Α.7.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΡΙΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός τριτοβάθμιου πολυωνύμου. Η θεωρία μας είναι διατυπωμένη για πολυώνυμα με Πραγματικούς και Μιγαδικούς Συντελεστές, αλλά ισχύει για μια ευρύτερη κατηγορία Σωμάτων.

Στο κεφάλαιο αυτό, R είναι οι Πραγματικοί αριθμοί και C είναι οι Μιγαδικοί αριθμοί. Για τα R,C, δεχόμαστε ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

Α.7.1.Θεώρημα. Το R είναι Σώμα με Διάταξη, όπου, για κάθε $\alpha\epsilon R$, $\alpha>0$, υπάρχουν $\beta,\gamma\epsilon R$, ώστε

$$\beta^2=\alpha,\quad \gamma^3=\alpha.$$

(Σημείωση. Δηλαδή, κάθε θετικό στοιχείο του R, έχει μια τουλάχιστον "Τετραγωνική Ρίζα" (Square Root), και μια τουλάχιστον "Κυβική Ρίζα" (Cubic Root)).

Α.7.2.Θεώρημα. Για κάθε $\alpha\epsilon C$, υπάρχει $\gamma\epsilon C$, έτσι ώστε

$$\gamma^3=\alpha.$$

(Σημείωση. Δηλαδή, κάθε Μιγαδικός αριθμός έχει μια τουλάχιστον Μιγαδική Κυβική Ρίζα).

Τα παραπάνω θεωρήματα αποδεικνύονται σε Βιβλία Μαθηματικής Ανάλυσης.

Προσοχή. Όλα τα πολυώνυμα του κεφαλαίου αυτού έχουν Πραγματικούς ή Μιγαδικούς συντελεστές.

Στο κεφάλαιο αυτό, θεωρούμε το Πολυώνυμο

Α.7.3. $f(x)=\delta+\gamma x+\beta x^2+\alpha x^3$ με $\alpha\neq 0$. Σκοπός μας είναι να βρούμε τύπους για τις ρίζες του f. Τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, είναι Πραγματικοί ή Μιγαδικοί.

Θεωρούμε το πολυώνυμο, $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})$. Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε ότι $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})=\alpha x^3+\Gamma x+\Delta$

όπου, $\Gamma=\beta^2/3\alpha^2-2\beta/3\alpha+\gamma)$, $\Delta=(-\beta^3/27\alpha^3+\beta^2/9\alpha^2-\beta/3\alpha+\delta)$.

Είναι αρκετό να βρούμε τις ρίζες του $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})$, διότι αν x_1, x_2, x_3, είναι οι ρίζες του $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})$, τότε $(x_1-\frac{\beta}{3\alpha})$, $(x_2-\frac{\beta}{3\alpha})$, $(x_3-\frac{\beta}{3\alpha})$ είναι οι ρίζες του $f(x)$, (Γιατί;). Το $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})$ είναι απλούστερο από το $f(x)$, διότι δεν έχει δευτεροβάθμιο συντελεστή. Οπότε τελικά, έχουμε να βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου.

<u>Α.7.4</u>. $g(x)=\frac{1}{\alpha}f(x-\frac{\beta}{3\alpha})=x^3+px+q$, όπου $p=\frac{\Gamma}{\alpha}$, $q=\frac{\Delta}{\alpha}$.

<u>Α.7.5. Ορισμός.</u> Έστω ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι ρίζες ενός πολυωνύμου f, τρίτου βαθμού. Τότε ορίζουμε

$$\Delta(f)=((\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)(\rho_3-\rho_1))^2.$$

Το $\Delta(f)$ ονομάζεται Διακρίνουσα (Discriminant) του πολυωνύμου f.

Ορίζουμε, $\Delta=-4p^3-27q^2$. Αποδεικνύεται ότι $\Delta=\Delta(g)$, (Βλέπε Άσκηση Α.7.5.).

Με το σύμβολο $\sqrt{-3\Delta}$, εννοούμε έναν μιγαδικό αριθμό που έχει την ιδιότητα $(\sqrt{-3\Delta})^2 = -3\Delta$. Φυσικά, συνήθως υπάρχουν δυο μιγαδικοί αριθμοί που να έχουν αυτή την ιδιότητα, (Βλέπε Άσκηση Α.7.2.) Το σύμβολο $\sqrt{-3\Delta}$, δηλώνει τον έναν από αυτούς, που τον διαλέγουμε εφ'άπαξ για το κεφάλαιο αυτό. Στην συνέχεια ορίζουμε τις ποσότητες

$$A=-\frac{27}{2}q+\frac{3}{2}\sqrt{-3\Delta} \quad \text{και}$$

$$B=-\frac{27}{2}q-\frac{3}{2}\sqrt{-3\Delta}.$$

Κάνοντας τις πράξεις είναι εύκολο να δή κανείς ότι

<u>Α.7.6.Λήμμα</u>. Είναι, $A\cdot B=-3^3p^3$

Το προηγούμενο Λήμμα μας δείχνει ότι μπορούμε να κάνουμε επιλογή κυβικών ριζών, (Βλέπε 'Ασκηση Α.7.6.),

$\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$ ώστε $(\sqrt[3]{A})\cdot(\sqrt[3]{B})=-3p$

(Φυσικά θα είναι $(\sqrt[3]{A})^3=A$ και $(\sqrt[3]{B})^3=B$). Κάνουμε λοιπόν μια επιλογή τιμών για τα $\sqrt[3]{A}$ και $\sqrt[3]{B}$ από τις τρείς τιμές που υπάρχουν για κάθε μια. Το κύριο συμπέρασμα αυτού του κεφαλαίου είναι

<u>Α.7.7.Θεώρημα.</u> (Τύποι του Cardano). Το πολυώνυμο

$$x^3+px+q$$

έχει τις εξής ρίζες:

$$x_1=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})$$
$$x_2=\frac{1}{3}(\omega.\sqrt[3]{A}+\omega^2.\sqrt[3]{B})$$
$$x_3=\frac{1}{3}(\omega^2.\sqrt[3]{A}+\omega.\sqrt[3]{B})$$

(Σημ. ω είναι μια μιγαδική κυβική ρίζα του 1. (Βλέπε 'Ασκηση Α.7.4.)).

