3. Συμπαγείς χώροι

3.1 Συμπαγείς χώροι και βασικές ιδιότητες

Οι συμπαγείς χώροι είναι μια από τις πιο σημαντικές κλάσεις τοπολογικών χώρων. Η κλάση των συμπαγών χώρων περιλαμβάνει τα κλειστά διαστήματα $[\alpha,b]$ της πραγματικής ευθείας (και περισσότερο γενικά τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα των ευκλειδείων χώρων) και κληρονομεί τις θεμελιώδεις ιδιότητες αυτών. Για παράδειγμα κάθε συνεχής πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε ένα συμπαγή χώρο K επιτυγχάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, κάθε φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του K έχει μη κενή τομή, κτλ. Ο ορισμός του συμπαγούς χώρου με την χρήση ανοικτών καλυμμάτων δεν είναι τόσο φυσιολογικός ή διαισθητικός, εν τούτοις είναι φυσιολογικός στα πλαίσια της Θεωρίας Μέτρου όταν κανείς επιχειρεί να αποδείξει π.χ. ότι το εξωτερικό μέτρο Lebesgue ενός διαστήματος $\mathrm{I} \subseteq R$ ισούται με το μήκος του. (πρβλ. την ιστορική σημείωση 3.27 στο τέλος της παραγράφου.)

Υπενθυμίζουμε ότι μια οικογένεια υποσυνόλων α ενός συνόλου X λέγεται <u>κάλυμμα</u> του X, αν η ένωση των μελών της α είναι ίση με το X. Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος και τα μέλη της α είναι ανοικτά στον X, τότε λέμε ότι η α είναι ένα <u>ανοικτό κάλυμμα</u> του X.

<u>Ορισμός</u> 3.1. Έστω X τ.χ. και $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{X}$

(α) Ο X λέγεται συμπαγής, αν κάθε ανοικτό κάλυμμα $\{U_i : i \in \mathrm{I}\}$ του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, δηλαδή υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο F του I, ώστε $\mathrm{X} = \bigcup_{i \in F} U_i$

(β) Το K λέγεται συμπαγές υποσύνολο του X, αν είναι συμπαγής υπόχωρος του X. (Δηλαδή, αν είναι συμπαγής ως τοπολογικός χώρος με την σχετική τοπολογία.)

<u>Παρατήρηση</u> 3.2. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{X}$ είναι συμπαγές, αν και μόνο αν, κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, αν και μόνο αν για κάθε

οικογένεια $\{U_i : i \in \mathrm{I}\}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με $\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{i \in \mathrm{I}} U_i$, υπάρχει πεπερασμένο $F \subseteq \mathrm{I}$, ώστε $\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{i \in F} U_i$. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.)

<u>Παραδείγματα</u> 3.3 .1) Κάθε τοπολογικός χώρος X με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων είναι συμπαγής, εφόσον τότε κάθε ανοικτό κάλυμμα του X είναι πεπερασμένο.

2) Ένας διακριτός χώρος είναι συμπαγής, αν και μόνο αν, είναι πεπερασμένος. (Αρκεί να θεωρήσουμε το ανοικτό κάλυμμα που αποτελείται από όλα τα μονοσύνολα.)

3) Σε κάθε τ.χ. X το $\varnothing$ και τα πεπερασμένα υποσύνολά του είναι συμπαγή. Αν(x_n) είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον X και $x_n \to x$, τότε το $\mathrm{K} = \{x_n : n \geq 1\} \bigcup \{x\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Πράγματι αν$\{U_i : i \in \mathrm{I}\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του K τότε υπάρχει $i_0 \in \mathrm{I}: \ x \in U_{i_0}$ άρα υπάρχει $n_0 \in N : n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U_{i_0}$.

Για κάθε $k = 1, 2, ..., n_0$, επιλέγουμε $i_k \in \mathrm{I} : x_k \in U_{i_k}$ έπεται τότε ότι το $\{U_{i_0}, U_{i_1}, ..., U_{i_{n_0}}\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα του K .

