3-4-2024

Κριτήριο Βελτιστότητας - Μέθοδος Βελτίωσης

Έστω $\underline{x}$: κορυφή της F

$\underline{x}$: ΒΕΛ , με βασικό πίνακα B

$$\left[\ \underline{x} : \text{μη εκφυλ.} \ : \ B \text{ μοναδικός}, \quad \underline{x}_B = B^{-1}b > 0 \ \right]$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}B \\ \}N \end{array}$$

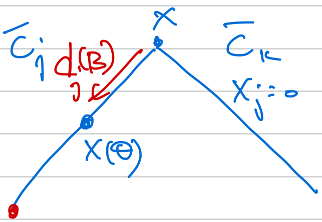
$$\underline{c} = \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}B \\ \}N \end{array}$$

Στη λύση $\underline{x}$ η τιμή της $f(x) = c'x =$

$$= c_B' x_B + c_N' x_N = \underbrace{c_B' B^{-1}}\, b$$

Ερώτημα: Πώς επηρεάζεται η $f(\underline{x})$ όταν από το $\underline{x}$ κινηθούμε κατά μήκος μιας βασικής κατεύθυνσης $d_j(B)$, $j \in N$

$$\underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \cdot d_j(B)$$



$$f(x(\theta)) = c'\underline{x} + \theta \underline{c}' d_j(B) = f(\underline{x}) + \theta \cdot c' d_j(B)$$

$$c' d_j(B) \qquad\qquad d_j(B) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} -B^{-1}A_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \}\, B \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k d_{jk}(B) =$$

$$c_B'(-B^{-1}A_j) + c_j \cdot 1 = c_j - c_B' B^{-1} A_j \equiv \bar{c}_j$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\underline{x}(\theta)) = f(\underline{x}) + \theta \bar{c}_j}$$

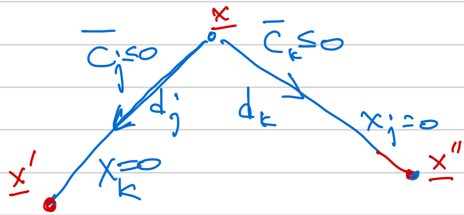
$\bar{c}_j$: ρυθμός μεταβολής της $f(\underline{x})$ όταν κινούμαστε κατά μήκος της $d_j(B)$

→ (ελαττωμένο κόστος) (reduced cost) της μεταβλητής x_j (μη βασική) στη ΒΕΛ x με B

Περίπτωση 1 Αν $\bar{c}_j > 0$ για κάποιο $j \in N$ $\Rightarrow$ $\underline{x}$ όχι βέλτιστη (βήμα βελτίωσης)

Περίπτωση 2 Αν $\bar{c}_j \le 0$, $j \in N$

$\boxed{\text{Θδο } x \text{ βέλτιστη}}$



$f(\underline{x}') \le f(\underline{x})$

$f(\underline{x}'') \le f(\underline{x})$

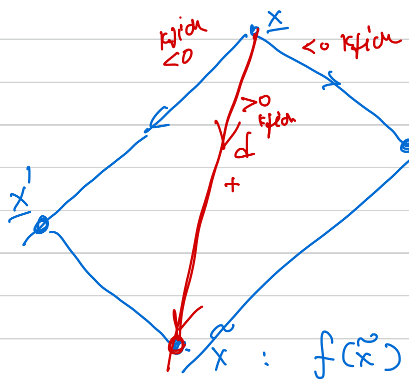
① Μπορούμε να πούμε $f(\underline{x}') \le f(\underline{x})$, $f(\underline{x}'') \le f(\underline{x})$

όμως ? $\exists$ άλλες που είναι καλύτερες;

Θα πρέπει νδο <u>δεν υπάρχουν</u>

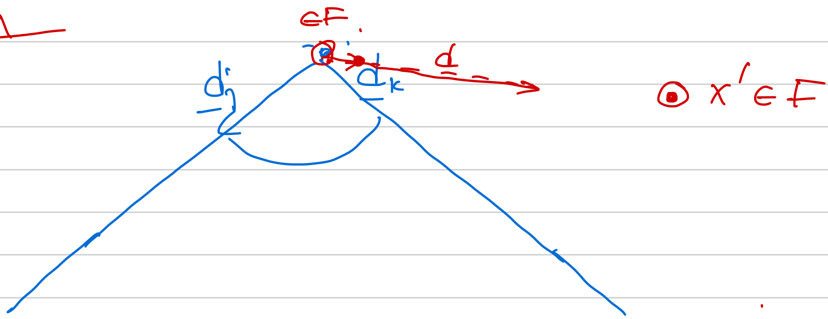
② Από γραμμικότητα της $f(\underline{x})$

