Συνδιακύμανση - Ιδιότητες

$$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

$$= E[XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - \underbrace{E(XE(Y))}_{E(Y)E(X)} - \cancel{\underbrace{E(E(X)Y)}_{E(X)E(Y)}}$$

$$+ \cancel{E(X)E(Y)}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,X) := E[(X-E(X))(X-E(X))]$$
$$= E[(X-E(X))^2] = \mathrm{Var}[X]$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$$

$$\mathrm{Cov}(X, aY+b) = E[X(aY+b)] - E[X]E[aY+b]$$
$$= E[aXY+bX] - E[X](aE(Y)+b)$$
$$= aE[XY] + b\cancel{E[X]} - aE[X]E[Y]$$
$$-b\cancel{E[X]}$$
$$= a(E(XY) - E(X)E(Y)) = a\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y+Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(X,Z)$$

X, Y ανεξ. $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

$\Rightarrow E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

$\Rightarrow Cov(X, Y) = 0$

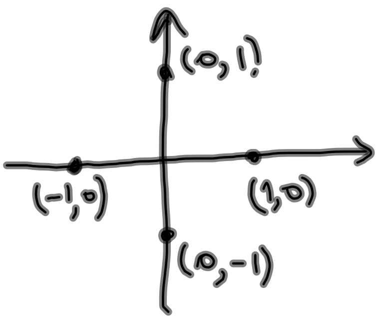
$\Rightarrow X, Y$ ασυσχέτιστες

X, Y ασυσχ $\not\Rightarrow X, Y$ ανεξ.

Αντιπαραδ.

(X, Y) διακριτή

$P((X,Y)=(0,1))$
$= P((X,Y)=(0,-1))$
$= \dots = \frac{1}{4}$



X, Y ανεξ ?

$P(X=-1, Y=0) = \frac{1}{4}$

$P(X=-1) = 1/4$

$P(Y=0) = 1/2$

$P(X=-1, Y=0) \neq P(X=-1)P(Y=0) \Rightarrow X, Y$ όχι ανεξ.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ X, Y ασυσχ.

Διασπορά αθρ. τ.μ

$$Var(X+Y) = E((X+Y)^2) - (\overbrace{E(X+Y)}^{E(X)+E(Y)})^2$$

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2)$$

$$- (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2)$$

$$- (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2$$

$$= Var(X) + 2\,Cov(X,Y) + Var(Y)$$

X, Y ασυσχ. $\Rightarrow$ $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Γενίκευση:

$$Var(X+Y+Z) = Var(X) + Var(Y) + Var(Z) + 2\,Cov(X,Y) + 2\,Cov(X,Z) + 2\,Cov(Y,Z).$$

Δεκ 16-9:45 πμ

Συντελ. (γραμμ.) συσχέτισης

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\,\sqrt{Var(Y)}}$$

Πλεονέκτημα: Ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των X, Y.

π.χ. X = ύψος σε cm

Y = βάρος σε gr

X' = ύψος σε ft $= aX$

Y' = βάρος σε lb $= bY$

$$Cov(X', Y') = Cov(aX, bY) = ab\,Cov(X, Y)$$

Όμως

$$\rho(X', Y') = \rho(X, Y)$$

Δεκ 16-9:50 πμ

$$\rho(X', Y') = \frac{Cov(X', Y')}{\sqrt{Var(X')}\,\sqrt{Var(Y')}}$$

$$= \frac{\cancel{a}\cancel{b}\, Cov(X, Y)}{\cancel{a}\sqrt{Var(X)}\;\cancel{b}\sqrt{Var(Y)}}$$

$$= \rho(X, Y)$$

Δεκ 16-9:53 πμ

Μετασχηματισμοί (Ροπογεννήτριες)

$$M_X(s) = E[e^{sX}]$$

$$= \begin{cases} \sum_x e^{sx} p_X(x), & X \text{ διακρ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Ιδιότητες

1] $M_X(s) \longrightarrow$ Προσδιορ. μονοσημ.

