Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 4
Ανεξαρτησία

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

16 Οκτωβρίου 2014

Διαισθητική έννοια ανεξαρτησίας

Διαισθητική έννοια ανεξαρτησίας

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.

Διαισθητική έννοια ανεξαρτησίας

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου.
- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$
  ή
  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- Αν $P(B) > 0$ τότε
  A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- Αν $P(B) > 0$ τότε
  A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
- A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
  $\Leftrightarrow P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- Αν $P(B) > 0$ τότε
  A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
- A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
  $\Leftrightarrow P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$.
- Αν $P(BC) > 0$ τότε
  A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
  $\Leftrightarrow P(A|BC) = P(A|C)$.

Ανεξαρτησία για 2 ενδεχόμενα

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- Αν $P(B) > 0$ τότε
  A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.
- A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
  $\Leftrightarrow P(AB|C) = P(A|C)P(B|C)$.
- Αν $P(BC) > 0$ τότε
  A, B υπό δέσμευση ανεξάρτητα, δεδομένου του C με $P(C) > 0$
  $\Leftrightarrow P(A|BC) = P(A|C)$.
- Ανεξαρτησία $\not\Leftrightarrow$ Δεσμευμένη ανεξαρτησία.

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\cap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i)$, για κάθε $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\cap_{i\in S} A_i) = \prod_{i\in S} P(A_i)$, για κάθε $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.
- π.χ. για $n = 3$, A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned}$$

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\cap_{i\in S} A_i) = \prod_{i\in S} P(A_i)$, για κάθε $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.
- π.χ. για $n = 3$, A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned}$$

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ανεξάρτητα ανά ζεύγη $\Leftrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, για κάθε $i, j \in\subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ με $i \neq j$.

Ανεξαρτησία για πολλά ενδεχόμενα

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(\cap_{i\in S} A_i) = \prod_{i\in S} P(A_i)$, για κάθε $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.
- π.χ. για $n = 3$, A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3). \end{aligned}$$

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ανεξάρτητα ανά ζεύγη $\Leftrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$, για κάθε $i, j \in\subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ με $i \neq j$.
- Ανεξαρτησία $\Rightarrow$ (αλλά $\not\Leftarrow$) Ανεξαρτησία ανά ζεύγη.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης** του άλλου.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης** του άλλου.
  $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης** του άλλου.
  $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης** του άλλου.
  $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **αποκλείει την πραγματοποίηση** του άλλου.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης** του άλλου.
  $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **αποκλείει την πραγματοποίηση** του άλλου.
  $\Leftrightarrow AB = \emptyset$ (οπότε και $P(AB) = 0$).

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης** του άλλου.
  $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **αποκλείει την πραγματοποίηση** του άλλου.
  $\Leftrightarrow AB = \emptyset$ (οπότε και $P(AB) = 0$).
- A, B ανεξάρτητα $\not\Rightarrow$, $\not\Leftarrow$ A, B ασυμβίβαστα.

Ασυμβίβαστα - Ανεξάρτητα

- A, B ανεξάρτητα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **δεν μεταβάλει την πιθανότητα πραγματοποίησης** του άλλου.
  $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.
- A, B ασυμβίβαστα
  $\Leftrightarrow$ η γνώση της πραγματοποίησης του ενός **αποκλείει την πραγματοποίηση** του άλλου.
  $\Leftrightarrow AB = \emptyset$ (οπότε και $P(AB) = 0$).
- A, B ανεξάρτητα $\not\Rightarrow$, $\not\Leftarrow$ A, B ασυμβίβαστα.
- Είναι δυνατόν A, B ανεξάρτητα και ασυμβίβαστα;

Μερικές ιδιότητες

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$
  B, A ανεξάρτητα,

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$
  B, A ανεξάρτητα,
  A, B^c ανεξάρτητα,

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$
  B, A ανεξάρτητα,
  A, B^c ανεξάρτητα,
  A^c, B^c ανεξάρτητα.