4) Η πραγματική ευθεία R δεν είναι συμπαγής χώρος, εφόσον το κάλυμμα του R με τα ανοικτά διαστήματα, $(-n, n)$, $n \geq 1$, δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Όμως κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$, όπου $a, b \in R$ με $a < b$ είναι συμπαγές σύνολο: Πράγματι, έστω $\{U_i : i \in \mathrm{I}\}$ ένα κάλυμμα του $[a, b]$ αποτελούμενο από ανοικτά υποσύνολα του R (πρβλ. παρατήρηση 3.2). Θέτομε $S = \{x \in (a, b] : \ [a, x]$ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος από τα U_i $\}$ και παρατηρούμε ότι $S \neq \varnothing$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sup S = b$ (Γιατί;). Υποθέτομε προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $c = \sup S < b$. Έστω $i_0 \in \mathrm{I}$ ώστε $c \in U_0$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0 : (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U_{i_0} \bigcap (a, b)$. Επειδή $a < c - \varepsilon < c$, το $[a, c - \varepsilon)$ μπορεί να καλυφθεί από ένα πεπερασμένο πλήθος συνόλων, $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ τα σύνολα αυτά μαζί με το U_{i_0} συνιστούν ένα πεπερασμένο κάλυμμα του $\left[a, c + \frac{\varepsilon}{2}\right]$, άτοπο.

Ο ορισμός της έννοιας του συμπαγούς χώρου μπορεί να διατυπωθεί και με ένα δυϊκό τρόπο, χρησιμοποιώντας κλειστά αντί ανοικτών συνόλων. Το κριτήριο που προκύπτει θα αποδειχθεί χρήσιμο σε αρκετές περιπτώσεις. Πρώτα διατυπώνουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 3.4. Έστω X σύνολο και $\alpha = \{\mathrm{A}_i : i \in \mathrm{I}\}$ μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X. Θα λέμε ότι η α έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής (ι.π.τ) αν για κάθε $F \subseteq \mathrm{I}$ πεπερασμένο ισχύει ότι $\bigcap_{i \in F} \mathrm{A}_i \neq \varnothing$

Παραδείγματα 3.5. 1) Έστω X τοπολογικός χώρος και $x \in \mathrm{X}$, τότε κάθε βάση περιοχών B_x του x έχει την ι.π.τ.

2) Έστω S σύνολο και B βάση φίλτρου στο S τότε η B έχει την ι.π.τ. (πρβλ. τον ορισμό 1.24).

Θεώρημα 3.6. Έστω X τ.χ. . Τότε ο X είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε οικογένεια $\alpha = \{F_i : i \in \mathrm{I}\}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ι.π.τ., έχει μη κενή τομή.

Δηλαδή ισχύει , $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} F_i \neq \varnothing$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη απλή συνέπεια των κανόνων De Morgan:Μια τομή κλειστών συνόλων $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} F_i$ είναι κενή ($= \varnothing$) , αν και μόνο αν , $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{X} - F_i) = \mathrm{X}$, δηλαδή τα συμπληρώματα των F_i συνιστούν ανοικτό κάλυμμα του X.

«$\Rightarrow$» Θεωρούμε μια οικογένεια $\alpha = \{F_i : i \in \mathrm{I}\}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ι.π.τ. και υποθέτουμε ότι $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} F_i = \varnothing$. Τότε, $\bigcup_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{X} \setminus F_i) = \mathrm{X}$ και άρα υπάρχει $J \subseteq \mathrm{I}$ πεπερασμένο ώστε $\bigcup_{i \in J} (\mathrm{X} \setminus F_i) = \mathrm{X}$. Η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$, το οποίο αντιφάσκει στην ι.π.τ. της οικογένειας α .

«$\Leftarrow$» Έστω $\{U_i : i \in \mathrm{I}\}$ ανοικτό κάλυμμα του X. Θέτουμε $F_i = \mathrm{X} - U_i \ , i \in \mathrm{I}$, τότε F_i κλειστά σύνολα και $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} F_i = \varnothing$. Έπεται από την υπόθεσή μας ότι η οικογένεια $\{F : i \in \mathrm{I}\}$ δεν έχει την ι.π.τ. και συνεπώς υπάρχει $J \subseteq \mathrm{I}$ πεπερασμένο ώστε $\bigcap_{i \in J} F_i = \varnothing$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{X} = \bigcup_{i \in J} U_i$ και άρα ο X είναι συμπαγής.

