Αρμονική Ανάλυση (2014-15)

Φυλλάδιο 1

Παραδίδετε οκτώ από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: Δευτέρα 3 Νοεμβρίου 2014.

1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Δείξτε ότι: αν $1 \leq p < r < \infty$ τότε $L^r(X) \subseteq L^p(X)$ και, για κάθε $f \in L^r(X)$,

$$\|f\|_{L^p} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|f\|_{L^r}.$$

2. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου. Θεωρούμε τον χώρο $L^\infty(X)$ που αποτελείται από όλες τις (κλάσεις ισοδυναμίας) μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{C}$ που είναι «ουσιαστικά φραγμένες». Δηλαδή, $f \in L^\infty(X)$ αν και μόνο αν υπάρχει $M = M(f) \geq 0$ ώστε $\mu(\{x \in X : |f(x)| > M\}) = 0$. Δείξτε ότι: αν $f \in L^\infty$ τότε υπάρχει ελάχιστος τέτοιος $M(f)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $\|f\|_\infty$. Στην συνέχεια, αποδείξτε ότι ο $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mu(X) < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L^\infty(X)$ τότε για κάθε $1 \leq p < \infty$ έχουμε $f \in L^p(X)$ και

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

3*. Θεωρούμε τον $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η κλάση $C_c(\mathbb{R}^n)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνή στον $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(β) Η κλάση $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ των συναρτήσεων με συμπαγή φορέα που είναι άπειρες φορές διαφορίσιμες, είναι πυκνή στον $L^p(\mathbb{R}^n)$.

4. Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{|z| \to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p := \lim_{|z| \to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+z) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής με συμπαγή φορέα. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.

5. Έστω (X_1, μ_1) και (X_2, μ_2) δύο σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου και έστω $1 \leq p \leq \infty$. Αν $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, αποδείξτε ότι

$$\left\| \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right\|_{L^p(X_1)} \leq \int_{X_2} \|f(x_1, x_2)\|_{L^p(X_1)} d\mu_2(x_2).$$

6. Έστω $p_j \geq 1$ με $\sum_{j=1}^N 1/p_j = 1$. Αν $f_j \in L^{p_j}(X)$, $1 \leq j \leq N$, αποδείξτε ότι

$$\left\| \prod_{j=1}^N f_j \right\|_{L^1(X)} \leq \prod_{j=1}^N \|f_j\|_{L^{p_j}(X)}.$$

7*. Η συνέλιξη δύο μετρήσιμων συναρτήσεων f και g στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται μέσω της

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy.$$

(α) Αν $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, και $g \in L^1$, αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε x η συνάρτηση $y \mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς y, άρα η $f * g$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, αποδείξτε ότι $f \in L^p$ και

$$\|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^1}.$$

(β) Έστω $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Αν $f \in L^p$ και $g \in L^q$, αποδείξτε ότι $f * g \in L^\infty$ και

$$\|f * g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Αποδείξτε, επιπλέον, ότι η $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και ότι $\lim\limits_{|x|\to\infty}(f * g)(x) = 0$.

8*. Έστω $1 \le p, q, r \le \infty$ που ικανοποιούν την $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Αν $f \in L^p$ και $g \in L^q$, αποδείξτε την *ανισότητα του Young*:

$$\|f * g\|_{L^q} \le \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^r}.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να υποθέσετε ότι $f, g \ge 0$. Θα βοηθήσει να γράψετε

$$f(y)g(x-y) = f(y)^a g(x-y)^b \big[(f(y)^{1-a} g(x-y)^{1-b}\big]$$

για κατάλληλους a και b, και να χρησιμοποιήσετε την Άσκηση 6.

9. Έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $K_\delta(x) = \delta^{-n}\varphi(x/\delta)$.

(α) Δείξτε ότι η οικογένεια $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων.

(β) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η φ είναι φραγμένη και μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο σύνολο, δείξτε ότι η οικογένεια $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

10. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $\mathcal{H}_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\mathcal{H}_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/4t}.$$

Δείξτε ότι η οικογένεια $(\mathcal{H}_\delta)$, όπου $\delta = \sqrt{t}$, είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

11. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \ge \frac{c}{|x|^n} \quad \text{για κάθε } |x| \ge 1,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

12. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{|x|(\log 1/|x|)^2} \quad \text{αν } |x| \le 1/2$$

και $f(x) = 0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \ge \frac{c}{|x|(\log 1/|x|)} \quad \text{για κάθε } |x| \le 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

13. Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια προσέγγιση της μονάδας. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε

$$\sup_{\delta>0} |(f * K_\delta)(x)| \le c f^*(x)$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση f.

14. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε, για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$ ισχύει $m(E \cap I) \geq \alpha m(I)$. Δείξτε ότι $m(E) = 1$.

15. Σωστό ή λάθος; Αν A είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $m(A) > 0$ τότε υπάρχει ακολουθία (t_n) πραγματικών αριθμών ώστε

$$m\Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (A + t_n)\Big) = 0.$$