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$
  B, A ανεξάρτητα,
  A, B^c ανεξάρτητα,
  A^c, B^c ανεξάρτητα.
- A, B, C ανεξάρτητα $\Rightarrow$

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$
  B, A ανεξάρτητα,
  A, B^c ανεξάρτητα,
  A^c, B^c ανεξάρτητα.
- A, B, C ανεξάρτητα $\Rightarrow$
  $A, B \cup C$ ανεξάρτητα,

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$
  B, A ανεξάρτητα,
  A, B^c ανεξάρτητα,
  A^c, B^c ανεξάρτητα.
- A, B, C ανεξάρτητα $\Rightarrow$
  $A, B \cup C$ ανεξάρτητα,
  $A, B \cap C$ ανεξάρτητα,

Μερικές ιδιότητες

- A, B ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$
  B, A ανεξάρτητα,
  A, B^c ανεξάρτητα,
  A^c, B^c ανεξάρτητα.
- A, B, C ανεξάρτητα $\Rightarrow$
  $A, B \cup C$ ανεξάρτητα,
  $A, B \cap C$ ανεξάρτητα,
  $A, B \cap C^c$ ανεξάρτητα,
  $\ldots$

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 4.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B: η δεύτερη ζαριά να είναι 3.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B: η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
- C: το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B: η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
- C: το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.
- Είναι τα A, B, C ανεξάρτητα ανά ζεύγη; ανεξάρτητα;

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B: η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
- C: το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.
- Είναι τα A, B, C ανεξάρτητα ανά ζεύγη; ανεξάρτητα;
- D: το άθροισμα των ζαριών να είναι 5.

Ανεξαρτησία ανά δύο $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 4.
- B: η δεύτερη ζαριά να είναι 3.
- C: το άθροισμα των ζαριών να είναι 7.
- Είναι τα A, B, C ανεξάρτητα ανά ζεύγη; ανεξάρτητα;
- D: το άθροισμα των ζαριών να είναι 5.
- Είναι τα A, D ανεξάρτητα;

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \nRightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 1,2 ή 3.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 1,2 ή 3.
- B: η πρώτη ζαριά να είναι 3,4 ή 5.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 1,2 ή 3.
- B: η πρώτη ζαριά να είναι 3,4 ή 5.
- C: το άθροισμα των ζαριών να είναι 9.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία.

- Ρίψη 2 ζαριών.
- A: η πρώτη ζαριά να είναι 1,2 ή 3.
- B: η πρώτη ζαριά να είναι 3,4 ή 5.
- C: το άθροισμα των ζαριών να είναι 9.
- Ισχύει $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$; Είναι τα A, B, C ανεξάρτητα;

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.
- K_1: η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.
- K_1: η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2: η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.
- K_1: η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2: η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.
- D: οι δυο ρίψεις έχουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Ανεξαρτησία $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία υπό δέσμευση

- Ρίψη 2 δίκαιων νομισμάτων.
- K_1: η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2: η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.
- D: οι δυο ρίψεις έχουν διαφορετικά αποτελέσματα.
- Είναι τα K_1, K_2 ανεξάρτητα; ανεξάρτητα υπό δέσμευση δεδομένου του D;

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\nRightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.
- B: επιλέχθηκε το μπλε νόμισμα.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.
- B: επιλέχθηκε το μπλε νόμισμα.
- K_1: η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.
- B: επιλέχθηκε το μπλε νόμισμα.
- K_1: η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2: η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.