<u>Απόδειξη</u>. Αρκεί να αποδειχθούν οι σχέσεις, (Τύποι Vieta),

$$x_1+x_2+x_3=0$$
$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p$$
$$x_1x_2x_3=-q$$

Αυτά αποδεικνύονται κάνοντας τις πράξεις. Πράγματι

$$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{3}\quad(1+\omega+\omega^2)\cdot\sqrt[3]{A}+(1+\omega+\omega^2)\cdot\sqrt[3]{B}=0,$$

στην συνέχεια

$$\begin{aligned}x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1&=x_1(x_2+x_3)+x_2x_3\\&=-x_1^2+x_2x_3\\&=-\frac{1}{9}\left((\sqrt[3]{A})^2+(\sqrt[3]{B})^2+2\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}\right)+\end{aligned}$$
$$+\frac{1}{9}\left(\omega^2\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}+\omega^4\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}+\omega^3(\sqrt[3]{A}^2)+\omega^3(\sqrt[3]{B}^2)\right)$$
$$\begin{aligned}&=-\frac{2}{9}(-3p)+\frac{1}{9}(\omega^2+\omega)\cdot(-3p)\\&=p\end{aligned}$$

τέλος

$$x_1x_2x_3=\frac{1}{27}\omega\omega^2\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A}+\frac{1}{\omega}\sqrt[3]{B}\right)$$

$$=\frac{1}{27}\left(A+B+(\omega^2+\omega+1)\sqrt[3]{A}\left(\sqrt[3]{B}\right)^2+(\omega^2+\omega+1)\cdot\sqrt[3]{B}\left(\sqrt[3]{A}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{27}\cdot(A+B)$$

$$=\frac{1}{27}\cdot(-27q)$$

$$=-q$$

<u>Σημείωση.</u> Πολλές φορές στα Μαθητικά, δυστυχώς, η ανάγκη της ακριβολογίας και αυστηρότητας γίνεται αιτία να κρυφτή η κεντρική ιδέα μιας απόδειξης. Η προηγούμενη απόδειξη είναι ένα τέτοιο παράδειγμα. Θα συμπληρώσουμε αυτό το κενό με μερικά σχόλια που θα ακολουθήσουν. Η λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά στο σύγγραμμα Ars Magna (1545) του G.Cardano (1501-1576). Η κεντρική ιδέα ήταν η θεώρηση της ταυτότητας

$$(s+t)^3-3st(s+t)-(s^3+t^3)=0.$$

Ας συγκρίνουμε την παραπάνω ταυτότητα, με την εξίσωση που έχουμε να λύσουμε

$$x^3+px+q=0$$

βλέπουμε ότι αν μπορούμε να βρούμε αριθμούς s και t ώστε

$$st=-\frac{1}{3}p \quad \text{και} \quad s^3+t^3=-q,$$

τότε ο $s+t$ είναι λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης. Το παραπάνω σύστημα, οδηγεί στο

$$s^3t^3=-\frac{1}{27} \qquad s^3+t^3=-q$$

οπότε, όπως είναι γνωστό και από το Γυμνάσιο, τα s^3, t^3 είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$y^2+\frac{p}{3}y-q=0$$

την οποία λύνουμε. Ουσιαστικά, αυτή την απόδειξη δώσαμε, και στην θέση των s^3, t^3 ήσαν τα $\frac{A}{27}$, $\frac{B}{27}$

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει την ποιότητα των ριζών του πολυωνύμου g.

<u>Α.7.8.Θεώρημα.</u> Έστω ότι το g έχει πραγματικούς συντελεστές. Τότε ισχύουν

(α) Αν $\Delta<0$, τότε το g έχει τρείς άνισες ρίζες, που είναι η μια πραγματική και οι άλλες δύο είναι μιγαδικές συζυγείς.

(β) Αν $\Delta=0$, τότε όλες οι ρίζες του g είναι πραγματικές και μια από αυτές είναι πολλαπλή.

(γ) Αν $\Delta>0$ τότε το g έχει τρείς πραγματικές διακεκριμένες ρίζες.

<u>Απόδειξη</u>. Αν $\Delta<0$ τότε τα A και B είναι άνισοι πραγματικοί αριθμοί. Το συμπέρασμα βγαίνει από τους τύπους του προηγούμενου θεωρήματος και την Άσκηση Α.7.5.

(β) Είναι εύκολο

(γ) Αν $\Delta>0$ τότε θα είναι $p<0$ και τα A,B είναι άνισοι συζυγείς μιγαδικοί. Οπότε τα $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$ θα είναι άνισοι συζυγείς μιγαδικοί (Γιατί;). Και το συμπέρασμα έπεται εύκολα.

Η ονομασία Διακρίνουσα, για το Δ, προήλθε ακριβώς από το γεγονός ότι η Δ χαρακτηρίζει το είδος των ριζών της εξίσωσης.

Το προηγούμενο θεώρημα επισημαίνει μια περίεργη κατάσταση. Δηλαδή, όταν $\Delta>0$, ενώ είναι όλες οι ρίζες πραγματικές εν τούτοις αυτές εμφανίζονται με τύπους που έχουν εξαγωγές ριζών επί μιγαδικών αριθμών, των A και B. Ας το δούμε καλλίτερα αυτό σε ένα παράδειγμα.

