Στοχαστικές Ανελίξεις
Σειρά Ασκήσεων 2

Άσκηση 1 Έστω $X_A \sim Exp(\lambda_A)$
$X_B \sim Exp(\lambda_B)$

(a)

Ο χρόνος μέχρι το πρώτο γεγονός είναι $X = \min(X_A, X_B)$

Η κατανομή της X βρίσκεται ως εξής

$$P(X > x) = P(\min(X_A, X_B) > x) = P(X_A > x, X_B > x) =$$

$$= P(X_A > x)\, P(X_B > x) = e^{-\lambda_A x} e^{-\lambda_B x} = e^{-(\lambda_A + \lambda_B)x}$$

$$\Rightarrow F_X(x) = 1 - e^{-(\lambda_A+\lambda_B)x} \quad \Rightarrow \quad X \sim Exp(\lambda_A + \lambda_B)$$

(b) Η πιθανότητα να συμβεί το A πριν το B είναι

$$P(X_A < X_B) = \int_0^\infty P(X_B > x)\, \lambda_A e^{-\lambda_A x}\, dx = \int_0^\infty e^{-\lambda_B x} \lambda_A e^{-\lambda_A x}\, dx =$$

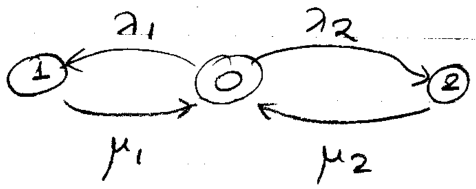
$$= \lambda_A \int_0^\infty e^{-(\lambda_A+\lambda_B)x} dx = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

Άσκηση 2 Η κατάσταση $X(t)$ ενός μορίου αιμοσφαιρίνης μπορεί να είναι

$$X(t) = \begin{cases} 0 & \text{ελεύθερο μόριο} \\ 1 & \text{κατειλημμένο από οξυγόνο} \\ 2 & \text{" " διοξείδιο.} \end{cases}$$

(a)

Στην κατάσταση 0 δύο γεγονότα μπορούν να προκαλέσουν αλλαγή κατάστασης: προσκόλληση οξυγόνου με ρυθμό λ_1 και μετάβαση στην 1 ή προσκόλληση διοξειδίου με ρυθμό λ_2 και μετάβαση στη 2. Στις καταστάσεις 1 και 2 το μόνο γεγονός που μπορεί να προκαλέσει αλλαγή κατάστασης είναι η απελευθέρωση του μορίου δηλαδή μετάβαση στην κατάσταση 0, με ρυθμό μ_1 κ' μ_2 αντίστοιχα. Με βάση τα παραπάνω το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



Ο πίνακας ρυθμών μετάβασης είναι
$$Q = \begin{pmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

(b) Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη κ' επομένως θετικά επαναληπτική (πεπερασμένη). Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\left.\begin{array}{ll} 1: & P_1\mu_1 = P_0\lambda_1 \\ 2: & P_2\mu_2 = P_0\lambda_2 \\ & P_0+P_1+P_2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1 = P_0\dfrac{\lambda_1}{\mu_1} \\ P_2 = P_0\dfrac{\lambda_2}{\mu_2} \\ P_0\left(1+\dfrac{\lambda_1}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P_0 = \dfrac{1}{1+\lambda_1/\mu_1+\lambda_2/\mu_2} \\ P_1 = \dfrac{\lambda_1/\mu_1}{1+\lambda_1/\mu_1+\lambda_2/\mu_2} \\ P_2 = \dfrac{\lambda_2/\mu_2}{1+\lambda_1/\mu_1+\lambda_2/\mu_2} \end{array}$$

Άσκηση 3 (a) Επειδή η ασχολία του κάθε ατόμου δεν επηρεάζει το άλλο, μπορούμε να αναλύσουμε χωριστά τις δύο διαδικασίες.

