λύσεις

σελ. 32-33

1) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 3 αριθμοί από το 1 ως το 300 έτσι ώστε το άθροισμα τους να διαιρείται με το 3.

πχ. $\underset{1}{\overset{\uparrow}{7}} + \underset{2}{\overset{\uparrow}{29}} + \underset{1}{\overset{\uparrow}{145}} = 188$

$\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$

$[0]+[0]+[0]=[0] \rightarrow \binom{100}{3}$

$[1]+[1]+[1]=[0] \rightarrow \binom{100}{3}$

$[2]+[2]+[2]=[0] \rightarrow \binom{100}{3}$

$[0]+[1]+[2]=[0] \rightarrow 100^3 + 3\binom{100}{3}$

2) Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 1400;

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3$

4τρ. 3τρ 2τρ $\Rightarrow$ 24 τρ. $\cancel{2^0 - 5^0 - 7^0}$

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

1400	2
700	2
350	2
175	5
35	5
7	

$\left(\sum_{k=1}^{7} \binom{3+2+1+1}{k}\right)$

3) Από ένα μεγάλο αριθμό κερμάτων

1λ, 2λ, 5λ, ..., 2€

Με πόσους τρόπους επιλ. 6 κέρματα

$\left[\begin{matrix}8\\6\end{matrix}\right]$

4) Κατά πόσους τρόπους μπορούν r όμοιες μπάλες να τοποθετηθούν σε n διακεκριμένα κελιά ώστε κάθε κουτί να περιέχει τουλ. 9 μπάλες.

$$\left[\begin{matrix} n \\ r-9n \end{matrix}\right]$$

Να βρεθεί ο αριθμός των τρόπων που μπορούν να τοποθ. $2t+1$ μη διακ. μπάλες σε 3 διακ. κουτιά ώστε 2 κουτιά μαζί να περιέχουν περ. μπάλες από το τρίτο.

$$k_1+k_2+k_3=2t+1$$

$$k_i \leq t$$

$$t-k_1 \geq 0$$

$$\underbrace{(t-k_1)}_{\lambda_1}+\underbrace{(t-k_2)}_{\lambda_2}+\underbrace{(t-k_3)}_{\lambda_3}=-2t-1+3t$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=t-1$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$\left[\begin{matrix} t-1 \\ 3 \end{matrix}\right]=\binom{t+2}{3}$$

(5) (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{r}{k}=(-1)^n\binom{r-1}{n}$

$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$ τρ. Pascal

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}\right]$$

$$\cancel{1}-\left[\cancel{\binom{r-1}{1}}+\cancel{1}\right]+\left[\cancel{\binom{r-1}{2}}+\cancel{\binom{r-1}{1}}\right]-\left[\binom{r-1}{3}+\cancel{\binom{r-1}{2}}\right]$$

(β)

6) $\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$

(γ) $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$

Ασκήσεις 2º

17/1/2014

1) Να βρεθεί ο συντελεστής του x^{23} στην παράσταση $(1+x^5+x^9)^{100}$

$$[(1+x^5)+x^9]^{100} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{100}{k} (1+x^5)^k (x^9)^{100-k}$$

Μας αρκεί: $x^{23} = x^{5a+9b} = x^5 \cdot x^9 \cdot x^9$

Οπότε για $\underline{k=98}$ αρκεί να κοιτάξουμε την εξής παράσταση: $\binom{100}{2} \underbrace{(1+x^5)^{98}}_{x^5} \cdot x^{18}$

Θέλουμε να διαλέξουμε απο τους 98 παράγοντες 1 x^5

Δηλαδή ο συντελεστής θα είναι: $\binom{100}{2}\binom{98}{1} = 98 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} = 50 \cdot 99 \cdot 98$.

β' τρόπος

$$\underbrace{(1+x^5+x^9)(1+x^5+x^9) \cdots (1+x^5+x^9)}_{100 \text{ παρενθέσεις}} \qquad x^{23} = x^5 \cdot x^9 \cdot x^9.$$

Απο όλες τις παρενθέσεις διαλέγουμε δύο για να εμφανιστεί το x^{18} και μετά άλλη μια για το x^5. Οπότε $\binom{100}{2} \cdot \binom{98}{1}$

ΔΕΝ επιτρέπεται να διαλέξουμε 2 φορές την ίδια παρένθεση.