<u>Α.7.9.Παράδειγμα</u>. Να λυθεί η εξίσωση

$$x^3-7x+6=0$$

Λύση. Αν ξεχάσουμε, προς στιγμήν, τους τύπους που βρήκαμε στο κομμάτι αυτό, μπορούμε να δοκιμάσουμε να βρούμε τις ρητές λύσεις της εξίσωσης αυτής, αν βέβαια υπάρχουν, χρησιμοποιώντας την μέθοδο που αποδεικνύεται από την Άσκηση Α.5.9. Τότε βλέπουμε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 1,2,-3. Ας δούμε λοιπόν τώρα, τι θα μας δώσουν οι τύποι του παραπάνω θεωρήματος. Στο παράδειγμα μας, έχουμε $p=-7$ και $q=6$, οπότε $\Delta=400$ και $A=-81+30\sqrt{3}\cdot i$, $B=-81-30\sqrt{3}\cdot i$ οπότε προκύπτει το ερώτημα: Τι είναι το $\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{-81-30\sqrt{3}\cdot i}$ Και πως οδηγούμεθα στις ρίζες 1,2,-3 από τους τύπους του παραπάνω θεωρήματος. Η απάντηση είναι απλή και απογοητευτική: Δεν υπάρχει τρόπος να "δούμε" τις ρίζες 1,2,-3 μέσα από τους πολύπλοκους τύπους του θεωρήματος μας. Βέβαια οι τύποι του θεωρήματος αυτού δίνουν τις ρίζες 1,2,-3, αλλά μέσω πολυπλόκων εκφράσεων εξαγωγής κυβικών ριζών επί μιγαδικών αριθμών, ώστε να μην είναι εμφανές ότι οι ρίζες είναι απλοί ακέραιοι αριθμοί. Καθοδηγούμενοι από το γεγονός ότι ξέρουμε ήδη ποιές είναι οι ρίζες, και πειραματιζόμενοι λιγάκι με ορισμένες δοκιμές πράξεων, βλέπουμε ότι $(3+2\sqrt{3}\cdot i)^3=-81+30\sqrt{3}\cdot i$

Οπότε μπορούμε να επιλέξουμε

$$\sqrt[3]{A}=3+2\sqrt{3}\cdot i \qquad \text{και} \qquad \sqrt[3]{B}=3-2\sqrt{3}\cdot i$$

Οπότε οι τύποι του θεωρήματος 3 δίνουν

$$x_1=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B})=2$$

$$x_2=\frac{1}{3}(\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B})=1$$

(παίρνουμε $\omega=\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$

$$x_3=\frac{1}{3}(\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B})=-3$$

Το θέμα είναι ότι, φθάσαμε στις ρίζες του πολυωνύμου μας, μέσω των τύπων του θεωρήματος μας βασιζόμενοι στην διαίσθηση και στην καλή μας τύχη. Το γεγονός ότι οι τύποι του Cardano μας δίνουν τις πραγματικές λύσεις τριτοβάθμιου εξισώσεως μέσω τύπων που εμφανίζουν κυβικά ριζικά επί μιγαδικών αριθμών, εθεωρήθη μεγάλο μειονέκτημα την εποχή εκείνη για δύο λόγους: Πρώτον: Οι τύποι αυτοί ήσαν πλέον, πολύ λίγο χρήσιμοι για τις εφαρμογές (π.χ. Τριγωνομετρία). Δεύτερον και κύριον, οι μαθηματικοί του $16^{ου}$ αιώνα πολύ λίγη πίστη είχαν στους μιγαδικούς αριθμούς. Έγιναν προσπάθειες να βρεθούν άλλοι τύποι που να μην έχουν αυτό το μειονέκτημα, δηλαδή να μπορούν να εκφράσουν τις πραγματικές ρίζες μέσω αλγεβρικών πράξεων και εξαγωγών ριζών επί πραγματικών αριθμών. Οι προσπάθειες αυτές απέτυχαν και σήμερα ξέρουμε ότι ήταν μοιραίο να αποτύχουν διότι τέτοιοι τύποι δεν υπάρχουν. Η απόδειξη αυτού του πράγματος χρειάζεται λίγο προχωρημένη θεωρία σωμάτων και ξεφεύγει των ορίων αυτού του βιβλίου. Για να καταλάβουμε κάπως καλλίτερα το πρόβλημα, ας δούμε τα εξής δύο επί μέρους προβλήματα.

Α.7.10. Πρόβλημα. Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί και θέλουμε να βρούμε πραγματικούς αριθμούς κ,λ ώστε

$$\alpha+\beta i=(\kappa+\lambda i)^3$$

(Δηλαδή, να βρούμε την κυβική ρίζα μιγαδικού αριθμού). Κάνοντας λοιπόν τις πράξεις και στα δύο μέλη της ισότητας, παίρνουμε

$$\alpha=\kappa^3-3\kappa\lambda^2 \quad \text{και} \quad \beta=3\kappa^2\lambda-\lambda^3$$

Αν λοιπόν είναι $\beta\neq 0$, (η περίπτωση $\beta=0$ είναι τετριμμένη), τότε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa^3-3\kappa\lambda^2}{3\kappa^2\lambda-\lambda^3}$$ και θέτωντας

$$x=\frac{\kappa}{\lambda} \qquad \mu=\frac{\alpha}{\beta}$$ παίρνουμε

$$\mu=\frac{x^3-3x}{3x^2-1}$$ ή

(α) $x^3-3\mu x^2-3x+\mu=0$

Ίσως αυτή τη στιγμή έχει κανείς την απατηλή εντύπωση ότι φθάσαμε στο τέλος του σκοπού μας, διότι ο υπολογισμός του x ανάγεται στην λύση τριτοβάθμιου εξίσωσης, που μάθαμε να λύνουμε τώρα μόλις, οπότε αν βρούμε το x μετά θα βρούμε και τα k ,. Δυστυχώς δεν είναι έτσι τα πράγματα, διότι η τριτοβάθμια εξίσωση στην οποία καταλήξαμε είναι από εκείνες που έχουν τρείς πραγματικές ρίζες και οι οποίες δημιουργούν το πρόβλημα. Αυτό, εξ άλλου, αναμενόταν διότι ξέρουμε, (από την Ανάλυση) ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $\neq 0$, έχει τρείς κυβικές ρίζες άρα θα πρέπει να υπάρχουν τρείς πραγματικές τιμές του $x=\frac{\kappa}{\lambda}$. Ας δούμε όπως επακριβώς διατί η εξίσωση αυτή έχει τρείς πραγματικές ρίζες. Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$x=y+\mu$$

δια να απαλοίψουμε τον δευτεροβάθμιο όρο, οπότε η εξίσωση (α) ανάγεται στην

$$y^3-3(\mu^2+1)y-2\mu(\mu^2+1)=0.$$

Η διακρίνουσα αυτής της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$\Delta=2^3\cdot 3^2(\mu^2+1)^2>0,$$

άρα η (α) έχει τρείς πραγματικές ρίζες. Δηλαδή, φαύλος κύκλος.