<u>Παρατήρηση</u> 3.7. (α) Έστω X συμπαγής χώρος. Αν $C_1 \supseteq C_2 \supseteq .... \supseteq C_n \supseteq ...$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών μη κενών υποσυνόλων του X τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing$. (Η $(C_n)_{n \geq 1}$ ικανοποιεί προφανώς την ι.π.τ. .)

(β) Είναι σαφές ότι το θεώρημα 3.6 διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής: Ο χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε οικογένεια α υποσυνόλων του X με την ι.π.τ. , η τομή $\bigcap \{ \overline{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \in \alpha \}$ είναι μη κενή.

<u>Πρόταση</u> 3.8 . Κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου είναι συμπαγές.

<u>Απόδειξη</u>. Έστω Y κλειστό υποσύνολο του X και α ένα κάλυμμα του Y αποτελούμενο από ανοικτά υποσύνολα του X (πρβλ. την παρατήρηση 3.2). Τότε η οικογένεια $B = a \bigcup \{ \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y} \}$ είναι προφανώς ένα ανοικτό κάλυμμα του χώρου X και άρα, εφόσον ο X είναι συμπαγής, κάποια πεπερασμένη υποοικογένεια C της B καλύπτει τον X. Είναι τότε σαφές ότι η οικογένεια $C \setminus \{ \mathrm{X} \setminus \mathrm{Y} \} \subseteq \alpha$ είναι ένα πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα του Y .

…………………………………………………………….

Το ερώτημα αν, τα συμπαγή υποσύνολα ενός τοπολογικού χώρου X είναι κλειστά έχει θετική απάντηση υπό την προϋπόθεση ότι ο X ικανοποιεί την όπως αποκαλείται συνθήκη Hausdorff. (Από το όνομα του μαθηματικού Felix Hausdorff ο οποίος την εισήγαγε.)

Ορισμός 3.9. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται χώρος Hausdorff, αν για κάθε ζεύγος x_1, x_2 διαφορετικών σημείων του X, υπάρχουν περιοχές U_1 και U_2 των x_1 και x_2 αντίστοιχα ώστε $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$.

Παρατήρηση 3.10. Η έννοια του τοπολογικού χώρου Hausdorff θα μελετηθεί διεξοδικότερα στο κεφάλαιο των διαχωριστικών αξιωμάτων. Επί του παρόντος, παρατηρούμε τα ακόλουθα:

(α) Κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι χώρος Hausdorff.

Πράγματι, αν $x, y \in \mathrm{X}$ με $x \neq y$ και $\varepsilon = d(x, y) > 0$, τότε οι ανοικτές σφαίρες $\mathrm{B}\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ και $\mathrm{B}\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ είναι ξένες.

Επίσης ο χώρος R_S είναι, όπως εύκολα διαπιστώνεται, χώρος Hausdorff και βέβαια δεν είναι μετρικοποιήσιμος. (πρβλ. παράδειγμα 2.20 (3).)

(β) Ο χώρος του Sierpinski όπως και ένα άπειρο σύνολο με την συμπεπερασμένη τοπολογία δεν είναι χώροι Hausdorff. (Πρβλ. τα παραδείγματα 1.2 (4) και (5) και συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στον παραπάνω ισχυρισμό.)

Λήμμα 3.11. Έστω Y συμπαγές υποσύνολο του χώρου Hausdorff X και $a \in \mathrm{X}$ το οποίο δεν ανήκει στον Y. Τότε υπάρχουν ξένα ανοικτά υποσύνολα U και V του X ώστε $a \in U$ και $\mathrm{Y} \subseteq V$.

