1. Έστω Q_8 η υποομάδα της $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ που παράγεται από τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Αποδείξτε ότι η Q_8 είναι μη αβελιανή ομάδα τάξεως 8. [Υπόδειξη: παρατηρήστε ότι $BA = A^3B$ και άρα κάθε στοιχείο της Q_8 έχει την μορφή A^kB^μ. Επίσης $A^4 = B^4 = I$ και $A^2 = B^2$.]

2. (i) Έστω α και β δύο στοιχεία πεπερασμένης τάξης μιας ομάδας G. Αν τα α και β μετατίθενται και οι τάξεις τους $o(\alpha)$ και $o(\beta)$ είναι πρώτοι μεταξύ τους, τότε $o(\alpha\beta) = o(\alpha)\cdot o(\beta)$.
   (ii) Δείξτε ότι η πολλαπλασιαστική ομάδα F^* ενός πεπερασμένου σώματος F είναι κυκλική.

3. Μια (ενδεχομένως άπειρη) ομάδα λέγεται p-*ομάδα*, όπου p πρώτος, αν κάθε στοιχείο της έχει τάξη μια δύναμη του πρώτου p.
   (α) Δείξτε ότι υποομάδες και ομάδες πηλίκα p-ομάδων είναι p-ομάδες.
   (β) Αν $N \triangleleft G$ και N, G/N p-ομάδες, τότε και η G είναι p-ομάδα.
   (γ) Αν G p-ομάδα και H υποομάδα πεπερασμένου δείκτη, τότε $[G : H] = p^k$ για κάποιο k. [Υπόδειξη: η H περιέχει κανονική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη στη G και η ομάδα G/K είναι p-ομάδα.]

4. Μια *Sylow p-υποομάδα* μιας (ενδεχομένως άπειρης) ομάδας G είναι μια μεγιστική (με τη σχέση του περιέχεσθαι) p-υποομάδα της G. Η ύπαρξη των Sylow p-υποομάδων εξασφαλίζεται από το λήμμα του Zorn.
   (α) Αν P Sylow p-υποομάδα της G και $x \in G - P$ με $o(x) = p^k$, τότε $x \notin N_G(P)$. [Υπόδειξη: αν όχι, θεωρήστε το πηλίκο $\langle P, x\rangle/P$.]
   (β) Αν P Sylow p-υποομάδα της G με πεπερασμένο πλήθος συζυγών n_p, τότε όλες οι Sylow p-υποομάδες της G είναι συζυγείς και το πλήθος τους ικανοποιεί την ισοτιμία $n_p \equiv 1(\mathrm{mod} p)$.

5. Έστω G μια περιοδική ομάδα (δηλ. κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη) και Π το σύνολο των πρώτων διαιρετών των τάξεων των στοιχείων της ομάδας. Αν για κάθε $p \in \Pi$ υπάρχει μοναδική Sylow p-υποομάδα G_p της G, τότε η G είναι το ευθύ γινόμενο των G_p, $p \in \Pi$.

6. Έστω p πρώτος και $C_{p^\infty} = \{x \in \mathbb{C} |\, x^{p^n} = 1 \text{ για κάποιο n} \in \mathbb{N}\}$. Με τον συνήθη πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών το σύνολο C_{p^∞} αποτελεί άπειρη αβελιανή p-ομάδα.
   (α) Αν C_p είναι η υποομάδα της C_{p^∞} που αποτελείται από τα x στο $\mathbb{C}$ με $x^p = 1$, τότε $C_{p^\infty}/C_p \cong C_{p^\infty}$.
   (β) Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της C_{p^∞} είναι κυκλική, ενώ η C_{p^∞} όχι.
   (γ) Θεωρώντας την απεικόνιση $q \mapsto e^{2\pi i q}$, αποδείξτε ότι η C_{p^∞} είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\left\{ \frac{m}{p^n} + \mathbb{Z} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z},\, n \geq 0 \right\}$ της ομάδας πηλίκο $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

7. (i) Έστω G ομάδα, K πεπερασμένη κανονική υποομάδα της G και P Sylow p-υποομάδα της K. Δείξτε ότι $G = N_G(P)K$.

   (ii) Αν κάθε μεγιστική υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας G είναι κανονική (στην G), τότε κάθε Sylow υποομάδα της G είναι κανονική.