<u>Α.7.11.Πρόβλημα.</u> Αν θ είναι μια γωνία να βρεθεί το συνθ όταν γνωρίζουμε το συν 3θ.

(Σημείωση. Ιστορικά,το πρόβλημα αυτό έπαιξε μεγάλο ρόλο στο να δημιουργηθή ενδιαφέρον και να μελετηθή το θέμα της λύσης τριτοβαθμίων εξισώσεων).

<u>Λύση(;)</u> Ξέρουμε από την τριγωνομετρία

$$\text{συν}3\vartheta=4\text{συν}^3\vartheta-3\text{συν}\vartheta.$$

Θέτω $x=\text{συν}\vartheta$ και $\alpha=\text{συν}3\vartheta$, οπότε έχουμε προς λύση την τριτοβάθμια εξίσωση

$$4x^3-3x-\alpha=0$$

ή

$$x^3-\frac{3}{4}x-\frac{\alpha}{4}=0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\frac{27}{16}(1-\alpha^2)\geqslant 0$$

Δηλαδή, πάλι δεν έχουμε γενικούς "πραγματικούς" τύπους που να εκφράζουν το συνθ συνάρτηση του συν3θ.

Ας δούμε και ένα άλλο παράδειγμα.

<u>Α.7.12.Παράδειγμα</u>. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^3-5x^2+8x-6=0$$

<u>Λύση</u>. Κάνουμε το μετασχηματισμό $x=y+\frac{5}{3}$, για να απαλοίψουμε τον δευτεροβάθμιο όρο. Οπότε παίρνουμε την εξίσωση

$$y^3-\frac{1}{3}y-\frac{52}{27}=0.$$

Τώρα, εφαρμόζουμε τους τύπους του Cardano, οπότε έχουμε

$$\Delta=-4\left(-\frac{1}{3}\right)^3-27\left(-\frac{52}{27}\right)^2=-100$$

άρα

$$\sqrt{-3\Delta}=10\sqrt{3},\quad A=26+15\sqrt{3},\quad B=26-15\sqrt{3}.$$

Εδώ η εξίσωση έχει μια ρίζα πραγματική και δύο μιγαδικές συζυγείς. Εξακολουθούν να υπάρχουν προβλήματα όσον αφορά την έκφραση των ριζών. Τι είναι άραγε τα $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$; Υπάρχει καμμιά απλή έκφραση; Συνήθως, δεν θα υπάρχει μια απλή έκφραση και θα πρέπει να γράφουμε

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\quad, \text{κ.λ.π.}$$

Ειδικά εδώ, παρατηρούμε ότι

$$(2+\sqrt{3})^3=26+15\;3$$

$$(2-\sqrt{3})^3=26-15\;3$$

Άρα, μπορούμε να επιλέξουμε

$$\sqrt[3]{A}=2+\sqrt{3},\quad \sqrt[3]{B}=2-\sqrt{3}.$$

Οπότε οι τύποι του Cardano, δίνουν τις ρίζες

$$y_1=\frac{4}{3},\quad y_2=\frac{1}{3}+i,\quad y_3=\frac{1}{3}-i.$$

Άρα οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι

$$x_1=y_1+\frac{5}{3}=3,\quad x_2=y_2+\frac{5}{3}=2+i\quad \text{και}\quad x_3=2-i$$

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει ότι ακόμα και στην περίπτωση που δεν εμφανίζονται Κυβικές ρίζες Μιγαδικών αριθμών ακόμα και τότε, ενδεχομένως, η απλούστερη μορφή των ριζών, είναι δυνατόν, να μας διαφύγει.

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα.

<u>Α.7.13.Παράδειγμα</u>. Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου,

$$x^3-9x+28.$$

<u>Λύση</u>. Θα εφαρμόσουμε τους τύπους του Cardano. Είναι

$$\Delta=-4(-9)^3-27\cdot 28^2=-18252$$

άρα $\sqrt{-3\Delta}=234$, $A=-27$, $B=-729$, $\sqrt[3]{A}=-3$, $\sqrt[3]{B}=-9$. Άρα

$$x_1=-4,\quad x_2=2+\sqrt{3}i\ ,\quad x_3=2-\sqrt{3}i\ .$$

Στην Άσκηση Α.7.8. περιγράφεται ένας άλλος τρόπος λύσης τριτοβάθμιας εξίσωσης, που οφείλεται στον J.Lagrange (1736-1813), και φυσικά, οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα.

Ας δούμε τώρα μια άλλη πρόταση που αφορά το είδος των ριζών ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού.

<u>Α.7.14.Πρόταση</u>. Έστω το πολυώνυμο

$$f=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

που έχει πραγματικούς συντελεστές και ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3. Οι ρίζες του f έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, τότε και μόνο τότε όταν

$$\alpha>0,\quad \alpha\beta-\gamma>0,\quad \gamma>0$$

(Σημείωση. Αν $z=\kappa+\lambda i$, με κ,λ πραγματικούς, τότε ο κ είναι το Πραγματικό Μέρος (Real Part) του Μιγαδικού αριθμού z. Συμβολίζεται Rez).

<u>Απόδειξη</u>. Θέτω $B=\alpha\beta-\gamma$. Τότε είναι

$$\alpha=-(\rho_1+\rho_2+\rho_3)$$

$$B=\alpha\beta-\gamma=-(\rho_1+\rho_2+\rho_3)(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)+\rho_1\rho_2\rho_3$$

$$=-(\rho_1+\rho_2)(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_3)$$

$$\gamma=-\rho_1\rho_2\rho_3$$

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η συνθήκη είναι Αναγκαία. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Έστω $Re\rho_1, Re\rho_2, Re\rho_3<0$.