Ο εργαζόμενος 1 ασχολείται σύμφωνα με μια Μαρκοβιανή διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{X_1(t), t \geq 0\}$, όπου $X_1(t) = 1$ ή 0 αν εργάζεται ή τεμπελιάζει, αντίστοιχα.
Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι

$$\textcircled{1} \underset{\mu_1}{\overset{\lambda_1}{\rightleftarrows}} \textcircled{0}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι $\left.\begin{array}{l} p_1 \lambda_1 = p_0 \mu_1 \\ p_0 + p_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p_0 = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}$

$$p_1 = \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}$$

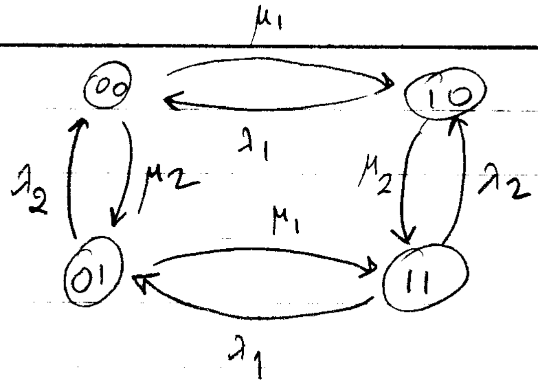
Επομένως ο 1 εργάζεται σε ποσοστό χρόνου $\frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}$ κ' τεμπελιάζει σε ποσοστό χρόνου $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1}$

Όμοια για τον εργαζόμενο 2 βρίσκουμε την οριακή κατανομή

$$q_0 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}, \quad q_1 = \frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}$$

Επειδή οι δύο διαδικασίες είναι ανεξάρτητες, η οριακή πιθανότητα (κ' ισοδύναμα το ποσοστό χρόνου) να εργάζονται και τα δύο άτομα είναι ίση με $p_1 q_1 = \dfrac{\mu_1 \mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)}$

Η ανάλυση θα μπορούσε να γίνει κ' με μια μόνο διαδικασία που μοντελοποιεί την κατάσταση του συστήματος ως ζεύγος (i,j), $i \in \{0,1\}$, $j \in \{0,1\}$ με την παραπάνω ερμηνεία.
Το διάγραμμα μεταβάσεων για τη διαδικασία αυτή είναι



Στη διαδικασία αυτή οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$P_{00}(\mu_1+\mu_2) = P_{01}\lambda_2 + P_{10}\lambda_1$$

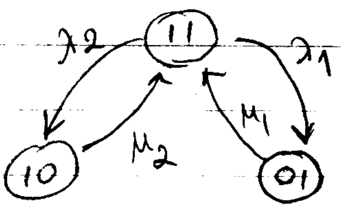
$$P_{01}(\mu_1+\lambda_2) = P_{00}\mu_2 + P_{11}\lambda_1$$

$$P_{10}(\mu_2+\lambda_1) = P_{00}\mu_1 + P_{11}\lambda_2$$

$$P_{00}+P_{01}+P_{10}+P_{11} = 1$$

Η λύση των εξισώσεων είναι $P_{ij} = p_i q_j$ όπου p_i κ' q_j όπως έχουν βρεθεί προηγουμένως.

(b) Όταν τα δύο άτομα μοιράζονται το ίδιο τηλέφωνο η διαδικασία δε μπορεί να διασπαστεί σε δύο ανεξάρτητες. Τώρα η κατάσταση είναι το ζεύγος (i, j) αλλά η κατάσταση $(0,0)$ δεν επιτρέπεται. Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



Παρατηρήστε ότι στην κατάσταση $(1,0)$, όπου ο πρώτος εργαζόμενος εργάζεται και ο δεύτερος τηλεφωνεί, το μόνο γεγονός που προκαλεί αλλαγή κατάστασης είναι να τελειώσει το τηλεφώνημα (αντίστοιχα για την $(0,1)$).

Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$\left.\begin{aligned} P_{10}\mu_2 &= P_{11}\lambda_2 \\ P_{01}\mu_1 &= P_{11}\lambda_1 \\ P_{01}+P_{10}+P_{11} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$P_{11} = \frac{1}{1+\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}}, \quad P_{10} = \frac{\frac{\lambda_2}{\mu_2}}{1+\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}}, \quad P_{01} = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}{1+\frac{\lambda_1}{\mu_1}+\frac{\lambda_2}{\mu_2}}$$

Εδώ το ποσοστό χρόνου που εργάζονται και οι δύο είναι ίσο με P_{11}

Ισχύει ότι $$P_{11} = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2+\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1}$$

