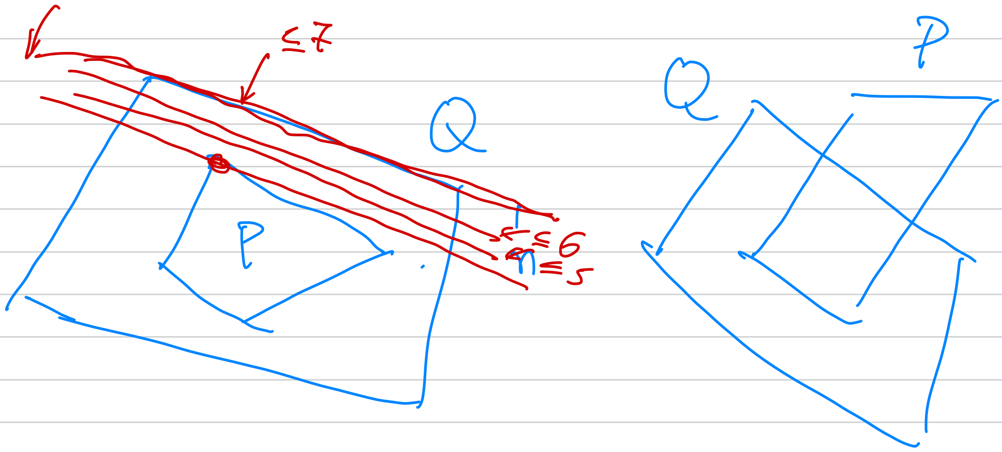
29-5-2024 Ασκήσεις Επανάληψης

Άσκηση 1

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \end{array}, \ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$$

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 14, \end{array} \ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \right\}$$

Περιγράψτε πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν $P \subseteq Q$



