Πιθανότητες και Στατιστική
Διάλεξη 2
Αξιωματική θεμελίωση
Βασικές ιδιότητες

Αντώνης Οικονόμου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

9 Οκτωβρίου 2014

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο A $\to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)
  2. $P(\Omega) = 1$. (κανονικοποίηση)

Αξιωματική θεμελίωση Kolmogorov

- Πείραμα τύχης = Χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Ω: Ο δειγματικός χώρος.
- $\mathcal{A}$: Η οικογένεια των ενδεχομένων.
- P: Η συνάρτηση (μέτρο) πιθανότητας.
- $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  Ενδεχόμενο $A \to$ Πιθανότητα πραγματοποίησης του A.
- Αξιώματα:
  1. $P(A) \geq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A. (μη-αρνητικότητα)
  2. $P(\Omega) = 1$. (κανονικοποίηση)
  3. $A_1, A_2, \ldots$ ξένα ανά δύο $\Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
     (σ-προσθετικότητα)

Βασικές ιδιότητες

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0.$

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0.$
2. $P(A^c) = 1 - P(A).$

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
$= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
$+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
   $= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
   $+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
   $= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
   $+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
6. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0.$
2. $P(A^c) = 1 - P(A).$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
   $= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
   $+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$
6. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$
7. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots \Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} P(A_i).$

Βασικές ιδιότητες

1. $P(\emptyset) = 0.$
2. $P(A^c) = 1 - P(A).$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$
4. $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n)$
   $= \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots$
   $+(-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$
5. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B).$
6. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$
7. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \ldots \Rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i).$
8. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots \Rightarrow P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \to \infty} P(A_i).$

Διακριτός χώρος πιθανοτήτων

Διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι αριθμήσιμος τότε παίρνουμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι αριθμήσιμος τότε παίρνουμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Τότε, αρκεί να καθορίσουμε τα $P(\{s_i\}) = P(s_i)$ για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.

Διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι αριθμήσιμος τότε παίρνουμε $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- Τότε, αρκεί να καθορίσουμε τα $P(\{s_i\}) = P(s_i)$ για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.
- Κατόπιν για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $\{s_1, s_2, \ldots\}$ θέτουμε $P(\{s_1, s_2, \ldots\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(s_i)$.

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι πεπερασμένος, $|\Omega| = n$, και τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα τότε αναγκαστικά

$$P(\{s_i\}) = P(s_i) = 1/n$$

για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι πεπερασμένος, $|\Omega| = n$, και τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα τότε αναγκαστικά

$$P(\{s_i\}) = P(s_i) = 1/n$$

  για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.
- Τότε για κάθε ενδεχόμενο A,

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{n}.$$

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι πεπερασμένος, $|\Omega| = n$, και τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα τότε αναγκαστικά

$$P(\{s_i\}) = P(s_i) = 1/n$$

  για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.
- Τότε για κάθε ενδεχόμενο A,

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{n}.$$

- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές / Δυνατές.

Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων

- Αν ο δ.χ. Ω είναι πεπερασμένος, $|\Omega| = n$, και τα δειγματικά σημεία είναι ισοπίθανα τότε αναγκαστικά
$$P(\{s_i\}) = P(s_i) = 1/n$$
για κάθε μονοσύνολο $\{s_i\}$.
- Τότε για κάθε ενδεχόμενο A,
$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του } A}{n}.$$
- Πιθανότητα = Ποσοστό = Ευνοϊκές / Δυνατές.
- Ομοιόμορφος διακριτός χώρος πιθανοτήτων $\leftrightarrow$ Κλασική πιθανότητα.

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$
  (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταληλότερος δ.χ.;
- Καταληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταληλότερος δ.χ. : ; ;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ; ; ;

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \ldots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ; ; ; Ω_3

Παράδειγμα 1: Φύλο παιδιών οικογένειας

- Οικογένεια με 4 παιδιά.
- Τι είναι πιθανότερο για το φύλο των παιδιών; 4-0, 3-1, 2-2;
- Υποψήφιοι δειγματικοί χώροι:
  $\Omega_1 = \{4-0, 3-1, 2-2\}$,
  $\Omega_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (αριθμός αγοριών),
  $\Omega_3 = \{AAAA, AAAK, AAKA, AAKK, \dots, KKKK\}$ (σειρά γέννησης).
- Καταλληλότερος δ.χ.;
- Καταλληλότερος δ.χ. είναι αυτός που έχει ισοπίθανα δειγματικά σημεία.
- Καταλληλότερος δ.χ. : ; ; ; Ω_3
- $P(4-0) = \frac{1}{8}$, $P(3-1) = \frac{1}{2}$, $P(2-2) = \frac{3}{8}$.