Απόδειξη. Για κάθε σημείο $y \in \mathrm{Y}$, επιλέγουμε ξένες ανοικτές περιοχές U_y και V_y των σημείων a και y αντίστοιχα (χρησιμοποιώντας την συνθήκη Hausdorff). Η οικογένεια $\{V_y : y \in \mathrm{Y}\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς συνόλου Y, επομένως υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Y}$ ώστε $\bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k} \supseteq \mathrm{Y}$. Το ανοικτό σύνολο $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$ περιέχει το Y και είναι ξένο προς το ανοικτό σύνολο $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}$, το οποίο είναι τομή περιοχών του a. Έτσι τα σύνολα U και V ικανοποιούν τις απαιτήσεις μας

…………………………………………….

Από αυτό το λήμμα έπεται εύκολα η απάντηση στο ερώτημα που θέσαμε πριν τον ορισμό 3.9.

Πρόταση 3.12. Κάθε συμπαγές υποσύνολο χώρου Hausdorff είναι κλειστό.

Απόδειξη. Έστω X χώρος Hausdorff και Y συμπαγές υποσύνολο του X. Αν α είναι τυχόν σημείο του $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$ τότε, από το λήμμα 3.11, μπορούμε να βρούμε ξένα ανοικτά σύνολα U και V στον X ώστε $\alpha\in U$ και $\mathrm{Y}\subseteq V$. Έπεται ότι, $\alpha\in U\subseteq \mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$. Άρα το $\mathrm{X}\setminus\mathrm{Y}$ είναι ανοικτό και το Y κλειστό στον X.

Παραδείγματα 3.13 . 1) Επειδή ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$, ($a,b\in R,\ a<b$) του R είναι συμπαγές σύνολο (παράδειγμα 3.3 (4)), έπεται από την πρόταση 3.8 ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του $[a,b]$ είναι επίσης συμπαγές.

2) Η συνθήκη Hausdorff στην υπόθεση της πρότασης 3.12 είναι αναγκαία: Πράγματι, έστω X άπειρο σύνολο με την συμπεπερασμένη τοπολογία (παράδειγμα 1.2 (5)) τότε τα μόνα γνήσια υποσύνολα του X τα οποία είναι κλειστά είναι τα πεπερασμένα. Όμως είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι κάθε υποσύνολο του X είναι συμπαγές.

3) Κάθε συμπαγές υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου (X,d) είναι κλειστό και φραγμένο. Πράγματι ο X είναι χώρος Hausdorff ως μετρικός χώρος και άρα το K είναι από την πρόταση 3.12 κλειστό. Έστω $a\in\mathrm{K}$, τότε η ακολουθία ανοικτών σφαιρών $B(a,n), n\geq 1$, προφανώς καλύπτει τον χώρο X και συνεπώς το συμπαγές σύνολο K. Έπεται ότι ένα πεπερασμένο πλήθος από αυτές τις σφαίρες καλύπτει το K και αν $B(a,N)$ είναι από αυτές σφαίρες εκείνη με την μεγαλύτερη ακτίνα,, τότε $\mathrm{K}\subseteq B(a,N)$. Δηλαδή το K είναι φραγμένο.

Το αντίστροφο αυτού του αποτελέσματος δεν ισχύει γενικά. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε με το παράδειγμα ενός άπειρου συνόλου X με την διακριτή μετρική d.

Ο μετρικός (X,d) είναι τότε (προφανώς) κλειστό και φραγμένο σύνολο, εντούτοις δεν είναι συμπαγής, εφόσον το ανοικτό κάλυμμα $\{\{x\}: x\in\mathrm{X}\}$ του X δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Υπάρχει βέβαια μια σημαντική περίπτωση που το αποτέλεσμα ισχύει, αυτή είναι η περίπτωση των ευκλειδείων χώρων.

Όπως θα αποδείξουμε λίγο αργότερα με την βοήθεια του θεωρήματος Tychonoff (ή της ειδικής περίπτωσης του θεωρήματος 3.17) ένα υποσύνολο K του ευκλειδείου χώρου R^n είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

<u>Πρόταση</u> 3.14 Η εικόνα ενός συμπαγούς χώρου μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης είναι συμπαγής χώρος.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι ο X είναι συμπαγής χώρος. Έστω a ένα κάλυμμα του συνόλου $f(\mathrm{X})$ από ανοικτά υποσύνολα του Y.