(α) Έστω $\rho_1,\rho_2,\rho_3<0$. Τότε, προφανώς $\alpha,B,\gamma>0$.

(β) Έστω $\rho_1<0$ και οι ρ_2,ρ_3 είναι μιγαδικές συζυγείς και $Re\rho_2, Re\rho_3<0$ και οι ρ_1,ρ_2 δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Τότε $\rho_1+\rho_3=2Re\rho_2<0$, επίσης $\rho_2\rho_3=|\rho_2|^2>0$. Άρα $\alpha,\gamma>0$. Επίσης $(\rho_1+\rho_2)\cdot(\rho_1+\rho_3)=|\rho_1+\rho_2|^2>0$, άρα $B>0$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η συνθήκη είναι Ικανή. Διακρίνουμε, πάλι, δύο περιπτώσεις. Έστω $\alpha,B,\gamma>0$.

(α) Έστω ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι πραγματικές. Επειδή $\gamma>0$ θα πρέπει η μια ρίζα να είναι αρνητική και οι άλλες δύο πρέπει να είναι ομόσημες. Έστω $\rho_1<0$ και $\rho_2,\rho_3>0$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Είναι

$$-\rho_1-\rho_2-\rho_3>0$$

άρα, $\rho_1+\rho_2<-\rho_3<0$

άρα, $\rho_1+\rho_3<-\rho_2<0$

άρα, $B=(\rho_1+\rho_2)(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_3)>0$,

που είναι άτοπο

(β) Έστω ρ_1 πραγματική και οι ρ_2,ρ_3 μιγαδικές συζυγείς και όχι πραγματικές. Αφού $\gamma>0$, θα είναι $\rho_1<0$. Είναι $(\rho_1+\rho_2)(\rho_1+\rho_3)=|\rho_1+\rho_2|^2>0$, άρα αφού $B>0$, θα είναι $(\rho_2+\rho_3)<0$ άρα $2Re\rho_2<0$.

Σημείωση. Στην Άσκηση Α.7.8., περιγράφεται μια άλλη απόδειξη για την παραπάνω πρόταση.

Σημείωση. Η γενική τριτοβάθμια εξίσωση λύθηκε κατά τον $16^{ον}$ αιώνα. Γύρω από το θέμα της προτεραιότητας, έγινε αρκετός καυγάς, αλλά αυτό, πολύ λίγο μας ενδιαφέρει. Η λύση που εδώ περιγράφουμε δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά από το J.Cardano (1501-1576) στο περίφημο έργο του Ars Magna (1545). Αν σκεφθούμε ότι εξισώσεις δευτέρου βαθμού λύθηκαν από τους αρχαίους Βαβυλωνίους (2000 π.χ.), τότε χωρίς αμφιβολία μας κάνει εντύπωση το γεγονός ότι χρειάστηκαν 3.500 χρόνια για να σκεφθούν οι άνθρωποι τους απλούς υπολογισμούς που παρουσιάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Το πρόβλημα πάει κάπου βαθύτερα. Αυτο που έτσι ονομάζουμε, "Αλγεβρικό Λογισμό", δεν είναι πολύ παλιά ανακάλυψη. Ολοκληρώθηκε μόλις γύρω στο 1600. Τα χρόνια του Cardano ο Αλγεβρικός Λογισμός, που χρησιμοποιεί "γράμματα" και όχι μόνο συγκεκριμένους αριθμούς, δεν είχε ακόμα ενηλικιωθεί. Αυτό ηταν το μεγάλο εμπόδιο, που δεν επέτρεψε στους Μαθηματικούς να προχωρήσουν. Οι εξισώσεις τετάρτου βαθμού λύθηκαν λίγο μετά τις τριτοβάθμιες εξισώσεις. Οι λύση τους περιγράφεται στο επόμενο κεφάλαιο. Οπότε, έρχεται φυσιολογικά το ερώτημα: Τι γίνεται με τις εξισώσεις μεγαλύτερου βαθμού; Το ερώτημα αυτό έμεινε αναπάντητο, για άλλα 300 χρόνια περίπου. Κατά το πρώτο μισό του περασμένου αιώνα, οι Lagrange-Abels-Galois, απέδειξα, ότι για εξισώσεις βαθμού μεγαλυτέρου του τετάρτου, δεν μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα βρούμε γενικούς τύπους που να εκφράζουν τις λύσεις, τύπους που να περιέχουν μόνον τους συντελεστές της εξίσωσης, αλγεβρικές πράξεις και ριζικά. Η μελέτη του όλου προβλήματος οδήγησε σε μια από τις πιό βαθειές ανακαλύψεις στα Μαθηματικά των δύο τελευταίων αιώνων: Την θεωρία των Ομάδων.

Α.7.Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να αποδειχθεί ότι κάθε θετικός Πραγματικός, έχει ακριβώς δύο Πραγματικές Τετραγωνικές ρίζες, που είναι η μια αντίθετη της άλλης.

2. Να αποδειχθεί ότι κάθε Μιγαδικός αριθμός έχει μια τουλάχιστον Μιγαδική Τετραγωνική ρίζα. Αν ο Μιγαδικός αυτός είναι $\neq 0$, τότε έχει ακριβώς δύο Μιγαδικές Τετραγωνικές Ρίζες, που είναι η μια αντίθετη της άλλης. (Υπόδειξη. Έστω $(x+yi)^2=\alpha+\beta i$, $x^2-y^2=\alpha$, $2xy=\beta$ κ.λ.π.)

3. Κάθε Μιγαδικός αριθμός $\neq 0$ έχει ακριβώς τρείς Μιγαδικές Κυβικές ρίζες. (Υπόδ. Αν $x^3=\alpha^3$, τότε $(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)=0$).

4. Έστω ω μια Μιγαδική κυβική ρίζα του 1, που είναι $\neq 1$. Τότε είναι

(α) $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ ή $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$

(β) Το ω^2 είναι κυβική ρίζα του 1, που είναι διάφορη του 1.

(γ) Οι τρείς κυβικές μιγαδικές ρίζες του 1, είναι οι $1,\omega,\omega^2$.