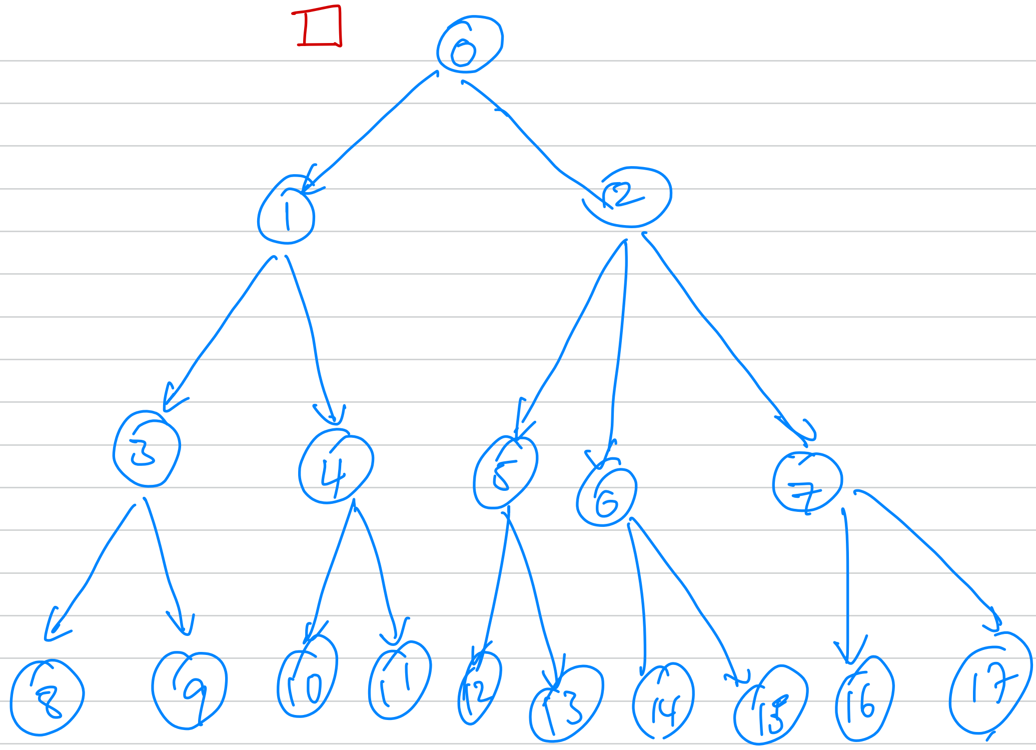
$\underline{P \subseteq Q}$: . . $\iff$

$\forall \ x \in P \Rightarrow x \in Q \iff$

$$\underbrace{\left\{ \forall \ x \in P \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \right\}}\ \overset{?}{\iff}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\{x_1 + x_2 + x_3 : x \in P\} \leq 7 \quad \leftarrow LP_1 \\ \text{και} \\ \max\{3x_1 + 2x_2 + 2x_3 : x \in P\} \leq 14 \quad \leftarrow LP_2 \end{array}}$$

Άσκηση 2



Όχημα στον κόμβο 0.

Διέλευση από τον κόμβο i επιφέρει κέρδος r_i

Μοντελοποίηση μέσω ΑΠ.

$x_i = 1$ (διέρχεται από κόμβο i) , $i=1,\dots,17$.

$$\max \sum_{i=1}^{17} r_i x_i$$

αν $x_3=1$ θα πρέπει $x_1 = 1$

ή ισοδ. (αν $x_1=0 \Rightarrow x_3=0$) $\Rightarrow \boxed{x_3 \le x_1}$

$\forall (i,j)\in E$: $x_j \le x_i$

Θέλουμε το όχημα να σταματήσει σε κάποιον τερματικό κόμβο κ' όχι νωρίτερα

(γενικά επιτρέπουμε $r_i \geqq 0$)

Για να εξασφαλίσουμε ότι θα φτάσει μέχρι το τέλος επιπλέον:

$$x_8 + \cdots + x_{17} = 1$$

Ασκηση 3 LP Πρόβλημα φόρτωσης σάκκου (knapsack problem)

Σακκίδιο όγκου V

n κατηγορείς τροφίμων

τρόφιμο j όγκο d_j ανα μονάδα (kg)

αξία r_j " " (kg)

Να βρεθούν οι ποσότητες από κάθε τρόφιμο που θα φορτωθούν ώστε να max συνολική αξία.

Να λυθεί μέσω του πρωτεύοντος και μέσω του δυικού (χωρίς την αντιστοιχία)

$$d_j, r_j > 0 \quad \forall j$$

① Πρωτεΐον

x_j: ποσότητα τροφ. j (σε kg)

$$Z_P = \max \sum_{j=1}^{n} r_j x_j$$

σε ΚΜ.

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + y = V$$

$$x_j \geq 0 \;, \; y \geq 0$$

Λύση Πρωτεΐνης

διάσταση $(m = 1 \;, \; n+1)$ $\qquad A = (d_1 \; d_2 \; \ldots \; d_n \; 1)$

$B = (d_j)$ ή $B = (1)$ όλοι αντιστρ.

αν $B = (d_j) \Rightarrow$ ΒΕΛ $\quad x_B = x_j = B^{-1} b = \frac{1}{d_j} V = \frac{V}{d_j}$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ V/d_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

όλο τοσακκίδιο γεμίζει με προϊόν j

$$Z = r_j x_j = r_j \frac{V}{d_j}$$

αν $B = (1) = A_{n+1} \Rightarrow y = V \quad x_j = 0 \;\; \forall j$

(σακκίδιο άδειο), $Z = 0$.

$n+1$ ΒΕΛ

$$z_1 = \frac{r_1}{d_1} V$$

$$z_2 = \frac{r_2}{d_2} V$$

$$\vdots$$

$$z_n = \frac{r_n}{d_n} V$$

$$z_{n+1} = 0$$

$$Z_P = \max_{j=1,\ldots,n+1} z_j$$

$$z_1, \ldots, z_n \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z_p = \max(z_1, \dots, z_n) = V \cdot \max\left\{\frac{r_1}{d_1}, \dots, \frac{r_n}{d_n}\right\}}$$

Αν j^0 : $\frac{r_{j^0}}{d_{j^0}} > \frac{r_j}{d_j} \quad \forall j \neq j_0$

$$\Rightarrow \quad x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ V/d_{j^0} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \Leftarrow$$ μοναδική Β.Λ.