Ανεξαρτησία υπό δέσμευση $\not\Rightarrow$ Ανεξαρτησία

- Επιλογή ενός νομίσματος μεταξύ του μπλε και του κόκκινου και ρίψη του 2 φορές (ανεξάρτητες ρίψεις).
- Το νόμισμα επιλέγεται ισοπίθανα μεταξύ του μπλε και του κόκκινου.
- Το μπλε φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.99.
- Το κόκκινο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 0.01.
- B: επιλέχθηκε το μπλε νόμισμα.
- K_1: η πρώτη ρίψη είναι κορώνα.
- K_2: η δεύτερη ρίψη είναι κορώνα.
- Είναι τα K_1, K_2 ανεξάρτητα υπό δέσμευση δεδομένου του B; ανεξάρτητα;

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 "χρώματα" ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς $(2, 3, \ldots, 10, J, Q, K, A)$.

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 "χρώματα" ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς $(2, 3, \ldots, 10, J, Q, K, A)$.
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι $\clubsuit$.

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 "χρώματα" ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς $(2, 3, \ldots, 10, J, Q, K, A)$.
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι $\clubsuit$.
- B: Το τραπουλόχαρτο είναι K.

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 "χρώματα" ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς $(2, 3, \ldots, 10, J, Q, K, A)$.
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι $\clubsuit$.
- B: Το τραπουλόχαρτο είναι K.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 "χρώματα" ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς $(2, 3, \ldots, 10, J, Q, K, A)$.
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι $\clubsuit$.
- B: Το τραπουλόχαρτο είναι K.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;
- Έστω ότι από την αρχική τράπουλα έχει αφαιρεθεί το $2\diamondsuit$ και μετά επιλέγεται ένα τραπουλόχαρτο.

Άσκηση 1: Επιλογή τραπουλόχαρτου

- Τραπουλόχαρτο επιλέγεται από συνήθη τράπουλα με 52 φύλλα, μοιρασμένα σε 4 "χρώματα" ($\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$) καθένα εκ των οποίων έχει 13 αριθμούς $(2, 3, \ldots, 10, J, Q, K, A)$.
- A: Το τραπουλόχαρτο είναι $\clubsuit$.
- B: Το τραπουλόχαρτο είναι K.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;
- Έστω ότι από την αρχική τράπουλα έχει αφαιρεθεί το $2\diamondsuit$ και μετά επιλέγεται ένα τραπουλόχαρτο.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$.

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A: το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A: το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B: το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A: το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B: το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A: το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B: το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ;

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A: το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B: το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ; ;

Άσκηση 2: Επιλογή αριθμού από το $\{1, 2, \ldots, n\}$

- Μια κάλπη περιέχει τους αριθμούς $1, 2, \ldots, n$.
- Επιλέγουμε έναν αριθμό.
- A: το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.
- B: το ενδεχόμενο ο αριθμός να διαιρείται με το 3.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ; ;

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y: ο αριθμός των "κεφαλών" στις ρίψεις.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y: ο αριθμός των "κεφαλών" στις ρίψεις.
- A: ο X είναι άρτιος.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y: ο αριθμός των "κεφαλών" στις ρίψεις.
- A: ο X είναι άρτιος.
- B: ο Y είναι άρτιος.

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y: ο αριθμός των "κεφαλών" στις ρίψεις.
- A: ο X είναι άρτιος.
- B: ο Y είναι άρτιος.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y: ο αριθμός των "κεφαλών" στις ρίψεις.
- A: ο X είναι άρτιος.
- B: ο Y είναι άρτιος.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ;

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y: ο αριθμός των "κεφαλών" στις ρίψεις.
- A: ο X είναι άρτιος.
- B: ο Y είναι άρτιος.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ; ;

Άσκηση 3: Ζάρι πρώτα, νόμισμα μετά

- Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο δίκαιο ζάρι.
- X: η ένδειξη του ζαριού.
- Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα X φορές.
- Y: ο αριθμός των "κεφαλών" στις ρίψεις.
- A: ο X είναι άρτιος.
- B: ο Y είναι άρτιος.
- Είναι τα A, B ανεξάρτητα; ; ;

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:

  1.5 Ανεξαρτησία

- Ασκήσεις:

  1.5 Προβλήματα 30, 34, 35, 36, 40