20/5/2024

Μέθοδος Τεμνόντων Επιπέδων (Cutting Planes)

$$z = \max c'x \qquad F \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

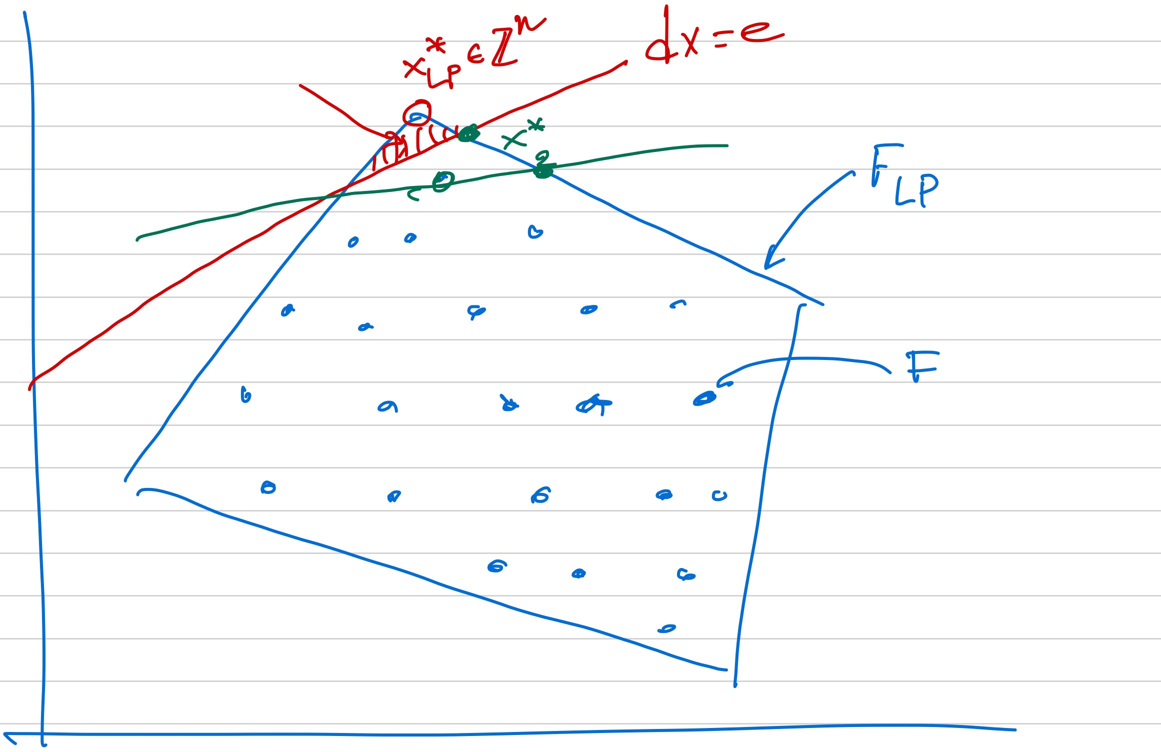
Χαλάρωση: $$z_{LP} = \max c'x \qquad \left.\begin{matrix} Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} F_{LP}$$

Έστω x^*_{LP} βέλτιστη λύση του z_{LP}

Αν $x^*_{LP} \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow$ βέλτιστη στο z : $z = z_{LP}$

Αν $x^*_{LP} \notin \mathbb{Z}^n$ προσπαθούμε να βρούμε μια ανισότητα (ένα νέο περιορισμό $d'x \leq e$) τέτοιον ώστε $d'x^*_{LP} > e$

αλλά $d'x \leq e \quad \forall x \in F$



? Πώς βρίσκουμε τα d, e ?

Παράδειγμα 1

Έστω x^*_{LP}, B βασικός πίνακας $\boxed{x^*_{LP} \notin F}$

N ο μη βασικός

$\mathcal{N} = \{$μη βασικές μεταβλητές$\}$

Στο x^*_{LP} : $x_j^* = 0 \quad \forall j \in \mathcal{N}$

Έστω x μια λύση του F $(x \in \mathbb{Z}^n)$

τέτοια ώστε $x_j = 0, \forall j \in N$

Τότε η $x \in F_{LP}$

Όμως στο F_{LP} υπάρχει μοναδική λύση με $x_j = 0 \ \forall j \in N$

Τότε η $x = x^*_{LP}$ (επειδή υπάρχει μοναδική λύση του F_{LP} με $x_j = 0 \ \forall j \in N$ δηλαδή η $x_B = B^{-1} b$)

Άτοπο $(x^*_{LP} \notin \mathbb{Z}^n)$

Επομένως ~~...~~ δεν υπάρχει $x \in F : x_j = 0 \ \forall j \in N$

Επομένως

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j > 0 \quad \forall \ x \in F \\ \text{Επειδή} \quad \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall \ x \in F \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \geq 1 \quad \forall \ x \in F$$

cutting plane

Όμως $\sum_{j \in \mathcal{N}} x_j < 1$ για $x = x^*_{LP}$

Παρ. 2 : Τομές Gomory (Gomory cuts)

Έστω $x^*_{LP} \notin \mathbb{Z}^n$

Έστω B ένας βασικός πίνακας από τον x^*_{LP}

Τότε $\underline{x^*_{LP} = B^{-1}b}$

γενικά $Ax=b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow \boxed{x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b}$

απαλοιφή Gauss

Έστω $\bar{a}_j = B^{-1}A_j \ , \ j \in N$

$$\bar{a}_j = \begin{pmatrix} \bar{a}_{1j} \\ \vdots \\ \bar{a}_{mj} \end{pmatrix} = (\bar{a}_{ij})_{i=1,\dots m}$$

$\bar{a}_{i0} = B^{-1}b$

i-γραμμή του Simplex tableau.

