικής Τοπολογίας, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, 1983.

[F-H-H-M-Z]. M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos and V. Zizler, Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis, CMSB in Mathematics, Springer, 2011.