Αν j^0, j^1 : $\frac{r_{j^0}}{d_{j^0}} = \frac{r_{j_1}}{d_{j_1}} = \max\left\{\frac{r_j}{d_j}\right\}$

οποιαδήποτε x : $\left.\begin{array}{l} d_{j_0} x_{j_0} + d_{j_1} x_{j_1} = V, \\ x_j = 0, \quad j \neq j_0, j_1 \end{array}\right\}$ βέλτιστη

Δυϊκό Πρόβλημα

$$\left.\begin{array}{l} z_p = \max \ r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \\ \qquad d_1 x_1 + \dots + d_n x_n \leq V \quad w \\ \qquad x_1 \geq 0 \ \dots \ x_n \geq 0 \end{array}\right\} \text{HK}_{max}$$

HK_{min}

$$Z_D = \min V w$$
$$d_1 w \geq r_1$$
$$d_2 w \geq r_2$$
$$\vdots$$
$$d_n w \geq r_n$$
$$w \geq 0$$

και

$$\Longleftrightarrow$$

$$d_1 w - v_1 = r_1$$
$$d_2 w - v_2 = r_2$$
$$\vdots$$
$$d_n w - v_n = r_n$$
$$w, v_1, \dots, v_n \geq 0.$$

$$Z_D = V \cdot \min w$$

x_1 $\quad w \geq r_1/d_1 \quad (>0)$

x_2 $\quad w \geq r_2/d_2 \quad (>0)$

$\vdots$

x_n $\quad w \geq \frac{r_n}{d_n} \quad (>0)$

$\quad w \geq 0$

$(\Rightarrow \quad w > 0)$

$$\Downarrow$$

βρίσκεται άμα $w^* = \max\left(\frac{r_1}{d_1}, \dots, \frac{r_n}{d_n}\right)$

$$Z_D = V \cdot \max\left(\frac{r_1}{d_1}, \dots, \frac{r_n}{d_n}\right) \quad (Z_P = Z_D)$$

Αν j^0 : μοναδικό μέγιστο $\quad w^* = \frac{r_{j_0}}{d_{j_0}}$

$$w^* > \frac{r_j}{d_j} \;\forall\; j \neq j_0 \quad \Longrightarrow$$

$\Rightarrow \quad x_j^* = 0 \quad \forall\, j \neq j_0$ (απὸ συμπληρωματικότητα)

Άσκηση 4 Έστω $z = \max c'x$

$$Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$

$A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $\quad b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

$c' = (c_1' \quad c_2')$, $\quad c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $c_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$

Να αποδείξετε $z = z_1 + z_2$

όπου $z_1 = \max\{c_1'x : A_1 x = b_1,\ x \geq 0\}$

$z_2 = \max\{c_2'x : A_2 x = b_2,\ x \geq 0\}$

(διάσπαση του αρχικού LP σε 2 μικρότερα)

Απόδειξη

$$Ax=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} A_1 x_1 = b_1 \\ A_2 x_2 = b_2 \end{matrix} , \quad \text{όπου} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{llll} z = \max & c_1' x_1 & + \; c_2' x_2 & \\ & A_1 x_1 & & = b_1 \\ & & A_2 x_2 & = b_2 \\ & x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & \end{array}} \quad \begin{matrix} x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \\ x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \end{matrix}$$

Πρέπει ν.δ.ο.