Στην κατεύθυνση $\underline{d}_j$ (B) η συνάρτηση <u>πάντα μειώνεται</u>



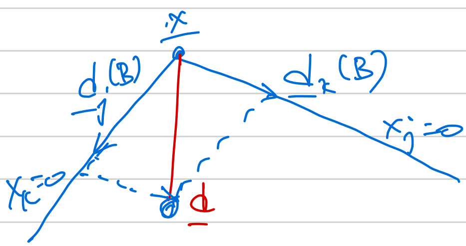
: $f(\tilde{x}) > f(\underline{x})$

Παρατήρηση



Δ.Ο. Αν κινηθούμε προς μια εφικτή κατεύθυνση από $\underline{x}$ αποκλείεται να συναντήσουμε $\underline{x}' \in F$

Λήμμα



Έστω ΒΕΛ $\underline{x}$, με πίνακα B κ' βασικές κατευθύνσεις $\underline{d}_j(B)$, $j \in N$.

Έστω μια εφικτή κατεύθυνση $\underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ στο $\underline{x}$

Τότε !

(1) $d_j \geq 0 \quad \forall j \in N$

(2) $\underline{d} = \sum_{j \in N} d_j \, \underline{d}_j(B) +$

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ \\ d_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \}B \\ \\ \}N \end{matrix} = \begin{pmatrix} d_B \\ d_N \end{pmatrix}$$

Απόδειξη

① $\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση $\exists\, \theta > 0 : \underline{x} + \theta \underline{d} \geq 0$

$\underline{x}$ ΒΕΛ (B) $\Rightarrow x_j = 0 \quad j \in N$

$$\left.\begin{aligned} x_j + \theta d_j &\geq 0 \\ x_j &= 0 \end{aligned}\right\} \forall j \in N \Rightarrow d_j \geq 0 \quad \forall j \in N$$

② d εφ. κατευθ. $\Rightarrow \quad Ad = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j A_j = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{j \in B} d_j A_j} + \sum_{j \in N} d_j A_j = 0$$

$$\Rightarrow B \cdot d_B + \sum_{j \in N} d_j A_j = 0 \Leftrightarrow$$

$$d_B = -\sum_{j \in N} d_j B^{-1} A_j = \sum_{j \in N} d_j \underline{(-B^{-1} A_j)}$$

$$= \sum_{j \in N} d_j \, \underline{d}_j (B)$$

Παρατήρηση Επεκτείνουμε τον ορισμό του $\overline{c}_j$

$$\overline{c}_j = c_j - c_B' \underbrace{B^{-1} A_j} \quad \text{για } j = 1, \dots, n$$

(και για $j \in B$).

Τότε $\bar{c}_j = 0$ για $\underline{\underline{j \in B}}$

$$A = \Big(\overbrace{\underbrace{A_1 \ \cdots \ A_m}_{B}}^{j \in B} \quad A_n \Big)$$

$$B^{-1}B = I \iff B^{-1}\left(A_1 \cdots \overset{A_j}{\cdots} A_m\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & \vdots & & 1 \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$j \in B$ $\quad B^{-1}A_j = e_j = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$

$$\Rightarrow c_B' B^{-1} A_j = \left(c_1 \cdots c_m\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} = c_j$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{c}_j = c_j - c_j = 0}$$

Θεώρημα Εστω ότι όλες οι ΒΕΛ μη εκφυλισμένες

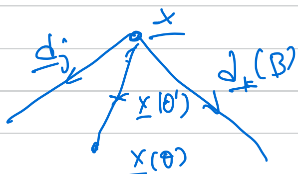
Εστω μια ΒΕΛ $\underline{x}$ με B.