(δ) Οι ω,ω^2 είναι συζυγείς.

(ε) Ισχύει, $\omega^2+\omega+1=0$.

(ζ) Αν α είναι μιγαδικός και β είναι μια κυβική ρίζα του, τότε οι κυβικές ρίζες του α είναι οι $\beta,\beta\omega,\beta\omega^2$.

5. Η Διακρίνουσα του Πολυωνύμου Α.7.4. είναι η, $-4p^3-27q^2$. (Υπόδειξη. Τύποι Vieta, $x_1+x_2+x_3=0$).

6. Έστω $\alpha,\beta\in C$ και $\alpha\beta=\gamma^3$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν A,B με $A^3=\alpha$, $B^3=\beta$, $AB=\gamma$. (Υπόδειξη. Βλέπε, προηγούμενη Άσκηση Α.7.4.(ζ).).

7. Να βρεθούν οι ρίζες των παρακάτω πολυωνύμων

(α) $3x^3+2x^2+5x+6$

(β) $4x^3-x^2+x-5$

(γ) x^3+x^2-2x+3

8 Θεωρούμε την τριτοβάθμια εξίσωση

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

όπου α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί. Να αποδειχθεί ότι, όλες οι ρίζες της εξίσωσης έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος τότε και μόνον τότε όταν $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$ και $\alpha\beta>\gamma$. (Υπόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι η δευτεροβάθμια $x^2+\kappa x+\lambda=0$, έχει ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος τότε και μόνο τότε αν $\kappa>0$, $\lambda>0$. Μετά ξεκινάμε από το ότι κάθε τριτοβάθμιο πολυώνυμο γράφεται $(x+\mu)(x^2+\kappa x+\lambda)$. Οπότε $\mu,\kappa,\lambda>0$ και $\alpha=\mu+\kappa$, $\beta=\lambda+\mu\kappa$ και $c=\mu\lambda$. Άρα $\alpha\beta-c=\kappa(\lambda+\mu^2+\kappa\mu)>0$).

9. Έστω το πολυώνυμο $\alpha_0+\alpha_1x+\ldots+\alpha_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+x^\kappa$, που είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές και όλες οι μιγαδικές ρίζες του έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος. Να αποδειχθεί ότι όλοι οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι θετικοί αριθμοί. (Υπόδειξη. Επαγωγή ως προς τον βαθμό). (Σημείωση. Δεχόμαστε, το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας).

10. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός

$$x=y-\frac{p}{3y}$$

οδηγεί σε λύση της εξίσωσης

$$x^3+px+q$$

(Υπόδειξη. Μετά από πράξεις, φθάνουμε στην

$$y^3-\frac{p^3}{27y^3}+q=0$$

11. Έστω ότι η εξίσωση

$$x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$$

έχει ρίζες x_1,x_2,x_3. Να υπολογισθεί το

$$\left[(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_2)\right]^2$$

συνάρτηση των α,β,γ. (Απάντηση. ισούται με: $\alpha^2\beta^2-4\alpha^3\gamma-4\beta^3+18\alpha\beta\gamma-27\gamma^2$. Η ποσότητα αυτή είναι η διακρίνουσα του πολυωνύμου).

12. Έστω η εξίσωση

$$x^3+px+q=0,$$

που έχει τρείς πραγματικές ρίζες. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί με βάση την ισότητα

$$\sigma\upsilon\nu 3\vartheta=4\sigma\upsilon\nu^3\vartheta-3\sigma\upsilon\nu\vartheta,$$

θέτωντας $\sigma\upsilon\nu 3\vartheta=\dfrac{-9/2}{-p^3/27}$. (Υπόδειξη. Είναι, $-4p^3-27q^2>0$).

(Σημείωση. Αυτή η μέθοδος λύσης τριτοβάθμιας εξίσωσης, που δεν είναι Αλγεβρική, οφείλεται στο F.Vieta (1540-1603).

Α.8.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε εξίσώσεις τετάρτου βαθμού και θα εκφράσουμε τις λύσεις τους με τύπους που περιέχουν τους συντελεστές της εξίσωσης, αλγεβρικές πράξεις και ριζικά.

Όλα τα πολυώνυμα του κεφαλαίου αυτού, θα έχουν πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές. Η αλήθεια είναι ότι η θεωρία, για την εύρεση των ριζών τεταρτοβάθμιου πολυωνύμου που θα παρουσιάσουμε γενικεύεται χωρίς μεγάλη δυσκολία σε ευρύτερη κατηγορία σωμάτων, αλλά, δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την γενίκευσ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το πολυώνυμο:

<u>Α.8.1</u>. $g=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$

του οποίου θα βρούμε τις ρίζες. Με άλλα λόγια, θα λύσουμε την εξίσωση $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$

Σε αντιστοιχία με το προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρούμε το δικός αριθμός.

$$\Delta(\varphi)=(\rho_1-\rho_2)^2(\rho_1-\rho_3)^2\ldots(\rho_3-\rho_4)^2$$

ονομάζεται Διακρίνουσα (Discriminant) του φ.

Σημείωση. Το πολυώνυμο $R(\varphi)$, που είναι τρίτου βαθμού, παίζει κρίσιμο ρόλο, όπως θα δούμε πιό κάτω, στον υπολογισμό των ριζών του φ, και από αυτό προέρχεται το όνομά του.

Από εδώ και πέρα στο κεφάλαιο αυτό, $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ είναι οι μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου f.