$\Rightarrow$ αν x^* ΒΛ στο z κ' $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$

τότε $\left.\begin{matrix} x_1^* \text{ ΒΛ στο } z_1 \\ x_2^* \text{ ΒΛ στο } z_2 \end{matrix}\right\}$ με άτοπο

$\Leftarrow$ Αν x_1^* ΒΛ στο z_1

και x_2^* ΒΛ στο z_2

θέτω $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ $\Bigg\} \Rightarrow x^*$ ΒΛ στο z

(με άτοπο)

συμπληρώστε την απόδειξη

Άσκηση 5

Έστω το πγπ.

$$z = \max \; 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 + x_6 + 12x_7 + 15x_8$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 15$$

$m=2$ (κμ)

$n=8$

$$3x_5 + x_6 + 4x_7 + 6x_8 = 24$$

$$x_j \geq 0$$

Να βρεθούν <u>όλες</u> οι βέλτιστες λύσεις

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b_1 = 15$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad b_2 = 24$$

$$z = z_1 + z_2$$

$$\left.\begin{aligned} z_1 = \max \; & 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 6x_4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 15 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{knapsack}$$

$$\left.\begin{aligned} z_2 = \max \; & 9x_5 + x_6 + 12x_7 + 15x_8 \\ & 3x_5 + x_6 + 4x_7 + 6x_8 = 24 \end{aligned}\right\} \text{knapsack}$$

z_1 : $\frac{r_j}{d_j}$: $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{1}, \frac{6}{2} = 3$ ← max $\frac{r_4}{d_4} = 3 = \max\left\{\frac{r_1}{d_1}, \frac{r_2}{d_2}, \frac{r_3}{d_3}, \frac{r_4}{d_4}\right\}$

$$\Rightarrow x_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15/2 \end{pmatrix} \qquad z_1^* = 6 \cdot \frac{15}{2} = 45$$

μοναδική ΒΛ.

z_2: $\frac{r_5}{d_5} = \frac{9}{3} = 3$, $\frac{r_6}{d_6} = 1$, $\frac{r_7}{d_7} = \frac{12}{4} = 3$, $\frac{r_8}{d_8} = \frac{15}{6} < 3$

$\max = 3 = \frac{r_5}{d_5} = \frac{r_7}{d_7}$

Πολλαπλές ΒΛ: $x_6^* = 0$, $x_8^* = 0$.

$$3x_5^* + 4x_7^* = 24 \quad , \quad x_5, x_7 \geq 0$$

$$z_2^* = 24 \cdot \frac{r_5}{d_5} = 3 \cdot 24 = 72$$

Συνολικά $z^* = z_1^* + z_2^* = 45 + 72 = 117$

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15/2 \\ x_5 \\ 0 \\ x_7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 3x_5 + 4x_7 = 24 \qquad x_5, x_7 \geq 0$$

x_1^*: $x_5 = 8$, $x_7 = 0$ $\quad x^* \quad$ x_2^*: $x_5 = 0$, $x_7 = 6$

$$x^* = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$x^* = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15/2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15/2 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 6

Δίνονται n αντικείμενα πρέπει να επιλεγούν k σε k διαδοχικές θέσεις ($k<n$) σε αύξουσα σειρά

Αν αντικ. i τοποθετηθεί στη θέση $j \Rightarrow$ ωφέλεια $= d_{ij}$

$i=1,\dots,n$

$j=1,\dots,k$

Να βρεθεί η τοποθέτηση που μεγιστοποιεί τη συνολική ωφέλεια

π.χ. $n=7$ αντικ. $(1,2,3,4,5,6,7)$

$k=4$

θέσεις: $\overset{1}{\underset{2}{\eta}}$ $\ 3 \leftarrow x_{32}=1$ __ __

π.χ.	1	2	3	4	
	1	3	6	7	$\leftarrow x_{2j}=0 \ \forall j$
	2	4	5	6	
όχι	$\underbrace{2 \quad 1}_{\times}$		3	4	

π.χ. αν $d_{32} = 100$ (μεγάλο) $x_{32}=1$

αν όμως $d_{11} = -900$, $d_{21} = -900$

Μοντελοποίηση μέσω ΑΠ.

Μεταβλητές: $x_{ij} = 1$ (αντικ. i στη θέση j)

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} d_{ij} x_{ij}$$

υπ.