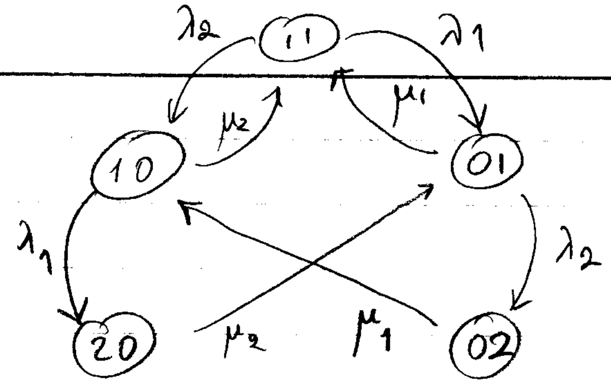
Στο μέρος (α) το αντίστοιχο ποσοστό χρόνου βρέθηκε

ίσο με $$\frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}\,\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} = \frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1+\mu_1\mu_2} < \frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1+\mu_1\mu_2} = P_{11}$$

(γ) Στο μοντέλο αυτό χρειάζεται στην κατάσταση να περιλάβουμε και τις περιπτώσεις που ένας εργαζόμενος δεν εργάζεται ούτε τηλεφωνεί αλλά βρίσκεται σε αναμονή για το τηλέφωνο. Επομένως η κατάσταση προσδιορίζεται από το ζεύγος (i,j) όπου τώρα τα i,j μπορούν να πάρουν τιμές 0 = τηλεφωνεί 1 = εργάζεται 2 = περιμένει το τηλέφωνο.

Προφανώς οι καταστάσεις $(0,0)$ και $(2,2)$ δεν επιτρέπονται γιατί δεν μπορούν και οι δύο να τηλεφωνούν ή να περιμένουν ταυτόχρονα. Επίσης δεν επιτρέπονται οι καταστάσεις $(1,2)$ και $(2,1)$ γιατί αν ο ένας εργαζόμενος εργάζεται ο άλλος δεν μπορεί να περιμένει το τηλέφωνο αφού δεν το απασχολεί ο πρώτος.

Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



Στην κατάσταση (1,0) τώρα μπορούν να συμβούν δυο γεγονότα: να τελειώσει το τηλεφώνημα ο δεύτερος κ' να επιστρέψει στην εργασία του ή να χρειαστεί το τηλέφωνο ο πρώτος κ' να μπει σε κατάσταση αναμονής. Επίσης στην κατάσταση (2,0) το μόνο που μπορεί να προκαλέσει αλλαγή είναι να τελειώσει το τηλεφώνημα του δεύτερου, οπότε ο πρώτος μπαίνει σε κατάσταση τηλεφωνήματος κ' ο δεύτερος σε κατάσταση εργασίας. (αντίστοιχα για τις (0,1) και (0,2)).
Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

(1,0): $P_{10}(\lambda_1+\mu_2) = P_{11}\lambda_2 + P_{02}\mu_1$

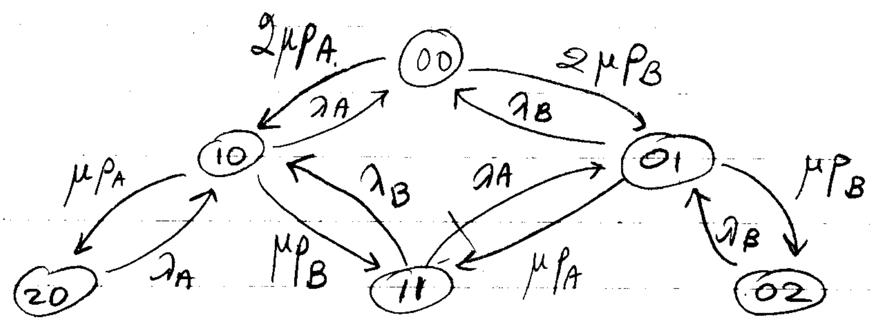
(0,1): $P_{01}(\lambda_2+\mu_1) = P_{11}\lambda_1 + P_{20}\mu_2$