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.
- $P(\text{Κάποιος κερνάει}) =;$

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.
- $P(\text{Κάποιος κερνάει}) =;\ ;$

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.
- $P(\text{Κάποιος κερνάει}) =;\ ;\ ;$

Άσκηση 1: Τρεις φίλοι - κέρασμα

- Τρεις φίλοι πάνε για μπύρες.
- Ρίχνουν δίκαιο νόμισμα.
- Όποιος φέρει διαφορετικό αποτέλεσμα από τους άλλους κερνάει, αλλιώς ο καθένας πληρώνει τη μπύρα του.
- $P(\text{Κάποιος κερνάει}) =;\ ;\ ; = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

Άσκηση 2: Παιγνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίχτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίχτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.
- P(Κερδίζει ο παίκτης)=;

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίκτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.
- P(Κερδίζει ο παίκτης)=; ;

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίχτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.
- P(Κερδίζει ο παίκτης)=; ; ;

Άσκηση 2: Παιχνίδι Chuck-a-luck

- Ένας παίχτης στοιχηματίζει σε μια έδρα δίκαιου ζαριού.
- Ρίχνονται 3 ζάρια.
- Ο παίκτης κερδίζει αν εμφανιστεί η ζαριά που στοιχημάτισε τουλάχιστον μια φορά.
- P(Κερδίζει ο παίκτης)=; ; ;
  $= 3\frac{1}{6} - 3\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} = \frac{91}{216} \simeq 42\%.$

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.
- P(διαιρείται με το 6, το 10 ή το 15) $=$;

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.
- $P($διαιρείται με το 6, το 10 ή το 15$) =$; ;

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.
- P(διαιρείται με το 6, το 10 ή το 15) $=$; ; ;

Άσκηση 3: Επιλογή αριθμού από 1 ως n - Διαιρ;

- Επιλογή αριθμού από το 1 ως το n.
- P(διαιρείται με το 6, το 10 ή το 15) $=$; ; ;
  $= \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + \lfloor \frac{n}{10} \rfloor + \lfloor \frac{n}{15} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor - \lfloor \frac{n}{30} \rfloor + \lfloor \frac{n}{30} \rfloor.$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής } \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής } \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =; \;;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής } \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =; \; ; \; ;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P($Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου$) =;\ ;\ ;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστεί η τυχαία επιλογή της χορδής.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) =; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P(\text{Μήκος χορδής } \geq \text{Πλευρά τριγώνου}) =; \;;\;;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστεί η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=$;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) =; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα = ; ;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=$; ; ;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=$; ; ; $= \frac{1}{2}$.

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- $P($Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου$) =; \; ; \; ;$
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=; \; ; \; ; = \frac{1}{2}$.
- Περ. 2: Πιθανότητα $=;$

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=$; ; ; $= \frac{1}{2}$.
- Περ. 2: Πιθανότητα $=$; ;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) =; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστει η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα = ; ; ; $= \frac{1}{2}$.
- Περ. 2: Πιθανότητα =; ; ;

Άσκηση 4: Παράδοξο του Bertrand (1889)

- Ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε κύκλο.
- Επιλέγεται "τυχαία" χορδή στον κύκλο.
- P(Μήκος χορδής $\geq$ Πλευρά τριγώνου) $=$; ; ;
- Πρέπει να αποσαφηνιστεί η τυχαία επιλογή της χορδής.
- Περ. 1: Επιλογή τυχαίου σημείου σε διάμετρο του κύκλου και θεώρηση της κάθετης χορδής.
- Περ. 2: Επιλογή τυχαίας γωνίας από κορυφή του τριγώνου και θεώρηση της προσπίπτουσας χορδής.
- Περ. 1: Πιθανότητα $=$; ; ; $= \frac{1}{2}$.
- Περ. 2: Πιθανότητα $=$; ; ; $= \frac{1}{3}$.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ; $= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X,Y$ άρτιοι$)=$; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \dots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \dots, (1,n), (2,1), (2,2), \dots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \dots, 2n$;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ;
  $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ; $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ;
  $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}, \; m = 2, 3, \ldots, n+1$
  $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}, \; m = n+2, \ldots, 2n$

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ; $= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,n), (2,1), (2,2), \ldots, (n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X+Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ; $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$ $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}$, $m = n+2, \ldots, 2n$
- $P(|X-Y| \leq m)=$;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X+Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ;
  $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$
  $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}$, $m = n+2, \ldots, 2n$
- $P(|X-Y| \leq m)=$; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \dots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος = ; ; ;
  $= \{(1,1),(1,2),\dots,(1,n),(2,1),(2,2),\dots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X, Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X + Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \dots, 2n$; ;
  $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \dots, n+1$
  $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}$, $m = n+2, \dots, 2n$
- $P(|X - Y| \leq m)=$; ; ;

Άσκηση 5: Επιλογή αριθμών από 1 ως n.

- Κλήρωση δυο αριθμών X και Y τυχαία από τους $1, 2, \ldots, n$ με επανάθεση.
- Δειγματικός χώρος $=$; ; ; $= \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,n),(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$.
- $P(X$ άρτιος$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.
- $P(X,Y$ άρτιοι$)=$; ; ; $= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.
- $P(X+Y \leq m)=$; $m = 2, 3, \ldots, 2n$; ; $= \frac{1+2+\cdots+m-1}{n^2}$, $m = 2, 3, \ldots, n+1$ $= \frac{1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(2n-m+1)}{n^2}$, $m = n+2, \ldots, 2n$
- $P(|X-Y| \leq m)=$; ; ; $= \frac{n+2(n-1)+2(n-2)+2(n-3)+\cdots+2(n-m)}{n^2}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$

Μελέτη

Μελέτη

Μπερτσεκάς, Δ.Π. και Τσιτσικλής, Γ.Ν. (2013) Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, Εκδόσεις Τζιόλα.

- Θεωρία:
  - 1.1 Σύνολα
  - 1.2 Μοντέλα Πιθανοτήτων
- Ασκήσεις:
  - 1.1 Πρόβλημα 2
  - 1.2 Προβλήματα 8, 9, 10, 11