η $P_X(x)$ (σμπ) ή η $f_X(x)$ (σπη)

2] $E(X^n) = \frac{d^n}{ds^n} M_X(s) \Big|_{s=0} = M_X^{(n)}(0)$

$$M_X(s) = E(e^{sX})$$

$$\xRightarrow{d^n/ds^n} \frac{d^n}{ds^n} M_X(s) = E(X^n e^{sX}) \xRightarrow{s=0} \frac{d^n}{ds^n} M_X(s)\Big|_{s=0} = E(X^n).$$

Δεκ 16-10:21 πμ

3] $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ., $S_n = X_1 + \dots + X_n$

$$\Downarrow$$

$$M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s)\, M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$$

Αποδ:

$$M_{S_n}(s) = E[e^{sS_n}] = E[e^{s(X_1+X_2+\dots+X_n)}]$$

$$= E[e^{sX_1} e^{sX_2} \cdots e^{sX_n}] \overset{\text{ανεξ.}}{=} E[e^{sX_1}]\, E[e^{sX_2}] \cdots E[e^{sX_n}]$$

$$= M_{X_1}(s)\, M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$$

4] $X_1, X_2, \ldots$ ανεξ ισον

$N \geq 0$, ακερ., ανεξ. των X_i

$S_N = X_1 + \ldots + X_N$

$\Downarrow$

$$M_{S_N}(s) = M_N(\ln M_X(s)).$$

Αποδ:

$$M_{S_N}(s) = E[e^{sS_N}] = \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) \underbrace{E(e^{sS_N} \mid N=n)}_{= E(e^{sS_n}) = (M_X(s))^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n)(M_X(s))^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n)\, e^{n \ln M_X(s)}$$

$$= M_N(\ln M_X(s)).$$

Υπενθυμίσεις:

$$M_X(s)=E(e^{sX})=\begin{cases}\sum_x e^{sx}p_X(x) & , X \text{ διακρ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}f_X(x)\,dx & , X \text{ συνεχ.}\end{cases}$$

Παραδ. 1:

X διακρ. με τιμές 2, 3, 5

$p_X(2) = \frac{1}{2}$, $p_X(3) = \frac{1}{6}$, $p_X(5) = \frac{1}{3}$

$$E(e^{sX}) = \sum_x e^{sx} p_X(x)$$

$$= \frac{1}{2} e^{2s} + \frac{1}{6} e^{3s} + \frac{1}{3} e^{5s}$$

Δεκ 16-10:38 πμ

Παραδ. 2 : Ροπογεννήτρια της
τ.μ. Poisson

X τ.μ. Poisson (λ)

$$p_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{sx} p_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{sx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^s)^x}{x!}}_{= e^{\lambda e^s}}$$

$$= e^{\lambda(e^s - 1)}.$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ. τ.μ.

$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$

$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i) \Rightarrow M_{X_i}(s) = e^{\lambda_i (e^s - 1)}$

$$\Rightarrow M_{S_n}(s) = M_{X_1}(s) M_{X_2}(s) \cdots M_{X_n}(s)$$
$$= e^{\lambda_1(e^s-1)} e^{\lambda_2(e^s-1)} \cdots e^{\lambda_n(e^s-1)}$$
$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)(e^s-1)}$$

$\Rightarrow S_n \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$

Ερώτημα:

Ξέρω ότι $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ.

Ζητώ ότι $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

$$
\begin{tikzcd}
P_{S_n}(x) & \text{σύνδεση με τις} & P_{X_i}(x) \arrow[d] & \underline{\underline{\text{Δύσκολο}}} \arrow[l] \\
M_{S_n}(s) \arrow[u] & & M_{X_i}(s) \arrow[ll] &
\end{tikzcd}
$$

Παραδ. 3 : Μεταβλητή γεωμ.

X διακρ. $\quad p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad x = 1, 2, \dots$

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{sx} (1-p)^{x-1} p$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} (e^s)^x (1-p)^{x-1} p = p e^s \sum_{x=1}^{\infty} (\underbrace{(1-p) e^s}_{})^{x-1}$$

$$= p e^s \cdot \frac{1}{1-(1-p)e^s} = \frac{p e^s}{1-(1-p)e^s}$$

Παραδ: Μετασχημ. Εκθετικής

X τ.μ. $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$, $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{sx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(s-\lambda)x}\,dx$$

$$= \lambda \left. \frac{e^{(s-\lambda)x}}{s-\lambda} \right|_{x=0}^{\infty} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda - s}, & s < \lambda \\ \infty, & s > \lambda . \end{cases}$$

Δεκ 16-10:56 πμ