(2,0): $P_{20}\mu_2 = P_{10}\lambda_1$

(0,2): $P_{02}\mu_1 = P_{01}\lambda_2$

$P_{00}+P_{10}+P_{01}+P_{20}+P_{02}=1$

Άσκηση 4 Η κατάσταση του συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί με βάση τον αριθμό αυτοκινήτων που παραμένουν ανοικίαστα σε κάθε πόλη, δηλαδή το ζεύγος $X(t) = (i,j)$, $i,j \geq 0$, $i+j \leq 2$. Τότε ο αριθμός των νοικιασμένων αυτοκινήτων είναι $2-i-j$.
Το διάγραμμα μεταβάσεων φαίνεται παρακάτω:



Το διάγραμμα προκύπτει ως εξής:
Στην κατάσταση $(0,0)$ και τα δύο αυτοκίνητα κυκλοφορούν. Ο χρόνος μέχρι να επιστραφεί το πρώτο από τα δύο ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό 2μ (βλ. Άσκηση 1). Επομένως ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση $(0,0)$ είναι $T_{(00)} \sim Exp(q_{(00)})$, με $q_{(00)} = 2\mu$.
Όταν επιστραφεί το αυτοκίνητο θα πάει στην A με πιθανότητα p_A, δηλαδή $P_{00,10} = p_A$, κ' $P_{00,01} = p_B$.

Επομένως οι ρυθμοί μετάβασης από την κατάσταση $(0,0)$ είναι $q_{00,10} = q_{00} \cdot P_{00,10} = 2\mu p_A$, $q_{00,01} = 2\mu p_B$.

Στην κατάσταση (10) τα γεγονότα που μπορούν να προκαλέσουν μετάβαση είναι η ενοικίαση του αυτοκινήτου στην A, η επιστροφή του νοικιασμένου. Επομένως ο χρόνος παραμονής στην $(1,0)$ είναι ο ελάχιστος των δύο, δηλαδή
$T_{(10)} \sim Exp(q_{(10)})$ όπου $q_{(10)} = \lambda_A + \mu$

Η πιθανότητα να γίνει μετάβαση $(1,0) \to (0,0)$ είναι ίση με $\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\mu}$, δηλ. να συμβεί το πρώτο γεγονός πριν το δεύτερο (βλ. Άσκηση 1), κ' η πιθανότητα να επιστραφεί πρώτα το νοικιασμένο αυτοκίνητο είναι ίση με $P_{10,00} = \frac{\mu}{\lambda_A+\mu}$. Αν επιστραφεί πρώτα το νοικιασμένο αυτοκίνητο, η επιστροφή θα γίνει στην Α με πιθ. p_A κ' στη Β με πιθ. p_B. Επομένως η πιθανότητα μετάβασης $(1,0) \to (2,0)$ είναι ίση με $\frac{\mu}{\lambda_A+\mu} p_A = P_{10,20}$

(δηλ. να επιστραφεί το ενοικιασμένο αυτοκίνητο κ' η επιστροφή να γίνει στην πόλη Α)
κ' αντίστοιχα η μετάβαση $(1,0) \to (1,1)$ έχει πιθανότητα

$$P_{(1,0)\to(1,1)} = \frac{\mu}{\lambda_A+\mu} p_B$$

Οι ρυθμοί μετάβασης προκύπτουν

$$q_{10,00} = q_{10} P_{10,00} = (\lambda_A+\mu)\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\mu} = \lambda_A$$

$$q_{10,20} = q_{10} P_{10,20} = \mu p_A, \qquad q_{10,11} = q_{10} P_{10,11} = \mu p_B$$

Οι καταστάσεις $(0,1)$ κ' $(0,2)$ προκύπτουν αντίστοιχα με τις $(1,0)$ κ' $(2,0)$

Στην κατάσταση $(1,1)$ υπάρχει ένα αυτοκίνητο στην Α κ' ένα στη Β, επομένως τα γεγονότα που μπορούν να αλλάξουν την κατάσταση του συστήματος είναι η ενοικίαση του ενός ή του άλλου, με αντίστοιχους ρυθμούς λ_A κ' λ_B

Οι εξισώσεις ισορροπίας για $\lambda_A = \lambda_B = \lambda$, $p_A = p_B = 1/2$ γίνονται

$(0,0)$ $\quad P_{00} \cdot 2\mu = P_{10}\lambda + P_{01}\lambda$

$(1,0)$ $\quad P_{10}(\lambda+\mu) = P_{00}\mu + P_{20}\cdot\lambda + P_{11}\cdot\lambda$

