17-4-2024

① Παραδείγματα LP in R

② Συνέχεια δυϊκότητα

Παράδειγμα 1

Παραγωγή 2 προϊόντων με 3 πόρους

$$\max \quad 14x_1 + 10x_2 \quad \leftarrow \text{obj}$$

$$\begin{aligned} \text{υ.π.} \quad 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Συνάρτηση [lp("max", obj, A, fora, b)]

$$\text{obj} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{fora} = \begin{pmatrix} \text{"<="} \\ \text{"<="} \\ \text{"<="} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vectors vs Lists in R.:

vector (5, 2, 7, 9) διάνυσμα (numeric)

("a", "bb", "word", "h") διάνυσμα (string)

$a = (5, \text{"a"})$

list $(5, \text{"a"}, (7,2), \text{list}(7, \text{"b"}))$

1 2 3

Παράδ 2 — Παραγωγή / Αποθήκευση

Παραγωγή ενός προϊόντος σε N περιόδους

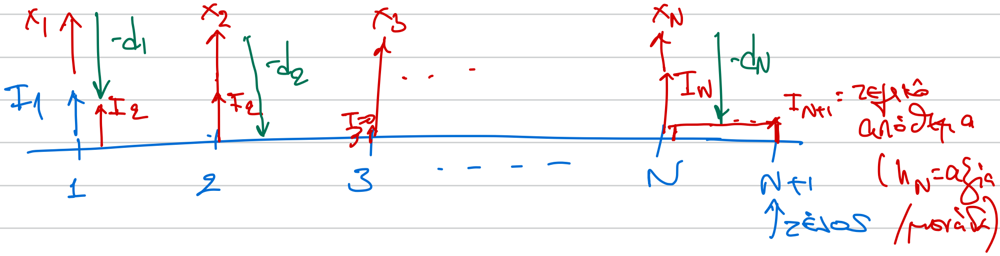
δεδομένα

$d = (d_1, \dots, d_N)$: ζήτηση σε κάθε περίοδο (χωρίς ελλείψεις)

c_j = κόστος παραγωγής/μονάδα περ. j

h_j = " αποθ ανά μονάδα περ. $j \to$ περ. $(j+1)$

I_1 = αρχικό απόθεμα



Μεταβλητές $x_1, \dots, x_N$: ποσ. παραγωγής

$I_2, \dots, I_{N+1}$: απόθεμα στην αρχή περιόδων $2, 3, \dots, N+1$

LP : $\min \sum_{j=1}^{N} c_j x_j + \sum_{j=1}^{N} h_j I_{j+1}$

$$I_j + x_j - d_j = I_{j+1}, \quad j=1,2,\dots,N$$

$$x_j, I_j \geq 0 \quad \forall j$$

R function invlpmodel$(d, c, h, I_1) \rightarrow$ [πίνακες για την lp Solve]

πχ. $N=3$

min $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + h_1 I_2 + h_2 I_3 + h_3 I_4$

$$\begin{array}{llllll}
j=1 & x_1 & & & -I_2 & & = d_1 - I_1 \\
 & & x_2 & & +I_2 & -I_3 & = d_2 \\
 & & & x_3 & & +I_3 \; -I_4 & = d_3
\end{array}$$

$$\text{objf} = \left(\overbrace{c_1 \quad c_2 \quad c_3}^{c} \quad \overbrace{h_1 \quad h_2 \quad h_3}^{h} \right)$$

$$A = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A_1} \quad \underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A_2} \right)$$

$$\text{rhs} = \begin{pmatrix} d_1 - I_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \qquad d, \; -I_1$$

$$\text{fora} = \begin{pmatrix} "=" \\ "=" \\ "=" \end{pmatrix}$$

I_2 :

$j=1 \qquad x_1 + I_1 - d_1 = I_2 \qquad -1$

$j=2 \qquad x_2 + I_2 - d_2 = I_3 \quad -1 \qquad +1$

$j=3 \qquad x_3 + I_3 - d_3 = I_4 \quad +$

Δημιουργία "wrapper function"

("περιτύλιγμα")

wrapper

```
function invsolution(c, d, h, I_1)
{
    :     A =
    :     b =
    :
        lp("min", A, . . . )
    :
    return(solution)
}
```

function: $\quad$ invpolicy$(d, P^{(\text{prod.cost})}, h, I_1)$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x^*,\ I^*,\ \text{cost}}$$

d, p, h : vectors(N) — data

$I_1 \geq 0$ — input

$N = \text{length}(d)$

$\text{obf} = c(p, h)$

↑ vector

$\text{rhs} = d$

$\text{rhs}[1] = d[1] - I_1$

$A =$

$A_1 = \text{diag}(N)$ (matlab "eye(N)")

$$A_2 = \begin{array}{c c}
\begin{pmatrix}
-1 & & & & & \\
1 & -1 & & & 0 & \\
 & 1 & \ddots & & & \\
 & & -1 & & & \\
 & 0 & +1 & \ddots & & \\
 & & & \ddots & -1 & \\
 & & & & 1 & -1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \\ j \\ j+1 \\ N-1 \\ N \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & j & N-1 & N \end{array} &
\end{array}$$