Το πρώτο βασικό συμπέρασμα μας είναι το:

A.8.4 Πρόταση. Είναι

$$R(f)=x^3-2px^2+(p^2-4r)x+q^2.$$

Επιπλέον τα πολυώνυμα $R(f)$ και f έχουν την ίδια διακρίνουσα που ισούται $\Delta(f)=16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144pq^2r-27q^4+256r^3$

Απόδειξη. Για συντομογραφία θέτουμε

$$\delta_1=(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)$$
$$\delta_2=(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_4)$$
$$\delta_3=(\rho_1+\rho_4)(\rho_2+\rho_3).$$

Επίσης ως γνωστόν είναι

$$\rho_1+\ldots+\rho_4=0$$
$$\Sigma\rho_1\rho_2=p$$
$$\Sigma\rho_1\rho_2\rho_3=-q$$
$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=r.$$

Ο συντελεστής του x^2 στο $R(f)$ είναι

$$-(\delta_1+\delta_2+\delta_3)=-2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_3\rho_4)$$
$$=-2p$$

Επειδή

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4=0$$

θα είναι $\rho_1+\rho_2=-(\rho_3+\rho_4)$

$\rho_2+\rho_4=-(\rho_1+\rho_3)$

$\rho_2+\rho_3=-(\rho_1+\rho_4)$

'Αρα ο συντελεστής του x στο R(f) είναι

$$\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3+\delta_1\delta_3=(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1+\rho_3)^2+(\rho_1+\rho_2)^2(\rho_1+\rho_4)^2+(\rho_1+\rho_3)^2(\rho_1+\rho_4)^2$$

Αλλά
$$\begin{aligned}(\rho_1+\rho_2)(\rho_1+\rho_3)&=\rho_1^2+\rho_1\rho_3+\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3\\&=\rho_1(\rho_1+\rho_3)+\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3\\&=-\rho_1(\rho_2+\rho_4)+\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3\\&=\rho_2\rho_3-\rho_1\rho_4\end{aligned}$$

και ομοίως παίρνουμε

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_1+\rho_4)=\rho_2\rho_4-\rho_1\rho_3$$
$$(\rho_1+\rho_3)(\rho_1+\rho_4)=\rho_3\rho_4-\rho_1\rho_2$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}p^2&=(\Sigma\rho_1\rho_2)^2\\&=\rho_1^2\rho_2^2+\rho_1^2\rho_3^2+\rho_1^2\rho_4^2+\rho_2^2\rho_3^2+\rho_2^2\rho_4^2+\rho_3^2\rho_4^2\\&+2(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4)(\Sigma\rho_1\rho_2\rho_3)\\&-2\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\\&=\Sigma\rho_1^2\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια ο συντελεστής του x στο R(f) είναι

$$\begin{aligned}\delta_1\delta_2+\delta_1\delta_2+\delta_2\delta_3&=(\rho_2\rho_3-\rho_1\rho_4)^2+(\rho_2\rho_4-\rho_1\rho_3)^2+(\rho_3\rho_4-\rho_1\rho_2)^2\\&=\Sigma\rho_1^2\rho_2^2-6\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4\\&=p^2-4r\end{aligned}$$

Τέλος ο σταθερός συντελεστής του R(f) είναι

$$\begin{aligned}-\delta_1\delta_2\delta_3&=-(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_4)(\rho_1+\rho_4)(\rho_2+\rho_3)\\&=\left[(\rho_1+\rho_2)(\rho_1+\rho_3)(\rho_1+\rho_4)\right]^2\\&=\left[\rho_1^3+\rho_1^2(\rho_2+\rho_3+\rho_4)+\rho_1(\rho_2\rho_3+\rho_2\rho_4+\rho_3\rho_4)+\rho_2\rho_3\rho_4\right]^2\end{aligned}$$

$$= \rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_4+\rho_1\rho_3\rho_4+\rho_2\rho_3\rho_4 \quad ^2$$

$$=q^2$$

διότι $\rho_2+\rho_3+\rho_4=-p_1$

'Αρα

$$R(f)=x^3-2px^2+(p^2-4r)x+q^2$$

Επιπλέον έχουμε

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)-(\rho_1+\rho_3(\rho_2+\rho_4)=-(\rho_1+\rho_2)^2+(\rho_1+\rho_3)^2$$

$$=2\rho_1\rho_3-2\rho_1\rho_2+\rho_3^2-\rho_2^2$$

$$=(\rho_3-\rho_2)(2\rho_1+\rho_3+\rho_2)$$

$$=(\rho_3-\rho_2)(\rho_1-\rho_4)$$

Ομοίως

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)-(\rho_1+\rho_4)(\rho_2+\rho_3)=(\rho_4-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)$$

$$(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_4)-(\rho_1+\rho_4)(\rho_2+\rho_3)=(\rho_4-\rho_3)(\rho_1-\rho_2)$$

Οπότε είναι σαφές ότι οι διακρίνουσες των f και R(x) είναι ίδιες.

'Εστω $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ είναι οι ρίζες του R(f). Με βάση το προηγούμενο κεφάλαιο, τα $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ μπορούμε να τα υπολογίσουμε διότι είναι ρίζες τριτοβάθμιου πολυωνύμου. Οι ρίζες του f, θα εκφρασθούν δια μέσου των $\delta_1,\delta_2,\delta_3$. 'Οπως ξέρουμε κάθε μιγαδικός αριθμός, $\neq 0$, έχει δύο τετραγωνικές ρίζες που είναι αντίθετες.

<u>Α.8.5.Ορισμός</u>. Τα $\sqrt{-\delta_1}$, $\sqrt{-\delta_2}$, $\sqrt{-\delta_3}$ είναι μια επιλογή τετραγωνικών ριζών, των $(-\delta_1)$, $(-\delta_2)$, $(-\delta_3)$, έτσι ώστε

$$\sqrt{-\delta_1}\cdot\sqrt{-\delta_2}\cdot\sqrt{-\delta_3}=-q$$

Αυτή η επιλογή είναι δυνατή, διότι

$$(-\delta_1)(-\delta_2)(-\delta_3)=-q^2. \quad (\text{Γιατί;}).$$

Και τώρα φθάνουμε στο κύριο στοιχείο αυτού του κεφαλαίου.