2) Να βρεθούν οι τρόποι να περάσουν r διακεκριμένα αυτοκίνητα απο n σταθμούς διοδίων δεδομένου ότι από το **πολύ** ένα σταθμό ΔΕΝ θα περάσει κανείς. ✳

● Περνά απο όλους τους σταθμούς ένα τουλάχιστον αυτοκίνητο.

$\rightarrow \underset{1^o\ \text{αυτοκ}}{r}\,\underset{2^o\ \text{αυτοκ}}{(r-1)} \cdots \underset{n\ \text{αυτοκίνητο}}{(r-n+1)} = \frac{r!}{(n-r)!}$ Διαλέγω πρώτα αυτοκ. (n)

$\rightarrow n(n+1) \cdots (n+r-n-1) = \frac{(r-1)!}{(n-1)!}$ Διαλέγω r-n από όσα έχουν μείνει.

Συνολικά: $\frac{r!}{(r-n)!} \frac{(r-1)!}{(n-1)!} = r! \binom{r-1}{n-1}$

● Επιλέγουμε εναν σταθμό από τον οποίο ΔΕΝ θα περάσει κανείς $\rightarrow$ n επιλογές
Απο όλους τους υπόλοιπους περνά τουλάχιστον 1 αυτοκίνητο $\rightarrow$ όπως πριν θα προκύψει: $r! \binom{r-1}{n-2}$

Οπότε Συνολικά: $n \cdot r! \binom{r-1}{n-2}$

Τελικό αποτέλεσμα: $r! \binom{r-1}{n-1} + r! \cdot n \cdot \binom{r-1}{n-2}$

3) Να βρεθεί η ακολουθία της οποίας είναι γεννήτρια η εξής συνάρτηση:

ⓐ $A(x) = \dfrac{1+2x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3} = \dfrac{1+x-x^2-x^3}{1+x-x^2-x^3} + \dfrac{x}{1+x-x^2-x^3} = 1 + \dfrac{x}{1+x-x^2-x^3} =$

$= 1 + \dfrac{x}{(1+x)^2(1-x)}$

$\dfrac{1}{(1+x)^2(1-x)} = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{1+x} + \dfrac{\Gamma}{(1+x)^2} \Longrightarrow$

$\Rightarrow A(1+x)^2 + B(1-x)(1+x) + \Gamma(1-x) = 1 \Longrightarrow$

$\Rightarrow A + 2Ax + Ax^2 + B - Bx^2 + \Gamma - \Gamma x = 1 \Longrightarrow$

$\Rightarrow (A+B+\Gamma) + (2A-\Gamma)x + (A-B)x^2 = 1 \Longrightarrow \ldots$

$\ldots$

$\Rightarrow A = 1/4 \quad B = 1/4 \quad \Gamma = -1/2$

Οπότε $A(x) = 1 + x\left(\dfrac{1}{4(1-x)} + \dfrac{1}{4(1+x)} - \dfrac{1}{2(1+x)^2}\right) =$

$= 1 + x\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k\right) =$

$= 1 + x\left(\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k\right) =$

$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^k - \frac{1}{2}(-1)^k(k+1)\right]x^{k+1} =$

$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^{k-1} - \frac{1}{2}(-1)^{k-1}\cdot k\right]x^k =$

$= \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^{k-1} - \frac{1}{2}(-1)^{k-1}\cdot k\right]}_{a_k}x^k$

Ασκήσεις 3η

24/1/2014

1) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1}{k}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1}{k-1}x^k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1}{k}x^k+x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1}{k}x^k$

$\Leftrightarrow (1+x)^n = (1+x)^{n-1}+x(1+x)^{n-1} = (1+x)(1+x)^{n-1}$

Επίσης $(1+x)^{2n}=(1+x)^n\cdot(1+x)^n$

Να αποδείξετε με την μέθοδο των ΓΣ ότι $\binom{2n}{k}=\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}\binom{n}{k-l}$

$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k\right) \xlongequal{\text{συνέλιξη}} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}\binom{n}{k-l}x^k$

Οπότε πράγματι: $\binom{2n}{k}=\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}\binom{n}{k-l}$

2) (α) $A(x)=\dfrac{2+3x-6x^2}{1+2x}=\dfrac{-3x-6x^2+6x+1+2-1}{1+2x}=$

$=\dfrac{-3x(1+2x)+3(1+2x)-1}{1+2x}=3-3x-\dfrac{1}{1+2x}=$

$=3-3x-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(2x)^k=3-3x-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot 2^k\cdot x^k$