$N \times N$

$$A_2 = \begin{pmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}_{N \times N}$$

$$A_2 = \text{matrix}\Big(\underbrace{\overbrace{(0, \dots, 0)}^{N^2}}_{\text{rep}(0, N^2)}, N, N\Big)$$

$$\text{for } (j \text{ in } \underbrace{1:(N-1)}_{\to (1, 2, \dots, N-1)})$$

$\{$

$A_2[j, j] = -1$

$A_2[j+1, j] = 1$

$\}$

$A_2[N, N] = -1$

$A = (A_1 \;\; A_2)$ cbind [A_1] [A_2]

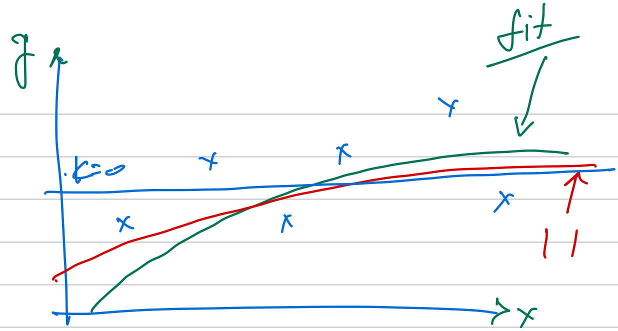
column

() rbind $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 3

Πολυωνυμική παρεμβολή

$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$



Παλινδρόμηση :

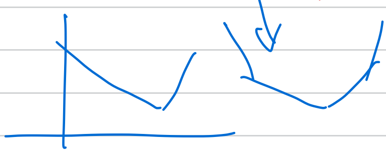
$$\min_{a,b,\gamma} \sum_{j=1}^{n} (y_j - a x_j^2 - b x_j - \gamma)^2 \quad : SSE$$

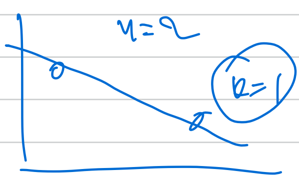
ΟΧΙ ΠΓΠ

Εδώ

$$\min_{a,b,\gamma} \sum_{j=1}^{n} \left| y_j - a x_j^2 - b x_j - \gamma \right| \rightarrow \text{(absolute regression)}$$

Σε forecasting χρονοσειρών MAD (mean absolute deviation)





n=3 k=2

$\Downarrow$

minimax

μη (τμ. γραμμική, κυρτής)

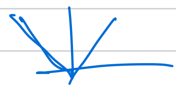
$\Downarrow$ LP ??

Δεδομένα $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ $\Big\}$ n σημεία επιπέδου

K: βαθμός πολυωνύμου

Ζητείται $a=(a_0,\dots,a_k)$

$$:\min_{a} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left| y_j - a_0 - a_1 x_j - a_2 x_j^2 - \dots - a_k x_j^k \right|}_{\text{γραμμική } (a)}$$



Create a wrapper function

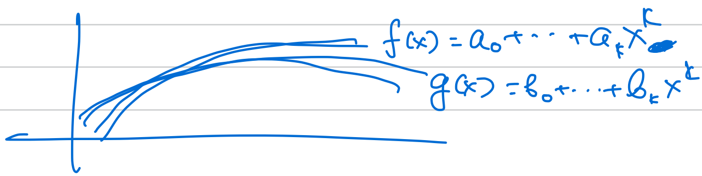
Δεδομένα (x, y, k)

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $0 \le k \le n-1$

$$\Downarrow$$

$(a_0, a_1, \dots, a_k)$ best fit $\Sigma|\ \ |$

[Επίσης υπολογίστε (due) κ' τα $(b_0, b_1, \dots, b_k)$: best fi $\Sigma(\ \ )^2$]



Π.χ.

$$\min \sum c_j |x_j| \qquad c_j > 0$$

$$Ax = b$$

1) $x_j = u_j - v_j \qquad u_j, v_j \geq 0$

αποδείξτε 20

$$\min \sum_j c_j (u_j + v_j)$$

$$A(u - v) = b \implies u_j^* v_j^* = 0 \quad \forall j$$

$(x = u - v)$

$|2| = 2 - 0$

$= 3 - 1$

$4 - 2$

$7 - 5$

$\vdots$

---

2) $$\min_{x_j} \sum_j c_j \underbrace{|x_j - d_j|}_{} , \quad x_j \in \mathbb{R}$$

$$Ax = b$$

$$x_j - d_j = u_j - v_j$$

$$\Updownarrow$$

$$\min \sum_j c_j (u_j + v_j)$$

$$Ax = b$$

$$x_j - d_j = u_j - v_j$$

Εδώ

Πρβλ.

$$\min_{a,\, u_j,\, v_j} \sum_{j=1}^{N} (u_j + v_j)$$

$$y_j - \sum_{i=0}^{K} a_i x_j^i = u_j - v_j \quad , j=1,\dots,n$$

$$\boxed{a_i \in \mathbb{R}} \; , \quad u_j, v_j \geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

$\Downarrow$

wrapper function

Η lp υποθέτει ≥ 0 για τις μεταβλητές

Επομένως $a_j = a_j' - a_j''$, $a_j' - a_j'' \geq 0$.