8. (i) Έστω $H \leq G$, όπου G πεπερασμένη ομάδα, P Sylow p-υποομάδα της H και Q Sylow p-υποομάδα της G τέτοια ώστε $P \leq Q$. Δείξτε ότι $P = Q \cap H$.
   (ii) Αν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και η H μια υποομάδα της G, τότε $n_p(H) \leq n_p(G)$. (με n_p συμβολίζουμε το πλήθος των p-υποομάδων του Sylow μιας πεπερ. ομάδας)
   (iii) Έστω H p-υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας G τέτοια ώστε $p \,|\, [G : H]$. Δείξτε ότι $H < N_G(H)$.

9. Έστω G πεπερασμένη ομάδα και P Sylow p-υποομάδα της G.
   (i) Αν $N_G(P) \leq H \leq G$, τότε $[G : H] \equiv 1 \pmod{p}$.
   (ii) Αν $K \triangleleft G$, τότε $K \cap P$ Sylow p-υποομάδα της και PK/K Sylow p-υποομάδα της G/K.
   (iii) Αν $K \triangleleft G$, τότε $n_p(G/K) \leq n_p(G)$, όπου n_p συμβολίζει τον αριθμό των Sylow p-υποομάδων.

10. Έστω D_n η διεδρική ομάδα τάξεως $2n$. Δείξτε ότι αν ο n είναι περιττός, τότε όλες οι Sylow υποομάδες της D_n είναι κυκλικές. Ισχύει το συμπέρασμα αν το n είναι άρτιος;

11. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα με τάξη $|G| = 2n$, όπου n περιττός. Τότε υπάρχει κανονική υποομάδα N της G με $|N| = n$. Ιδιαιτέρως, η G δεν είναι απλή.

12. Αν η G είναι πεπερασμένη ομάδα τάξεως pq, όπου p και q πρώτοι με $p \leq q$, τότε η G έχει κανονική υποομάδα τάξεως q (άρα κυκλική). Ιδιαιτέρως, η G δεν είναι απλή.

13. Ταξινομήστε τις ομάδες τάξεως $2p$, όπου p περιττός πρώτος.

14. Μια πεπερασμένη ομάδα τάξεως p^2q, όπου p και q πρώτοι, δεν είναι απλή.

15. Μια πεπερασμένη ομάδα της οποίας η τάξη είναι γινόμενο τριών διαφορετικών πρώτων δεν είναι απλή.

16. Έστω G μη κυκλική πεπερασμένη ομάδα με $|G| < 60$. Δείξτε ότι η G δεν είναι απλή.

17. Αν η G είναι απλή ομάδα τάξεως 60, τότε $G \cong A_5$.

18. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες τάξεως 90, 132, 144 ή 150.

    Σκοπός των επόμενων ασκήσεων είναι να δώσουν μια διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος του Sylow.

19. Έστω $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, p πρώτος, το σώμα με p στοιχεία, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ η ομάδα των αντιστρεψίμων $n \times n$ πινάκων επί του $\mathbb{F}_p$ και $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)$ η υποομάδα της που αποτελείται από εκείνους τους πίνακες των οποίων τα στοιχεία κάτω της κύριας διαγωνίου είναι μηδέν και κάθε στοιχείο της κύριας διαγωνίου είναι ίσο με 1. Δηλαδή, κάθε πίνακας στην $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)$ έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Δείξτε ότι η $\mathrm{UT}_n(\mathbb{F}_p)$ είναι Sylow p-υποομάδα της $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. [Υπόδειξη: Από το γεγονός ότι ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν οι στήλες του είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, βρίσκουμε ότι $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$.]

20. Έστω H μια Sylow p-υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας G και K μια υποομάδα της G της οποίας η τάξη είναι πολλαπλάσιο του p. Δείξτε ότι υπάρχει στοιχείο x της G έτσι ώστε η $K \cap xHx^{-1}$ είναι Sylow p-υποομάδα της K.

21. Έστω G ομάδα τάξεως $p^k m$, όπου p πρώτος που δεν διαιρεί τον m. Τότε υπάρχει τουλάχιστον μια Sylow p-υποομάδα της G. [Υπόδειξη: Αρκεί να εμφυτεύσετε την G στην $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, όπου $n = |G|$.]