Η οικογένεια $\left\{f^{-1}(U):U\in a\right\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X, εφόσον η f είναι συνεχής. Επειδή ο X είναι συμπαγής ένα πεπερασμένο πλήθος από αυτά, έστω

$$f^{-1}(U_1),\dots,f^{-1}(U_n)$$

Καλύπτουν τον X. Έπεται ότι τα σύνολα $U_1,\dots,U_n$ καλύπτουν το $f(\mathrm{X})$ και έτσι το $f(\mathrm{X})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

<u>Πόρισμα</u> 3.15. Έστω $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ συνεχής $1-1$ και επί συνάρτηση. Αν ο X είναι συμπαγής και ο Y είναι Hausdorff, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.

<u>Απόδειξη.</u> Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι κλειστή απεικόνιση (ορισμός 2.8) διότι τότε η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} της f θα είναι συνεχής συνάρτηση. Έστω A κλειστό στο X τότε από την πρόταση 3.8 το A είναι συμπαγές σύνολο. Επομένως από την πρόταση 3.14 το $f(\mathrm{A})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Επειδή ο Y είναι χώρος Hausdorff από την πρόταση 3.12 είναι κλειστό στον Y.

<u>Άσκηση.</u> Αν (X,τ) συμπαγής και τ_1 είναι Hausdorff τοπολογία επί του X ώστε $\tau_1\subseteq\tau$ τότε $\tau_1=\tau$.

………………………………..

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι μια συνεχής πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$ της πραγματικής ευθείας έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα οφείλεται στην συμπάγεια του $[a,b]$ και έτσι γενικεύεται κατάλληλα για συμπαγείς χώρους. Η γενίκευση αυτή είναι μια σπουδαία αρχή της μαθηματικής ανάλυσης

<u>Θεώρημα</u> 3.16. (Μέγιστης και ελάχιστης τιμής) Έστω X συμπαγής χώρος και $f:\mathrm{X}\to R$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν σημεία $p,q\in\mathrm{X}$ ώστε $f(p)\le f(x)\le f(q)$ για κάθε $x\in\mathrm{X}$.

<u>Απόδειξη.</u> Η εικόνα $f(\mathrm{X})\subseteq R$ του X είναι συμπαγές υποσύνολο της πραγματικής ευθείας R από την πρόταση 3.14. Έτσι αρκεί να αποδείξουμε ότι: Αν K είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του R, τότε το K έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.

Πράγματι, από το παράδειγμα 3.13 (3), το K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του R. Έστω $m=\min\mathrm{K}$ και $\mathrm{M}=\sup\mathrm{K}$. Οι αριθμοί m και M ανήκουν στην κλειστότητα του K (γιατί;), δηλαδή $m,\mathrm{M}\in\overline{\mathrm{K}}=\mathrm{K}$, αφού το K είναι κλειστό. Έπεται αμέσως ότι οι m και M είναι το ελάχιστο και το μέγιστο στοιχείο του K αντίστοιχα.

(Μία άλλη απόδειξη του ανωτέρω ισχυρισμού έχει ως εξής: Αν π.χ. το K δεν έχει μέγιστο στοιχείο, τότε η οικογένεια $\{(-\infty,a):a\in\mathrm{K}\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του K επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $a_1,\dots,a_n\in\mathrm{K}$ ώστε τα διαστήματα $(-\infty,a_1),\dots,(-\infty,a_n)$ να καλύπτουν το K. Αν a_λ είναι ο μεγαλύτερος των αριθμών $a_1,\dots,a_n$, τότε ο a_λ δεν ανήκει σε κανένα από αυτά τα διαστήματα, το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι καλύπτουν το K.)

Έστω τώρα $p,q\in\mathrm{X}$ ώστε $f(p)=m$ και $f(q)=\mathrm{M}$, τότε $f(p)\le f(x)\le f(q)$, για κάθε $x\in\mathrm{K}$.