$(0,1)$ $\quad P_{01}(\lambda+\mu) = P_{00}\mu + P_{02}\lambda + P_{11}\lambda$

$(2,0)$ $\quad P_{20}\lambda = P_{10}\cdot\frac{\mu}{2}$

$(0,2)$ $\quad P_{02}\lambda = P_{01}\cdot\frac{\mu}{2}$

$$P_{00} + P_{10} + P_{01} + P_{20} + P_{02} + P_{11} = 1.$$

Παρατηρούμε ότι λόγω συμμετρίας θα πρέπει $P_{10} = P_{01}$ κ' $P_{20} = P_{02}$.

Πραγματικά αυτό μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά ως εξής
Από τις $(1,0)$ κ' $(2,0)$ προκύπτει

$$P_{10}(\lambda+\mu) - P_{20}\lambda = P_{00}\mu + P_{11}\lambda \qquad (I)$$
$$-P_{10}\frac{\mu}{2} + P_{20}\lambda = 0$$

ενώ από τις $(0,1)$ κ' $(0,2)$

$$P_{01}(\lambda+\mu) - P_{02}\lambda = P_{00}\mu + P_{11}\lambda \qquad (II)$$
$$-P_{01}\frac{\mu}{2} + P_{02}\lambda = 0$$

Βλέπουμε ότι τα I, κ' II είναι το ίδιο σύστημα εξισώσεων ως προς P_{10}, P_{20} ή P_{01}, P_{02} κ' επομένως τα

(P_{10}, P_{20}) κ' (P_{01}, P_{02}) εκφράζονται με τον ίδιο τρόπο

συναρτήσει των P_{00}, P_{11} κ' επομένως είναι ίσα.

(Εναλλακτικά, αντί να γίνει η παραπάνω απόδειξη,
θα μπορούσαμε να υποθέσουμε $P_{10} = P_{01}$, $P_{20} = P_{02}$
λόγω συμμετρίας κ' να
λύσουμε το σύστημα με τις παραπάνω επιπλέον εξισώσεις.
Αν βρούμε λύση, τότε εξ αιτίας της μοναδικότητας,
αυτή θα είναι η οριακή κατανομή).

Έχοντας $P_{01} = P_{10}$ κ' $P_{02} = P_{20}$ οι εξισώσεις 0,1 κ' 0,2
γίνονται πλεοναστικές κ' το σύστημα γίνεται

$(0,0)$ $\quad 2\mu P_{00} = 2\lambda P_{10}$

$(1,0)$ $\quad P_{10}(\lambda+\mu) = P_{00}\mu + P_{20}\lambda + P_{11}\mu$

$(2,0)$ $\quad P_{20}\lambda = P_{10}\frac{\mu}{2}$

$$P_{00} + 2P_{10} + 2P_{20} + P_{11} = 1$$

Από την $(0,0)$ παίρνουμε $P_{10} = P_{00}\theta$, όπου $\theta = \frac{\mu}{\lambda}$

Επίσης από την $(2,0)$: $P_{20} = \frac{1}{2}\theta P_{10} = \frac{1}{2}\theta^2 P_{00}$

Τέλος από την $(1,0)$: $P_{10}(1+\theta) = P_{00}\theta + P_{20} + P_{11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_{00}\theta(1+\theta) = P_{00}\theta + \frac{1}{2}\theta^2 P_{00} + P_{11} \Rightarrow P_{11} = \frac{1}{2}\theta^2 P_{00} = P_{20}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κανονικοποίησης

$$P_{00}\left(1+2\theta+\frac{3\theta^2}{2}\right)=1 \Rightarrow \quad P_{00} = \frac{2}{2+4\theta+3\theta^2}$$

$$P_{10}=P_{01}=P_{00}\theta = \frac{2\theta}{2+4\theta+3\theta^2}$$

$$P_{20}=P_{02}=P_{11}=P_{00}\frac{\theta^2}{2} = \frac{\theta^2}{2+4\theta+3\theta^2}$$

