1. Έστω ότι $K \leq H \leq G$. Αν T σύνολο αντιπροσώπων (αριστερών συμπλόκων) της H στην G και S σύνολο αντιπροσώπων της K στην H, τότε TS σύνολο αντιπροσώπων της K στην G. Ιδιαιτέρως, $[G : K] = [G : H][H : K]$.

2. Αποδείξτε ότι αν οι $H_1, \ldots, H_n$ είναι υποομάδες της G πεπερασμένου δείκτη, τότε και η τομή τους είναι πεπερασμένου δείκτη στην G και $[G : \cap_{i=1}^n H_i] \leq \prod_{i=1}^n [G : H_i]$.

3. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και S πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G. Ορίζουμε $\|\cdot\|_S : G \to [0, \infty)$ ως εξής: $\|1_G\|_S = 0$ και για $1_G \neq g \in G$, $\|g\|_S = min\Big\{n \in \mathbb{N} \, : \, g = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots s_{i_n}^{\varepsilon_n}, \text{ όπου } s_{i_j} \in S \cup S^{-1} \text{ και } \varepsilon_j \in \{-1, 1\}\Big\}$.
   (i) Αποδείξτε ότι η ομάδα G με την συνάρτηση $d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|_S$ γίνεται μετρικός χώρος.
   (ii) Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα εμφυτεύεται στην ομάδα ισομετριών ενός μετρικού χώρου.

4. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και H υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη. Δείξτε ότι η H είναι πεπερασμένα παραγόμενη. [Υπόδειξη: Έστω S πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G και σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της H στην G. Το σύνολο $\{x_i s_j x_k^{-1} \in H \, : \, x_i, x_k \in X, s_j \in S\}$ παράγει την H.]

5. Έστω G ομάδα και X, Y δύο G-σύνολα. Μια απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ λέγεται *G-απεικόνιση* αν $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ για κάθε $g \in G$ και για κάθε $x \in X$ και *G-ισομορφισμός* αν είναι επιπλέον 1-1 και επί. Αποδείξτε ότι η G δρα μεταβατικά επί του X αν και μόνο αν το X είναι G-ισόμορφο με το G/H για κάποια υποομάδα H της G (Η G δρα στο σύνολο των αριστερών συμπλόκων G/H με τον φυσικό τρόπο).

6. Το πλήθος των υποομάδων πεπερασμένου δείκτη n σε μια πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα G είναι πεπερασμένο.

7. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη περιέχει μια χαρακτηριστική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στην G.

8. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα η οποία δρα επί ενός πεπερασμένου συνόλου X και $\text{Fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}$ το σύνολο των σταθερών σημείων του στοιχείου $g \in G$.
   (i) Δείξτε ότι το πλήθος των τροχιών της δράσης ισούται με $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$. [Υπόδειξη: υπολογίστε το πλήθος των ζευγών (g, x) όπου $gx = x$ με δύο τρόπους.]
   (ii) Αν η δράση είναι μεταβατική και $|X| > 1$, τότε υπάρχει στοιχείο της G που δεν σταθεροποιεί κανένα στοιχείο του X.

9. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τάξεως p^n, όπου p πρώτος, και X πεπερασμένο G-σύνολο. Αν ο πρώτος p δεν διαιρεί το $|X|$, τότε $\cap_{g \in G} \text{Fix}(g) \neq \emptyset$.

10. Αν $|G| = n < \infty$ και p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του n, τότε κάθε υποομάδα H της G δείκτου p είναι κανονική.

11. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H, K υποομάδες της G. Χρησιμοποιώντας κατάλληλη δράση, δείξτε ότι $|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K|$.

12. Αν G είναι μια ομάδα τάξεως p^n, όπου p πρώτος, και $1 \neq H \triangleleft G$, τότε $H \cap Z(G) \neq 1$.

13. Έστω G πεπερασμένη ομάδα τάξεως $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$. Δείξτε ότι κάθε υποομάδα της G τάξεως 77 είναι κανονική.

14. Έστω G μια ομάδα η οποία δρα με ομοιομορφισμούς επί ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό υποσύνολο U του X έτσι ώστε $X = \bigcup_{g \in G} gU$. Δείξτε ότι η G παράγεται από το σύνολο $S = \{g \in G \, : \, gU \cap U \neq \emptyset\}$. [Υπόδειξη: Μελετήστε τα σύνολα HU και $(G - H)U$, όπου $H = \langle S \rangle$.]

15. Έστω G ομάδα η οποία δρα μεταβατικά επί ενός συνόλου X και f αυτομορφισμός της G. Αποδείξτε ότι υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : X \to X$ τέτοια ώστε $\phi(gx) = f(g)\phi(x)$ για κάθε $g \in G$, $x \in X$, αν και μόνο αν ο αυτομορφισμός f μεταθέτει τις σταθεροποιούσες των στοιχείων $x \in X$.

16. Αν $G = \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{n}$, όπου p πρώτος, τότε η ομάδα Aut$G$ δρα μεταβατικά (με την φυσική δράση) στο σύνολο $G - \{1_G\}$. Ισχύει το αντίστροφο;
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\mathrm{Aut}G \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$.