$x_0=2,\ x_1=-1$ Οπότε $2,-1,-2^3,2^4,-2^5,2^6,\dots$

(β) $A(x)=\dfrac{2}{1-4x^2}=2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}(-4x^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}2\binom{-1}{k}(-4)^k x^{2k}=$

$=\sum_{k=0}^{\infty}2\cdot(-1)^k\cdot(-1)^k\cdot 4^k\cdot x^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}2^{2k+1}x^{2k}=$

$=2^1+0\cdot x+8\cdot x^2+0\cdot x^3+32x^4+0\cdot x^5+\dots$

Οπότε $a_k=\begin{cases}2^{2k+1}, & \text{για } k \text{ άρτιο}\\ 0, & \text{για } k \text{ περιττό}\end{cases}$

3) Βρείτε την γεννήτρια της ακολουθίας $a_0,a_1,\dots$ όπου a_r είναι το πλήθος των τρόπων να επιλέξουμε r γράμματα από το αλφάβητο $\{0,1,2\}$ με το 0 να εμφανίζεται ζυγό αριθμό φορών. Υπολογίστε το a_r.

$A(x)=\underbrace{(1+x+x^2+\dots)}_{\text{χ. περιορ.}}\underbrace{(1+x+x^2+\dots)}_{\text{χ. περιορ.}}\underbrace{(1+x^2+x^4+\dots)}_{\text{ζυγός αριθμός}}=$

$=\dfrac{1}{(1-x)^2}\cdot\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{(1-x)^3(1+x)}=\dfrac{A}{1+x}+\dfrac{B}{1-x}+\dfrac{\Gamma}{(1-x)^2}+\dfrac{\Delta}{(1-x)^3}\ \dots$

Θα πρέπει: $A(1-x)^3 + B(1-x)^2(1+x) + \Gamma(1-x^2) + \Delta(1+x) = 1$

Κάνοντας πράξεις προκύπτει ότι: $A=B$, $2A=\Gamma$, $4A=\Delta$ και $A=1/8$

Οπότε $A(x) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^3}$

Ξέραμε τις δυναμοσειρές του καθενός

Άρα τελικά

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{8}\left[1+(-1)^r + \frac{(r+1)(r+3)}{4}\right] x^r$$

Ασκήσεις 4ο

31/1/2014

3) Να βρεθεί ο εκθετικός απαριθμητής για τους τρόπους που διαλέγουμε r ή λιγότερα αντικείμενα (διακεκριμένα) και να τα κατανείμουμε σε n υποδοχές ταξινομημένα

$A(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^n$ → ΛΑΘΟΣ!

ΣΩΣΤΟ: $A(x) = \left(1 + 1!\cdot\frac{x}{1!} + 2!\cdot\frac{x^2}{2!} + 3!\cdot\frac{x^3}{3!} + \dots\right)^n =$

$= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\cdot\frac{x^k}{k!}$

Τρόποι να διαλέξω ακριβώς r : $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$

Αυτό που θέλουμε:

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}\frac{x^r}{r!}$$

Εφαρμογές 4ο

1) **ΝΔΟ κάθε θετικός ακέραιος γράφεται μοναδικά σαν άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2**

Γεννήτρια $a_r = |\{$τρόποι να γραφεί το r ως άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2$\}|$

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^k})\cdots$$

Θέλουμε $g(x) = 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots = \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow g(x)(1-x) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^k})\cdots = 1 \Leftrightarrow (1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots = 1$$

$$\Leftrightarrow (1-x^4)(1+x^4)\cdots = 1 \Leftrightarrow (1-x^{2^N}) = 1$$ που ισχύει γιατί $x<1$ και

όταν $N \to \infty$ $\quad x^{2^N} \to 0$

Άρα αυτό που θέλαμε ΙΣΧΥΕΙ!