Α.8.6.Θεώρημα. Οι παρακάτω μιγαδικοί είναι οι ρίζες του f:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{-\delta_1}+\sqrt{-\delta_2}+\sqrt{-\delta_3})$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{-\delta_1}-\sqrt{-\delta_2}-\sqrt{-\delta_3}$$

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{-\delta_1}+\sqrt{-\delta_2}-\sqrt{\delta_3})$$

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{-\delta_1}-\sqrt{-\delta_2}+\sqrt{-\delta_3})$$

Απόδειξη. Θα μπορούσα να αποδείξουμε το θεώρημα μας, όπως και τους τύπους του Cardano στο προηγούμενο κεφάλαιο, χρησιμοποιώντας τους τύπους του Vieta. Όμως, η διαδικασία αυτή, αν και οδηγεί στα σίγουρα στο συμπέρασμα, είναι πολύ επίπονη. Εδώ θα κάνουμε κάτι διαφορετικό.

Κατ'αρχήν παρατηρούμε ότι το σύνολο των παραπάνω αριθμών, δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουμε την επιλογή των τετραγωνικών ριζών, εφ'όσον βέβαια ικανοποιείται η συνθήκη του ορισμού Α.8.5., (Γιατί;). Επιπλέον, ισχύει π.χ. ότι το

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)=\delta_1$$

είναι ρίζα του R(f), και επειδή $(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4)=0$, έπεται ότι το

$$-(\rho_1+\rho_2)^2$$

είναι ρίζα του R(f). Άρα μπορώ να διαλέξω, έτσι ώστε να είναι

(α) $\rho_1+\rho_2=\sqrt{-\delta_1}$, $\rho_3+\rho_4=-\sqrt{-\delta_1}$

και επίσης,μπορώ να διαλέξω

(β) $\rho_1+\rho_3=\sqrt{-\delta_2}$, $\rho_2+\rho_4=-\sqrt{-\delta_2}$

και

(γ) $\rho_1+\rho_4=\sqrt{-\delta_3}$, $\rho_2+\rho_3=-\sqrt{-\delta_3}$

Τα παραπάνω επιτρέπονται, διότι έχουμε επίσης

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_1+\rho_3)(\rho_1+\rho_4)=\rho_1^3+\rho_1^2(\rho_2+\rho_3+\rho_4)+\rho_1(\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_4+\rho_4\rho_2)+\rho_2\rho_3\rho_4$$

$$=\rho_1^3-\rho_1^3+\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_3\rho_4+\rho_1\rho_4\rho_2+\rho_2\rho_3\rho_4$$
$$=-q$$

Από τις σχέσεις (α), (β), (γ), προσθέτωντας τις κατάλληλα, ανά τρείς, κατά μέλη, έχουμε

$$2\rho_1=\sqrt{-\delta_1}+\sqrt{-\delta_2}+\sqrt{-\delta_3}$$
$$2\rho_2=\sqrt{-\delta_1}-\sqrt{-\delta_2}-\sqrt{-\delta_3}$$
$$2\rho_3=-\sqrt{-\delta_1}+\sqrt{-\delta_2}-\sqrt{-\delta_3}$$
$$2\rho_4=-\sqrt{-\delta_1}-\sqrt{-\delta_2}+\sqrt{-\delta_3}.$$

Σημείωση. 'Οπως συμβαίνει συχνά με πολλά Μαθηματικά θεωρήματα, η τυπικά άψογη λύση, κρύβει την κεντρική ιδέα που οδήγησε στην λύση. Ας δούμε ποιά είναι η βασική ιδέα, στην λύση τεταρτοβαθμίων εξισώσεων που παρουσιάσαμε πιό πάνω. 'Εστω λοιπόν $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ οι ζητούμενες ρίζες του f. Θεωρούμε τους αριθμούς

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)$$
$$(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_4)$$
$$(\rho_1+\rho_4)(\rho_2+\rho_3).$$

Οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες τριτοβάθμιου πολυωνύμου, του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε με την βοήθεια των Τύπων του Vieta. Αυτό άλλωστε κάναμε στο Α.8.4. Το πολυώνυμο αυτό είναι η Κυβική Επιλύουσα. Αυτό σημαίνει ότι, εάν ξέρουμε να λύνουμε τριτοβάθμιες εξισώσεις, τότε μπορούμε να βρούμε τις παραπάτω ποσότητες. Τέλος, από αυτές τις ποσότητες μπορούμε να αποσπάσουμε τα $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$, όπως έγινε στο παραπάνω θεώρημα.

Σημείωση. Η ιστορική μέθοδος, με την οποία για πρώτη φορά λύθηκαν οι τεταρτοβάθμιες εξισώσεις, είναι αυτή που περιγράφεται στην 'Ασκηση Α.8.1. Η μέθοδος αυτή οφείλεται στον

L.Ferrari (1522-65) και πρωτοδημοσιεύθηκε στο Ars Magna του G.Cardano (1501-1576). Η λύση που παρουσιάζουμε πιό πάνω, οφείλεται στο J.Lagrange(1736-1813), ο οποίος επεσήμανε την σημασία των συμμετρικών πολυωνύμων για το πρόβλημα εύρεσης των ριζών ενός πολυωνύμου.

Α.8. Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ .

1. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

Αυτή μπορεί να λυθεί ως εξής: Αν t είναι μια προσδιοριστέα παράμετρος, η εξίσωση γίνεται

$$(x^2+\frac{t}{2})^2-(t-p)x^2-qx+(\frac{t^2}{4}-r)=0$$

θα προσδιορίσουμε το t ώστε ο αφαιρετέος να γίνη τέλειο τετράγωνο, δηλαδή η διακρίνουσα του πρέπει να είναι 0, ήτοι

$$q^2=4(t-p)(\frac{t^2}{4}-r).$$

Από την τελευταία αυτή εξίσωση μπορεί να ευρεθεί ο t. Γιατί; Πώς; Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

2. Να εκφρασθεί η Διακρίνουσα, του Πολυωνύμου Α.8.1., με την βοήθεια των συντελεστών του. (Υπόδειξη. Βλέπε Α.8.4.).

3. Να εκφρασθούν οι ρίζες των παρακάτω πολυωνύμων υπό την μορφή α+βi, όπου α,β είναι πραγματικοί αριθμοί.

(α) $x^4-6x^2-12x+6$

(β) $x^4-12x^2-24x-14$

(γ) $x^4-12x^2-12x-3$

(δ) x^4-6x^2-8x-1.