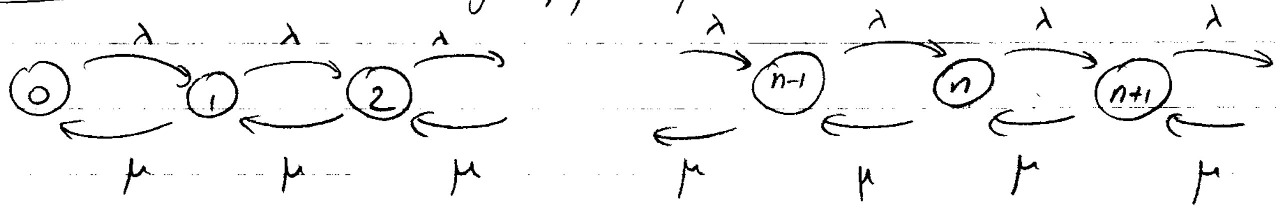
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το ποσοστό χρόνου που ο αριθμός των ποικιασμένων αυτοκινήτων είναι :

0 : $\quad P_{20}+P_{02}+P_{11} = \dfrac{3\theta^2}{2+4\theta+3\theta^2}$

1 : $\quad P_{10}+P_{01} = \dfrac{4\theta}{2+4\theta+3\theta^2}$

2 : $\quad P_{00} = \dfrac{2}{2+4\theta+3\theta^2}$

Άσκηση 5   Το διάγραμμα μεταβάσεων είναι



(α) Οι εξισώσεις ισορροπίας ανά κατάσταση είναι:

$i=0$ $\quad P_0 \lambda = P_1 \mu$

$i=1$ $\quad P_1(\lambda+\mu) = P_0 \lambda + P_2 \mu$

$i=2$ $\quad P_2(\lambda+\mu) = P_1 \lambda + P_3 \mu$

$i=n$ $\quad P_n(\lambda+\mu) = P_{n-1} \lambda + P_{n+1} \mu \quad , \quad n \geq 1$

(β) Αν θεωρήσουμε τις διαδοχικές διαμερίσεις $\{0,1,\dots,n\}$, $\{n+1, n+2, \dots\}$, για κάθε $n \geq 0$ κ' πάρουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας βρίσκουμε

$n=0$: $\quad P_0 \lambda = P_1 \mu$

$n=1$: $\quad P_1 \lambda = P_2 \mu$

n : $\quad P_n \lambda = P_{n+1} \mu \quad , \quad n \geq 0.$

(γ) Για να δείξουμε ότι τα παραπάνω συστήματα εξισώσεων είναι ισοδύναμα, παίρνουμε το πρώτο σύστημα
Χρησιμοποιώντας την $i=0$: $P_0 \lambda = P_1 \mu$ η $i=1$ γίνεται
$P_1 \lambda + P_1 \mu = P_0 \lambda + P_2 \Rightarrow P_1 \lambda = P_2 \mu$

Όμοια η $i=2$ γίνεται $p_2\lambda + p_2\mu = p_1\lambda + p_3\mu \Rightarrow p_2\lambda = p_3\mu$ κ.ο.κ.

Επομένως τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

Γενικά για τον υπολογισμό της οριακής κατανομής μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σύστημα βολεύει στους υπολογισμούς

(δ) Από το σύστημα στο (β) προκύπτει ότι

$p_1 = \theta p_0$, όπου $\theta = \lambda/\mu$

Επίσης $p_2 = \theta p_1 = \theta^2 p_0$, και συνεχίζοντας επαγωγικά

$p_n = \theta^n p_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = 1.$

Η εξίσωση αυτή έχει θετική λύση p_0 αν και μόνο αν $\theta<1$ δηλαδή $\lambda<\mu$. Αν $\theta>1$ τότε $p_0=0$ κ' επομένως $p_n=0 \ \forall n$ κ' η αλυσίδα δεν είναι θετικά επαναληπτική.

