1. Μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα περιέχει πλήρως αναλλοίωτη αβελιανή p-υποομάδα για κάποιο πρώτο p.

2. Έστω G μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα και N ελαχιστική κανονική υποομάδα της G. Τότε η N είναι ευθύ γινόμενο κυκλικών τάξεως p για κάποιο πρώτο p. [Υπόδειξη: Σε μια αβελιανή p-ομάδα το σύνολο των στοιχείων τάξεως το πολύ p είναι πλήρως αναλλοίωτη υποομάδα]

3. Μια άπειρη p-ομάδα δεν είναι απαραιτήτως μηδενοδύναμη.

4. Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα. Αν η N είναι μη τετριμμένη κανονική υποομάδα της G, τότε $N \cap Z(G) \neq 1$. Αν επιπλέον N ελαχιστική κανονική, τότε $N \subseteq Z(G)$.

5. Έστω G ομάδα και $N \leq Z(G)$. Δείξτε ότι η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν η G/N είναι μηδενοδύναμη.

6. Αν η ομάδα αυτομορφισμών $\mathrm{Aut}(G)$ μιας ομάδος G είναι μηδενοδύναμη, τότε και η G είναι μηδενοδύναμη.

7. Έστω G μια πεπερασμένη μηδενοδύναμη ομάδα και $H \leq G$ με $[G : H] = n$. Να αποδειχθεί ότι $g^n \in G$ για κάθε $g \in G$.

8. Έστω G πεπερασμένη ομάδα. Αποδείξτε ότι :
   (i) Η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος στοιχείων $\alpha, \beta \in G$ με $\big(o(\alpha), o(\beta)\big) = 1$, ισχύει $\alpha\beta = \beta\alpha$.
   (ii) Η G είναι μηδενοδύναμη αν και μόνο αν για κάθε διαιρέτη ν της τάξεως της G υπάρχει κανονική υποομάδα τάξεως ν.

9. Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα (όχι απαραιτήτως πεπερασμένη). Αποδείξτε ότι κάθε Sylow υποομάδα της G είναι κανονική και ότι το σύνολο των στοιχείων πεπερασμένης τάξης της G αποτελεί χαρακτηριστική υποομάδα η οποία ισούται με το ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της G. (Βλέπε Άσκηση 5, Φυλ. 2)

10. Έστω G μια μηδενοδύναμη ομάδα κλάσεως $c > 1$. Για κάθε $\alpha \in G$, η υποομάδα $H = \langle \alpha, G' \rangle$ είναι μηδενοδύναμη κλάσεως μικρότερης του c. [Υπόδειξη: $G' \subseteq Z^{c-1}(G) \cap H \subseteq Z^{c-1}(H)$]

11. Σε μια μηδενοδύναμη, ελευθέρα στρέψης ομάδα G η εξαγωγή των ριζών (όταν αυτές υπάρχουν) είναι μοναδική. Δηλ. αν $\alpha^\nu = \beta^\nu$ για $\nu > 0$, τότε $\alpha = \beta$. [Υπόδειξη: $\alpha, \beta\alpha\beta^{-1} \in \langle \alpha, G' \rangle$]

12. Αν G μηδενοδύναμη κλάσης 2, τότε η απεικόνιση $\varphi : G \to G$ με $\varphi(\alpha) = [g, \alpha]$ είναι ομομορφισμός.[Υπόδειξη: $[g, xy] = [g, x][g, y] \Leftrightarrow [x, g^{-1}]y^{-1}[g^{-1}, x]y = 1$]

13. (Mal'cev) Έστω G μηδενοδύναμη ομάδα της οποίας το κέντρο $Z(G)$ είναι ομάδα ελευθέρα στρέψης. Τότε:

(i) Κάθε πηλίκο $Z^{n+1}(G)/Z^n(G)$ της ανωτέρας κεντρικής σειράς είναι ομάδα ελευθέρα στρέψης.

(ii) Η G είναι ελευθέρα στρέψης. [Υπόδειξη: θεωρήστε ομομορφισμό $Z^{n+1}(G)/Z^n(G) \to Z^n(G)/Z^{n-1}(G)$, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση.]