2) **Να βρεθεί η εκθετική ΓΣ για τον αριθμό των τρόπων τοποθέτησης r διακεκριμένα άτομα σε 3 διακεκριμένες αίθουσες με ένα τουλάχιστον σε κάθε αίθουσα.**

$$A(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 = (e^x-1)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^k \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}x^r(3-k)^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{3}{k}(3-k)^r} \longrightarrow 3!\,S(r,3)$$

β) με τον περιορισμό σε κάθε αίθουσα να μπαίνει άρτιος αριθμός ατόμων.

$$B(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)^3 = \left(e^x - \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\right)^3$$

{7/2/2014}

Ασκήσεις 5ο

1) Πόσες τοποθετήσεις των ψηφίων $0,1,\dots,9$ υπάρχουν στις οποίες το πρώτο ψηφίο να είναι μεγαλύτερο του 1 και το τελευταίο μικρότερο του 8.

Ορίζω: C_1 = οι μεταθέσεις των $0,\dots,9$ με πρώτο ψηφίο ≤ 1

C_2 = " " " με τελευταίο ψηφίο ≥ 8

Έτσι $N(\bar{C_1}\bar{C_2}) = N - N(C_1) - N(C_2) + N(C_1C_2) =$

$= 10! - 2\cdot 9! - 2\cdot 9! + 2\cdot 2\cdot 8!$ $\to (10-2)!$

2) 1000 μαθητές

400 μιλούν Γαλλικά : Γ

300 μιλούν Ιταλικά : Ι

200 μιλούν Σουηδικά : Σ

200 μιλούν δυο γλώσσες

100 -"- τρεις γλώσσες

Ψάχνουμε ποιός δεν μιλά τίποτε.

$N(\bar{\Gamma}\bar{I}\bar{\Sigma}) = N - N(\Gamma) - N(I) - N(\Sigma) + [N(\Gamma I) + N(\Gamma\Sigma) + N(I\Sigma)] - N(\Gamma I \Sigma) =$

$= 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100 = 200$

3) Πόσες ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=20$ δεδομένου ότι $0\leq x_i \leq 8$

$C_i = \{$το κελί i να περιέχει πάνω από 8 σφαιρίδια$\}$.

$N(\bar{C_1}\bar{C_2}\bar{C_3}\bar{C_4}\bar{C_5}\bar{C_6}) = N - \sum_{i=1} N(C_i) + \sum_{\substack{1\leq i<j<6 \\ i\neq j}} N(C_iC_j) - \sum_{1\leq i<j<k\leq 6} \underbrace{N(C_iC_jC_k)}_{0}$

γιατί αλλιώς θα φτάναμε με το άθροισμα στο 24

Επαναληπτικοί συνδυασμοί των 6 ανά 20 (N) $= \binom{25}{20}$

Για να βρω το $N(C_i)$ σημαίνει ότι $\exists\, x_i$ τω $x_i \geq 9 \Rightarrow x_i - 9 \geq 0$

Οπότε γίνεται $y_1 + y_2 + \dots + y_6 = 20 - 9 = 11$

Οπότε $N(C_i) = \binom{16}{5}$

Για να βρω το $N(C_iC_j)$ σημαίνει ότι $\exists\, x_i x_j$ τω $x_i \geq 9$ κ $x_j \geq 9 \Rightarrow$ $x_i - 9 \geq 0$, $x_j - 9 \geq 0$

Οπότε γίνεται $y_1+y_2+\dots+y_6 = 20-9-9 = 2$

Υπάρχουν $\binom{6}{2}$ διαφορετικές τέτοιες επιλογές οπότε έχουμε:

Τελικά

$N(\bar{C_1}\bar{C_2}\bar{C_3}\bar{C_4}\bar{C_5}\bar{C_6}) = \binom{25}{20} - 6\binom{16}{5} + \binom{6}{2}\binom{7}{2}$

4) Ένας φοιτητής θέλει να φτιάξει ένα εβδομαδιαίο πρόγραμμα διαβάσματος ώστε κάθε μέρα να μελετά μόνο ένα απ' τα μαθήματα Μ, Φ, Χ, Θ. Να βρεθεί ο αριθμός των προγραμμάτων.

C_i : το ενδεχόμενο να μην περιέχει το μάθημα $i \in \{M, \Phi, X, \Theta\}$.

$$N(\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_3}\,\overline{C_4}) = N - \sum_{i} N(C_i) + \sum_{i \neq j} N(C_i C_j) - \sum_{\substack{i,j,k \\ \text{διαφορα, ανα 2.}}} N(C_i C_j C_k) =$$

$$= 4^7 - 4 \cdot 3^7 + \binom{4}{2} 2^7 - 4 = \cdots$$

$$= 8.400$$