Τότε $\forall\ i \in B$ $\boxed{x_i + \sum_{j\in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}}$ $\underline{\forall\ x \in F_{LP}}$

Για $x = x^*_{LP}$: $x_i = x^*_{i,LP}$ $\forall i$ $\exists\ i \in B: x_i \notin \mathbb{Z}$

$x_i = \bar{a}_{i0}$

και $x_j = 0$ $j \in N$

$$x_i + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0} \qquad \forall\ x \in F_{LP}$$

Επειδή $\left.\begin{array}{l} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor \leq \bar{a}_{ij} \\ x_j \geq 0 \end{array}\right\}$ $x_i + \sum_{j\in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leq x_i + \sum_j \bar{a}_{ij} x_j = \bar{a}_{i0}$

$\forall\ x \in F_{LP}$

Όμως για $x \in F$ $(x \in \mathbb{Z}^n)$

$$x_i + \sum_{j\in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_i + \sum_{j\in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \le \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor \quad \forall\ x\in F$$

$$dx \le e \quad \forall\ x \in F$$

Για $x = x^*_{LP}$: $\left.\begin{array}{l} x_i^* = \bar{a}_{i0} \notin \mathbb{Z} \\ x_j^* = 0 \quad \forall j \in N \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$d' x^*_{LP} = x_i^* = \bar{a}_{i0} > \lfloor \bar{a}_{i0} \rfloor \quad \text{επειδή } x_i^* \notin \mathbb{Z}$$

$$d' x^*_{LP} > e$$

$\Rightarrow \quad dx \le e$ cut $\leftarrow$ Gomory cut

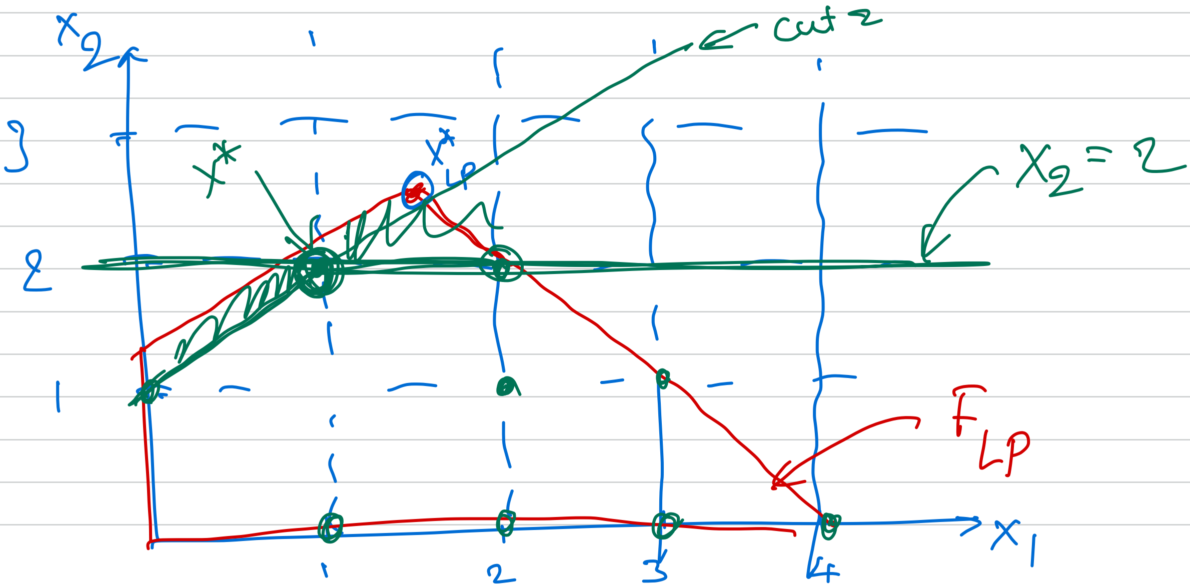
Παράδειγμα Gomory Cuts

$$\min \quad x_1 - 2x_2$$

$$-4x_1 + 6x_2 + x_3 = 9$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

$$x_1, \dots, x_4 \ge 0 \quad \in \mathbb{Z}$$



$$x^*_{LP} = \begin{pmatrix} 15/10 \\ 25/10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως $x_2^* = \frac{25}{10} \notin \mathbb{Z}$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N = B^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}{10} \; ?$$

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 15/10 \\ 25/10 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{a}_{20} = \frac{25}{10}$$

από πράξεις η δεύτερη γραμμή του $x_B + B^{-1}N x_N = b$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 + \frac{1}{10}x_3 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{25}{10}} \; ?$$

cut $\quad x_2 + 0x_3 + 0x_4 \leq 2 \Rightarrow x_2 \leq 2$

Προσθέτουμε τον $x_2 \leq 2 \Rightarrow x_2 + x_5 = 2$

Στο νέο LP $\Rightarrow$ $x_1^* = 3/4 \notin \mathbb{Z}$

$x_2^* = 2$

$$\left.\begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix}\right\} N$$

Από $B^{-1}N$ στο νέο πρόβλημα

$$x_1 - \frac{1}{4}x_3 + \frac{6}{4}x_5 = \frac{3}{4}$$

Gomory cut $\boxed{x_1 - x_3 + x_5 \le 0}$ $\Leftrightarrow$ $-3x_1 + 5x_2 \le 7$

Προσθέτουμε τον περιορισμό

στο νέο πρόβλημα $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$