Σε κάθε θέση 1 αντικ. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j=1,\dots,k$

Κάθε αντικ το πολύ σε μία θέση $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le 1 \quad i=1,\dots,n$

<u>Σε αύξουσα σειρά</u>

Θέση j

$$\begin{array}{ccccc} \_\_ & \_\_ & i & >i & >i \\ & & j & j+1 & j+2 \end{array}$$

$x_{ij}=1$

Αν $x_{ij}=1 \Rightarrow \quad =0 \quad \forall\, m<i,\ l>j$

$1-x_{ml}\ 1$

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{x_{ij} \le 1-x_{ml} \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k \\ m=1,2,\dots,i-1 \\ l=j+1,\dots,k \end{array}}$

Δείτε αν είναι εφικτή μοντελοποίηση με λιγότερους περιορισμούς

Πχ: $x_{ij} \le 1-x_{m,j+1}, \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,k-1 \\ m=1,2,\dots,i-1 \end{array}$

$$\begin{array}{cc} i & \ge i \\ \_\_ & \_\_ \\ j & j+1 \end{array}$$

Άσκηση 7

Σε στρογγυλό τραπέζι 9 καθίσματα

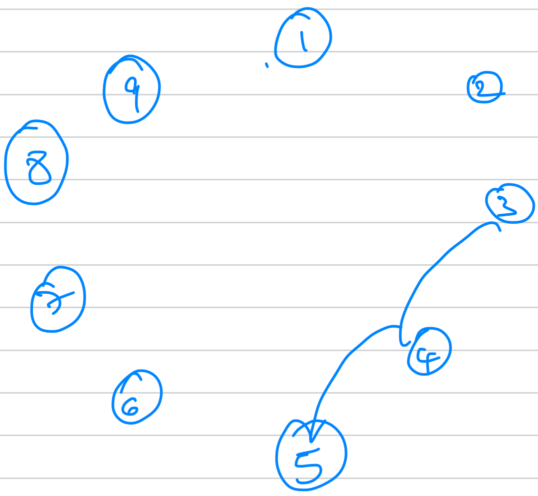
Σε κάθε κάθισμα το πολύ 1 άτομο

όμως μεταξύ δύο ατόμων τουλάχιστον 2 κενά

Αν κάποιο άτομο τοποθετηθεί στο κάθισμα $j \Rightarrow$ κέρδος $= b_j$

$j = 1, \dots, 9$

Μεγιστοποίηση συνολικού κέρδους. (μοντελ. μέσω ΑΠ).



Μεταβλητές

$x_j = 1$ (καταλαμβάνεται το κάθισμα j)

$j = 1, \dots, 9$.

$$\max \sum_{j=1}^{9} b_j x_j$$

αν $x_1 = 1 \Rightarrow$

$x_2 = 0 \Rightarrow 1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_1 \le 1 - x_2 \Leftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 \le 1}$

$x_3 = 0 \Rightarrow 1 - x_3 = 1$

$x_8 = 0 \Rightarrow 1 - x_8 = 1$

$x_9 = 0 \Rightarrow 1 - x_9 = 1$

$x_1 + x_3 \le 1$

$x_1 + x_8 \le 1$

$x_1 + x_9 \le 1$

$x_2 + x_3 \le 1$

$x_2 + x_4 \le 1$

$x_2 + x_9 \le 1$

$\vdots$

Εναλ. ανά 3:

$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$

$x_2 + x_3 + x_4 \le 1$.

