1. (i) Αν $M \triangleleft G$ και $N \triangleleft K$, τότε $M \times N \triangleleft G \times K$ και $(G \times K)/(M \times N) \cong G/M \times K/N$. Γενικεύστε για πεπερασμένο πλήθος παραγόντων.
   (ii) Δείξτε ότι αν $H, K \triangleleft G$ και $G = HK$, τότε $G/(H \cap K) = H/(H \cap K) \times K/(H \cap K)$.
   (iii) Αν $H, K \triangleleft G$, τότε η $G/(H \cap K)$ είναι ισόμορφη με υποομάδα της $G/H \times G/K$.

2. Έστω $G = H_1 \times \cdots \times H_n$. Δείξτε ότι $Z(G) = Z(H_1) \times \cdots \times Z(H_n)$.

3. Αν η G είναι πεπερασμένη αβελιανή και $|G| = n$, τότε για κάθε διαιρέτη m του n η G περιέχει υποομάδα τάξεως m.

4. (i) Πόσες αβελιανές ομάδες υπάρχουν (ως προς ισομορφισμό) τάξεως 231 ή 432;
   (ii) Θεωρώντας δεδομένο ότι υπάρχουν 14 (ως προς ισομορφισμό) ομάδες τάξεως 81, βρείτε το πλήθος των ομάδων (ως προς ισομορφισμό) τάξεως 891.

5. (i) Δείξτε ότι το σύνολο των στοιχείων πεπερασμένης τάξης μιας αβελιανής ομάδας G, είναι υποομάδα της G, συμβ. $T(G)$, και κάθε στοιχείο της $G/T(G)$ είναι απείρου τάξης.
   (ii) Έστω G και H αβελιανές ομάδες. Αν $G \cong H$, τότε $T(G) \cong T(H)$ και $G/T(G) \cong H/T(H)$.

6. Για μια αβελιανή ομάδα G και κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε (χρησιμοποιώντας προσθετικό συμβολισμό) $nG = \{ng \mid g \in G\}$ και $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}$. Δείξτε τα εξής:
   (i) Οι nG και $G[n]$ είναι υποομάδες της G.
   (ii) Αν G και H αβελιανές, τότε $n(G \times H) \cong nG \times nH$ και $(G \times H)[n] = G[n] \times H[n]$.
   (iii) $n\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_k$, όπου $k = \frac{m}{(n,m)}$, και $\mathbb{Z}_m[n] \cong \mathbb{Z}_{(n,m)}$.
   (iv) Αν G πεπερασμένη αβελιανή και q πρώτος που δεν διαιρεί την τάξη της $|G|$, τότε $qG = G$.
   (v) Αν G πεπερασμένη αβελιανή p-ομάδα, τότε $G[p]$ διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{Z}_p$ πεπερασμένης διάστασης.
   (vi) Αν $G = \mathbb{Z}_{p^{m_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{m_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{m_r}}$, όπου p πρώτος, τότε $pG = \mathbb{Z}_{p^{m_1-1}} \times \mathbb{Z}_{p^{m_2-1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{m_r-1}}$

7. Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα και $G = \mathbb{Z}_{p_1^{m_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k^{m_k}} \times \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}$, όπου p_i πρώτοι όχι απαραιτήτως διαφορετικοί μεταξύ τους. Δείξτε ότι:
   (i) Το πλήθος n των παραγόντων που είναι άπειρες κυκλικές είναι πλήρως καθορισμένο από την G και συμβολίζεται με rank(G).
   (ii) Το πλήθος n_p των κυκλικών παραγόντων που έχουν τάξη μια δύναμη του πρώτου p είναι πλήρως καθορισμένο από την G. [Υπόδειξη: $n_p = \dim_{\mathbb{Z}_p} G_p[p]$, όπου G_p η Sylow p-υποομάδα της G.]
   (iii) Οι δυνάμεις $p_i^{m_i}$ είναι πλήρως καθορισμένες από την G.

8. Αν η G είναι ελεύθερη αβελιανή διάστασης n, τότε η G δεν μπορεί να παραχθεί από m στοιχεία, όπου $m < n$.

9. Έστω F ελεύθερη αβελιανή πεπερασμένης διάστασης και $H \leq F$. Δείξτε ότι F/H πεπερασμένη αν και μόνο αν $\mathrm{rank}(F) = \mathrm{rank}(H)$.

10. Αν G ελεύθερη αβελιανή πεπερασμένης διάστασης και $\varphi : G \to H$ επιμορφισμός, τότε $\mathrm{rank}(G) = \mathrm{rank}(H) + \mathrm{rank}(\mathrm{Ker}\varphi)$.

11. Έστω F ελεύθερη αβελιανή διάστασης n. Αποδείξτε ότι $\mathrm{Aut}(F) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.