Όταν $\theta<1$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = \frac{1}{1-\theta}$ κ' από την εξίσωση

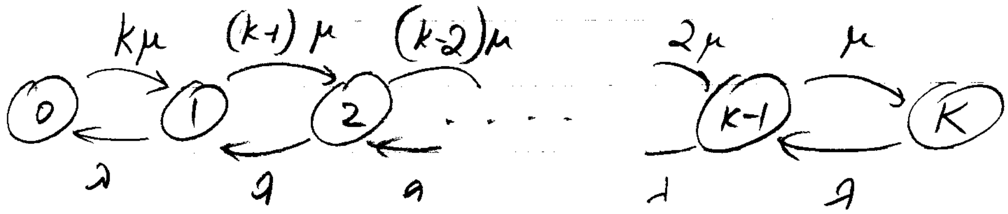
κανονικοποίησης παίρνουμε $p_0 = 1-\theta$ και

$p_n = \theta^n(1-\theta)$, $n = 0, 1, \ldots$

δηλαδή η οριακή κατανομή είναι γεωμετρική με παράμετρο $1-\theta$.

Άσκηση 6 Έστω $X(t)$ ο αριθμός προϊόντων στο κατάστημα τη στιγμή t.
Από τον τρόπο που γίνεται η αναπλήρωση των προϊόντων προκύπτει ότι $X(t) \leq K \ \forall t$ κ' επιπλέον αν $X(t) = i$, τότε έχουν γίνει $K-i$ παραγγελίες για προϊόντα που πωλήθηκαν προηγουμένως κ' δεν έχουν φτάσει ακόμη στο κατάστημα.
Επομένως στην κατάσταση $i>0$, τα γεγονότα που μπορούν να προκαλέσουν αλλαγή κατάστασης είναι είτε η πώληση ενός tablet (με ρυθμό λ κ' μετάβαση στην $i-1$) είτε η άφιξη μιας από τις $K-i$ εκκρεμείς παραγγελίες.
Λόγω της αμνήμονης ιδιότητας, άσχετα από το πότε έγιναν αυτές οι παραγγελίες, ο υπολειπόμενος χρόνος μέχρι την παράδοση για κάθε μια απ' αυτές ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ επομένως ο χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη παραγγελίας (κ' μετάβαση στην κατάσταση $i+1$) ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $(K-i)\mu$ (βλ. Άσκηση 1).
Στην κατάσταση $i=0$ δεν είναι δυνατή η πώληση ενώ στην $i=K$ δεν υπάρχει εκκρεμής παραγγελία.

Με βάση τα παραπάνω το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:



Ο αντίστοιχος πίνακας ρυθμών μετάβασης είναι

$$Q = \begin{pmatrix} -K\mu & K\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -\lambda-(K-1)\mu & (K-1)\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-(K-2)\mu & (K-2)\mu & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & -\lambda-\mu & \mu \\ 0 & 0 & & & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

Οι εξισώσεις ισορροπίας ξεκινώντας από την $i=K$ και παίρνοντας διαμερίσεις όπως στην άσκηση 5, προκύπτουν

$i=K$: $\quad P_K\lambda = P_{K-1}\mu \Rightarrow \quad P_{K-1} = P_K\theta \qquad (\theta = \lambda/\mu)$

$i=K-1$: $\quad P_{K-1}\lambda = P_{K-2}\cdot 2\mu \Rightarrow \quad P_{K-2} = P_{K-1}\cdot\frac{\theta}{2} = P_K\cdot\frac{1}{2}\theta^2$

$i=K-2$: $\quad P_{K-2}\lambda = P_{K-3}\cdot 3\mu \Rightarrow \quad P_{K-3} = P_{K-2}\cdot\frac{1}{3}\theta = P_K\cdot\frac{1}{3!}\theta^3$

κ' όμοια: $\quad P_{K-n} = P_K\cdot\frac{\theta^n}{n!} \quad n=0,1,\dots,K \Rightarrow P_i = P_K\frac{\theta^{K-i}}{(K-i)!}, \ i=0,1,\dots,$

Η εξίσωση κανονικοποίησης είναι

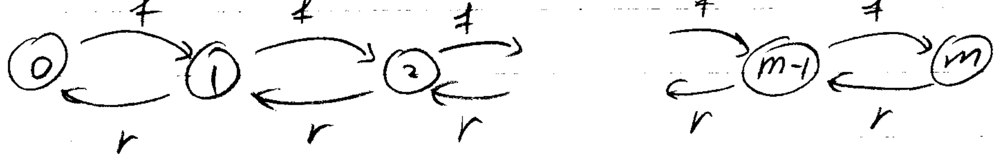
$$\sum_{i=0}^{K} P_i = 1 \Rightarrow P_K\sum_{n=0}^{K}\frac{\theta^n}{n!} = 1 \Rightarrow \quad P_K = A = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K}\frac{\theta^n}{n!}}$$