$\vdots$

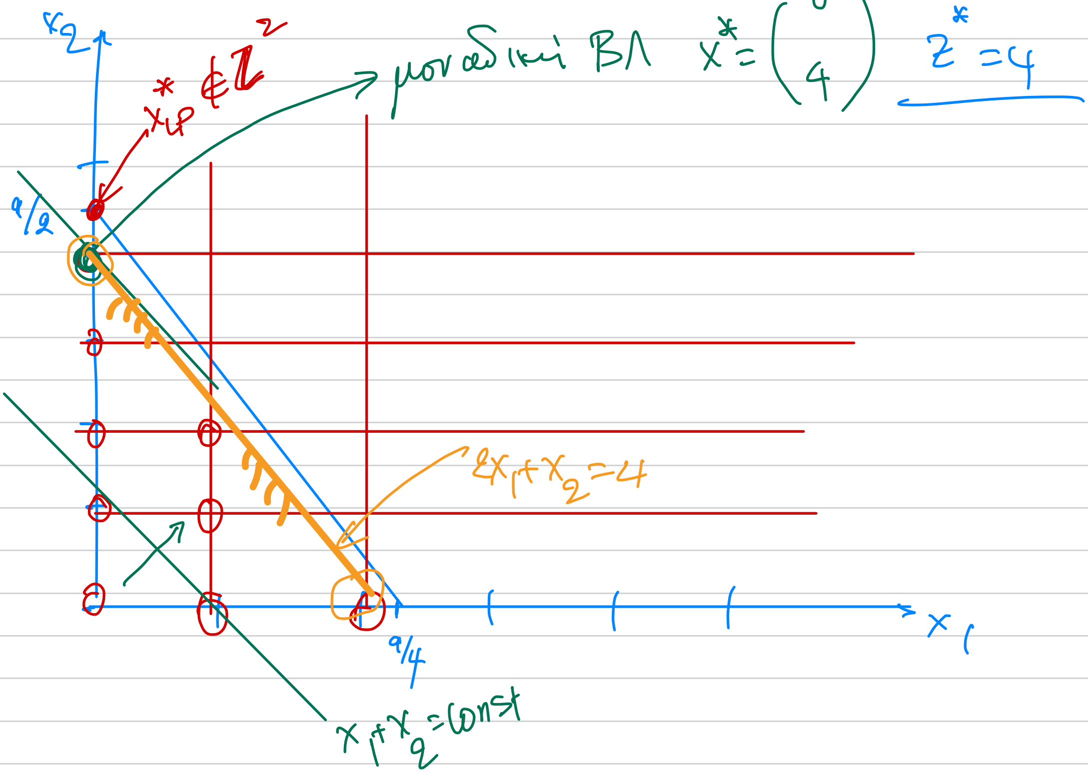
Άσκηση 8

integer knapsack

NP-complete ?

$$\begin{cases} \max & x_1+x_2 \\ & 4x_1+2x_2 \le 9 \\ & x_1, x_2 \ge 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(a) Να βρεθεί η β.λ. γραφικά



(b) Να λυθεί το πρόβλημα z_{LP}

$$z_{LP} = \max \ x_1 + x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

(knapsack)

$x_2^* = 9/2$

$x_1^* = 0$

$$x^*_{LP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9/2 \end{pmatrix} \qquad z_{LP} = x_1^* + x_2^* = \frac{9}{2}$$

$> z$

(γ) Από το (b) να κατασκευαστεί μια τομή Gomory.

Σε ΚΜ το z_{LP}

$$\max \; x_1 + x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$BA = x^*_{LP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x_N \\ \leftarrow x_B \\ \end{array}$$

$$x_B = x_2 \qquad x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{2\underbrace{x_1}_{=0} + \overbrace{x_2}^{9/2} + \frac{1}{2}\underbrace{x_3}_{=0} = \frac{9}{2}}$$

$$a_{i_1}x_1 + a_{i_2}x_2 + \cdots \underbrace{x_i}_{\notin \mathbb{Z}} + \cdots a_{i_n}x_n = a_{i0}$$

$$\Downarrow$$

$$\lfloor a_{i_1} \rfloor x_1 + \lfloor a_{i_2} \rfloor x_2 + \cdots x_i + \cdots + \lfloor a_{i_n} \rfloor x_n \leq \lfloor a_{i0} \rfloor$$

το μη Gomory

Gomory cut

$$2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 \leq \left\lfloor \frac{9}{2} \right\rfloor = 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

Εξετάσεις : 17/6 ? (11 − 2)