Τότε η $\underline{x}$ βέλτιστη λύση ανν $\boxed{\bar{c}_j \le 0 \ \forall j=1,\dots,n}$

Απόδειξη

(α) Εστω $\bar{c}_j \le 0 \ \forall j \in N$ (Επομένως $\bar{c}_j \le 0 \ \forall j$)

Εστω $\underline{d}$ εφικτή κατεύθυνση $\Rightarrow \exists\ \theta > 0 : \underline{x}(\theta) = \underline{x} + \theta \underline{d} \ge 0$



F κυρτό

$\Rightarrow \underline{x}(\theta') \ge 0 \quad \forall\ \theta' \in [0, \theta]$

Για $\theta' \in [0, \underline{\theta}]$: $f(\underline{x}(\theta')) = c'(\underline{x} + \theta' d) =$

$$= c'\underline{x} + \theta' c' d = f(\underline{x}) + \theta' c' d$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}(\theta')) = f(\underline{x}) + \theta' \cdot c' d$$

$$= f(\underline{x}) + \theta' \cdot c' \cdot \sum_{j \in N} d_j \, \underline{d}_j(B)$$

$$= f(\underline{x}) + \overset{>0}{\theta'} \cdot \sum_{j \in N} \overset{\ge 0}{d_j} \left(\underline{c}' \cdot \underline{d}_j(B) \right)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow f(\underline{x}(\theta')) = f(\underline{x}) + \theta' \cdot \sum_{j\in N} d_j \bar{c}_j \\ &\qquad \forall\, \theta' \in [0,\theta] \\ &\text{κ'}\quad d_j \geq 0 \quad \forall\, j\in N \\ &\qquad \bar{c}_j \leq 0 \quad \forall\, j \in N \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\underline{x}(\theta')) \leq f(\underline{x}) \qquad \forall\, \theta' \in [0,\theta]$$

$\Rightarrow$ $\underline{x}$ τοπικό μέγιστο στο F

επομένως λόγω γραμμικότητας

$\underline{x}$ βέλτιστη λύση (ολικό μέγιστο)

(b) Έστω $\bar{c}_j > 0$ για κάποιο $j \in N$.

Έχουμε δείξει ότι κινούμενοι πάνω στη $\underline{d}_j(B)$ η $f(\underline{x})$ αυξάνει αυστηρά

$\Rightarrow$ $\underline{x}$ όχι βέλτιστη.

$\square$

$$\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j \qquad j = 1, \dots, n$$

Έστω $\bar{c}' = [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_n]$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{c}' = c' - c_B B^{-1} A}$$

Κριτήριο βελτιστότητας του B (δηλ. της $\underline{x}$)

optimality condition $\boxed{\bar{c}' = c' - c_B' B^{-1} A \leq 0}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{c_B' B^{-1}}_{w'} A \geq c' \Leftrightarrow w' A \geq c'$$

$\downarrow$ δυϊκές μεταβλητές

Έστω $\underline{x}$ όχι βέλτιστη κ' $\bar{c}_j > 0$ για κάποιο $j \in N$

Ξέρουμε: αν $\underline{d}_j(B) \geq 0 \Rightarrow$ ακραία ακτίνα. μη φραγμένο πρόβλημα.

αν $\exists k : d_{j_k}(B) < 0 \Rightarrow \exists$ νέα καλύτερη ΒΕΛ στην κατ. $d_j(B)$

Αλγόριθμος Simplex

(*) $F \neq \emptyset$, μπορούμε να βρούμε μια αρχική ΒΕΛ

(**) Έστω όλες οι ΒΕΛ μη εκφυλισμένες

1. Έστω $\underline{x}$ ΒΕΛ με βασικό πίνακα B, οι υπόλοιπες στήλες N $\quad A=(B \;\; N)$

Τότε $x_B = B^{-1} b$, $x_N = 0$

$$\underline{c}' = (\underline{c}_B' \;\; \underline{c}_N')$$

2. Έστω $\bar{c}' = \underline{c}' - c_B' B^{-1} A$

$$\left(\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j \,,\; j = 1, \ldots, n\right)$$

Αν $\bar{c}_j \leq 0 \;\; \forall j \in N \Rightarrow \underline{x}$: βέλτιστη

Διαφ. έστω $j \in N$: $\bar{c}_j > 0$ (αν περισσότερα από 1, επιλ. αυθαίρετα)

3. Έστω το διάνυσμα βασικής κατεύθ. $\underline{d}_j(B) = \begin{pmatrix} -B^{-1}A_j \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$

Αν $\underline{d}_j(B) \geq 0 \Rightarrow$ μη φραγμένο πρόβλημα $(z = +\infty)$

(4) Διαφορετικά,

$$\theta_{min} = \min\left\{ -\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}},\ i=1,\dots,m,\ d_{B(i)}<0 \right\}$$

$(\theta_{min} > 0$ επειδή $x_{B(i)} > 0)$

Νέα ΒΕΛ $\boxed{\underline{x}^{new} = \underline{x} + \theta_{min}\, \underline{d}_j(B)}$

Θέτουμε $\underline{x} = \underline{x}^{new}$ επιστρ. στο βήμα 1