Επομένως $\quad P_i = \dfrac{\theta^i/(K-i)!}{\sum_{n=0}^{K}\theta^n/n!}, \quad i=0,1,\dots,K$

Άσκηση 7 (α) Αν στο συνεργείο υπάρχουν $X(t)=i$ μηχανήματα, με $0<i<m$, τότε $(m-i)$ μηχανήματα είναι λειτουργικά κ' το ένα απ' αυτά βρίσκεται σε λειτουργία, ενώ από τα i μηχανήματα στο συνεργείο το ένα επισκευάζεται κ' τα υπόλοιπα $i-1$ περιμένουν επισκευή. Επομένως η κατάσταση του συστήματος θα αλλάξει όταν χαλάσει το μηχάνημα που λειτουργεί ή όταν τελειώσει η επισκευή αυτού που επισκευάζεται, όποιο από τα δύο συμβεί πρώτο.

Οι χρόνοι μέχρι να συμβούν τα παραπάνω, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας, ακολουθούν εκθετική κατανομή με ρυθμούς f και r αντίστοιχα, ενώ η πιθανότητα να συμβεί πρώτα η βλάβη είναι $\frac{f}{r+f}$ κ' η πιθανότητα να συμβεί πρώτα η επισκευή είναι $\frac{r}{r+f}$. Παρατηρούμε επομένως ότι η γνώση της παρούσας κατάστασης προσδιορίζει μονοσήμαντα την κατανομή του χρόνου παραμονής και τις πιθανότητες μετάβασης, επομένως η προηγούμενη ιστορία δεν επηρεάζει την εξέλιξη του συστήματος δεδομένης της τωρινής κατάστασης. Άρα η διαδικασία είναι Μαρκοβιανή (Για $i=0$ μπορεί μόνο να συμβεί βλάβη κ' για $i=m$ μόνο επισκευή)

Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης είναι:



κ' ο αντίστοιχος πίνακας ρυθμών μετάβασης

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} -f & f & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ r & -(r+f) & f & 0 & & \vdots & \\ 0 & r & -(r+f) & f & & & \vdots \\ \vdots & & & & r & -(r+f) & f \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -r & r \end{pmatrix}$$

(β) Οι εξισώσεις ισορροπίας παίρνοντας διαμερίσεις όπως στην άσκηση 5 είναι

$$P_0 f = P_1 r \Rightarrow P_1 = P_0 \theta \qquad \theta = f/r$$

$$P_1 f = P_2 r \Rightarrow P_2 = P_1 \theta = P_0 \theta^2$$

$\vdots$

όμοια $\quad P_n = P_0 \theta^n, \quad n = 0, 1, \ldots, m$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης : $\sum_{n=0}^{m} P_n = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{n=0}^{m} \theta^n = 1$

Αν $\theta = 1$ τότε $\sum_{n=0}^{m} \theta^n = m+1$, ενώ αν $\theta \neq 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{m} \theta^n = \dfrac{\theta^{m+1} - 1}{\theta - 1}$

Επομένως $\quad P_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}, & \theta = 1 \\ \dfrac{\theta - 1}{\theta^{m+1} - 1}, & \theta \neq 1 \end{cases}$

Τελικά η οριακή κατανομή είναι : για $\theta = 1$: $P_n = \dfrac{1}{m+1}$, $n = 0, 1, \ldots, m$

για $\theta \neq 1$: $P_n = \dfrac{\theta^n (\theta - 1)}{\theta^m - 1}, \quad n = 0, 1, \ldots, m$

Η διαδικασία έχει σταμάτηση αν και μόνο αν $i = m$, επομένως το ποσοστό χρόνου είναι $p_m = \begin{cases} 1/(m+1), & \theta = 1 \\ \dfrac{\theta^{m+1} - \theta^m}{\theta - 1}, & \theta \neq 1 \end{cases}$

Αντίστοιχα το ποσοστό χρόνου που αδρανεί το συνεργείο $= P_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}, & \theta = 1 \\ \dfrac{\theta - 1}{\theta^{m+1} - 1}, & \theta \neq 1. \end{cases}$