Αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων και βασικοί υπολογισμοί Περίληψη

Αντώνης Οικονόμου
aeconom@math.uoa.gr

18 Φεβρουαρίου 2010

Η Θεωρία Πιθανοτήτων έχει ως σκοπό την ποσοτική μελέτη των τυχαίων φαινομένων με μαθηματικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα, ασχολείται με τη μελέτη **πειραμάτων τύχης**, δηλαδή πειραμάτων ή διαδικασιών των οποίων το αποτέλεσμα δεν είναι εκ των προτέρων γνωστό αλλά καθορίζεται (και) από τυχαίους παράγοντες.

Έστω S το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος. Κάθε δυνατό αποτέλεσμα καλείται **δειγματικό σημείο** ή **απλό ενδεχόμενο** του τυχαίου πειράματος, ενώ το σύνολο S καλείται **δειγματικός χώρος**. Τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου αναφέρονται ως **ενδεχόμενα**. Κατά την εκτέλεση ενός πειράματος τύχης, θα λέμε ότι **ένα δεδομένο ενδεχόμενο πραγματοποιείται**, αν το αποτέλεσμα του πειράματος ανήκει στο συγκεκριμένο ενδεχόμενο.

Αν τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$ είναι ενδεχόμενα τότε η ένωσή τους, $\bigcup_{i=1}^n E_i$, είναι το ενδεχόμενο που περιλαμβάνει όλα τα δυνατά αποτελέσματα που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δηλαδή, το ενδεχόμενο $\bigcup_{i=1}^n E_i$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Παρόμοια, η τομή $\bigcap_{i=1}^n E_i$ είναι το ενδεχόμενο που περιλαμβάνει όλα τα δυνατά αποτελέσματα που ανήκουν σε όλα τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Το ενδεχόμενο $\bigcap_{i=1}^n E_i$ πραγματοποιείται όταν πραγματοποιηθούν "ταυτόχρονα" όλα τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Για κάθε ενδεχόμενο E ορίζουμε το συμπληρωματικό του, E^c, που είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων που δεν ανήκουν στο E. Το συμπληρωματικό E^c του E πραγματοποιείται τότε και μόνον τότε όταν δεν πραγματοποιείται το E. Το ενδεχόμενο S πραγματοποιείται πάντα, όποιο κι αν είναι το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης, ενώ το S^c είναι το κενό σύνολο $\emptyset$ που δεν περιέχει κανένα δυνατό αποτέλεσμα και το οποίο επομένως δεν πραγματοποιείται ποτέ. Δυο ενδεχόμενα E και F με $E \cap F = \emptyset$ λέγονται **ασυμβίβαστα**. Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται ακριβώς για να δηλώσει ότι δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν και τα δυο, αφού η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου.

Για την πιθανοθεωρητική προτυποποίηση (μοντελοποίηση) ενός πειράματος τύχης απαιτείται να καθορισθούν τρία στοιχεία: Ο δειγματικός χώρος S, η οικογένεια των ενδεχομένων A που είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του S για τα οποία μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε την πιθανότητα πραγματοποίησής τους και μια συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας $P : A \to \mathbb{R}$ που αντιστοιχεί σε κάθε ενδεχόμενο την πιθανότητα πραγματοποίησής του που θα είναι ένας αριθμός.

Για την αξιωματική θεμελίωση των πιθανοτήτων υποθέτουμε τα ακόλουθα αξιώματα τα οποία πρέπει να ικανοποιεί η πιθανότητα P:

1. $0 \leq P(E) \leq 1$, για κάθε ενδεχόμενο E
2. $P(S) = 1$

3. Για κάθε ακολουθία ανά δύο ασυμβίβαστων ενδεχομένων $E_1, E_2, \ldots$ (δηλαδή $E_i \cap E_j = \emptyset$ για $i \neq j$)

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Μπορούν τότε να αποδειχθούν ξεκινώντας από τα αξιώματα τα ακόλουθα βασικά υπολογιστικά αποτελέσματα:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(E^c) = 1 - P(E)$
3. Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού για 2 ενδεχόμενα:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

4. Γενική αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) &= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \cdots E_n) \\ &= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \cdots E_{i_r}) \end{aligned}$$

5. Μονοτονία: Αν $E \subseteq F$ τότε $P(E) \leq P(F)$
6. Υποπροσθετικότητα: Για κάθε ακολουθία ενδεχομένων $E_1, E_2, \ldots$ ισχύει

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

7. Συνέχεια: Αν $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \cdots$ είναι μια αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων τότε

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n \to \infty} P(E_n)$$

Ομοίως, αν $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία ενδεχομένων τότε

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n \to \infty} P(E_n)$$

Στην περίπτωση πεπερασμένου δειγματικού χώρου S που όλα τα δειγματικά σημεία του είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου E δίνεται από τη σχέση

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{\text{ευνοϊκές περιπτώσεις}}{\text{δυνατές περιπτώσεις}}$$

όπου με $|E|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου E.

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου μπορεί να έχει διάφορες ερμηνείες. Σε ένα πείραμα που αφορά το χαρακτηριστικό ενός πεπερασμένου πληθυσμού μπορεί να ερμηνευθεί σαν το ποσοστό του πληθυσμού που έχει το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό. Σε ένα πείραμα που μπορεί να επαναληφθεί απεριόριστα, μπορεί να ερμηνευθεί ως η οριακή σχετική συχνότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου, καθώς το πλήθος των επαναλήψεων του πειράματος τείνει στο άπειρο. Σε πειράματα τύχης που ο δειγματικός χώρος μπορεί να απεικονιστεί με κάποιο επίπεδο γεωμετρικό σχήμα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου μπορεί να γίνει αντιληπτή ως το ποσοστό του εμβαδού του σχήματος που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο ενδεχόμενο ως προς το εμβαδό του σχήματος που αντιστοιχεί στο δειγματικό χώρο. Τέλος, η πιθανότητα μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα υποκειμενικό μέτρο βεβαιότητας για το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης.