Ασκήσεις Διακριτών Μαθηματικών
Μάθημα 6ο-Γραφήματα

Άσκηση 1) Πόσες κορυφές έχει ένα πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους k;

Λύση) Πλήρες δυαδικό δέντρο, εδώ, εννοούμε ένα δέντρο με ρίζα εμβαπτισμένο στο επίπεδο όπου κάθε κορυφή του έχει το πολύ δύο παιδιά και προσθέτονται ακμές από πάνω προς τα κάτω και από αριστερά προς τα δεξιά (δηλαδή, αν θεωρήσουμε πως η ρίζα βρίσκεται στο επίπεδο μηδέν, τα παιδιά της στο επίπεδο ένα κ.ο.κ, για να έχει μια κορυφή t του επιπέδου i παιδιά, θα πρέπει όλες οι κορυφές του προηγούμενου επιπέδου, $i-1$, να έχουν 2 παιδιά και οι κορυφές του επιπέδου $i-1$ που βρίσκονται αριστερότερα της t να έχουν δύο παιδιά.
'Υψος ενός ενός τέτοιου δέντρου είναι η απόσταση της ρίζας από το μακρυνότερο φύλλο του δέντρου.

Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι αν n το πλήθος των κορυφών ενός πλήρους δυαδικού δέντρου ύψους k τότε:

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1} + 1 \leq n \leq 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k$$

δηλαδή έχουμε ότι

$$2^k \leq n \leq 2^{k+1} - 1$$

Άσκηση 2). Έστω $G = (V, E)$ ακατεύθυντο γράφημα χωρίς πολλαπλές ακμές και βρόχους. Τότε, να δείξετε ότι υπάρχουν κορυφές στο G με τον ίδιο βαθμό, δηλαδή $\exists v, w \in V$ ώστε $d_G(v) = d_G(w)$, όπου με $d_G(v)$ συμβολίζουμε το πλήθος των γειτονικών κορυφών της v στο G.

Λύση) Έστω ότι δεν υπάρχουν κορυφές με τον ίδιο βαθμό στο G και έστω ότι $|V| = n$. Τότε, κάθε κορυφή είναι η μοναδική που έχει έναν από τους αριθμούς $0, 1, \ldots, n-1$ ως βαθμό. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- **Περίπτωση 1:** Δεν υπάρχει κορυφή βαθμού 0. Τότε, οι n κορυφές του G έχουν βαθμούς από το σύνολο $\{1, \ldots, n-1\}$ που έχει $n-1$ στοιχεία. Άρα, από αρχή περιστεροφωλλιάς, υπάρχουν δυο κορυφές που έχουν τον ίδιο βαθμό, που αντιφάσκει με την υπόθεσή μας.

- **Περίπτωση 2:** Υπάρχει $v \in V$ με $d_G(v) = 0$. Τότε δε γίνεται να υπάρχει κορυφή w με $d_G(w) = n-1$, γιατί (αφού το γράφημα είναι ακατεύθυντο) θα έπρεπε $e = (v, w) \in E$ άτοπο γιατί η v δεν έχει γείτονες στο G. Συνεπώς οι $n-1$ κορυφές $V \setminus \{v\}$ έχουν βαθμούς από το σύνολο $\{1, \ldots, n-1\}$ που έχει $n-2$ στοιχεία. Άρα, από αρχή περιστεροφωλλιάς, υπάρχουν δυο κορυφές που έχουν τον ίδιο βαθμό, που αντιφάσκει με την υπόθεσή μας.

Η υπόθεση ότι δεν υπάρχουν κορυφές με τον ίδιο βαθμό στο G μας οδήγησε σε άτοπο σε κάθε περίπτωση. Άρα ισχύει το αντίθετό της, που είναι το ζητούμενο.

Άσκηση 3)Έστω $G = (V, E)$ ακατεύθυντο γράφημα χωρίς πολλαπλές ακμές και βρόχους. Τότε, να δείξετε ότι $\exists v, w \in V$ ώστε $d_G(v) = d_G(w)$ και επιπλέον $dist_G(v, w) \leq 2$, όπου με $dist_G(v, w)$ συμβολίζουμε το μονοπάτι ελαχίστου μήκους με άκρα τις v και w στο G.

Λύση) Θεωρούμε την κορυφή με μέγιστο βαθμό στο G. Έστω ότι είναι η v και $d_G(v) = d$. Έστω $v_1, \ldots, v_d$ όλοι οι γείτονες της v στο G. Τότε, παρατηρούμε ότι και οι γείτονες της v, όντας κορυφές του G, πρέπει να υπόκεινται στον περιορισμό $d_G(v_i) \leq d, \forall i \in \{1, \ldots, d\}$ (αφού d είναι ο μέγιστος βαθμός). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- **Περίπτωση 1:** Υπάρχει $j \in \{1, \ldots, d\}$ ώστε $d_G(v_j) = d$. Τότε έχουμε το ζητούμενο γιατί $d_G(v) = d_G(v_j) = d$ και $dist_G(v, v_j) = 1$.
- **Περίπτωση 2:** Δεν υπάρχει γείτονας της v με βαθμό d. Τότε όλες οι γειτονικές κορυφές της v έχουν βαθμούς από το σύνολο $\{1, \ldots d-1\}$ (ξεκινάμε από το 1 γιατί όλες έχουν τουλάχιστον έναν γείτονα, τη v). Τότε η αρχή της περιστεροφωλλιάς μας δίνει ότι υπάρχουν $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ με $d_G(v_i) = d_G(v_j)$ και προφανώς $dist_G(v_i, v_j) = 2$, άρα έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 4) Έστω γράφημα $G = (V, E)$ για το οποίο ισχύει ότι $\forall v \in V$, $d(V) \geq 2$. Να αποδείξετε ότι το G περιέχει κύκλο.

Λύση)Έστω ότι το G δεν περιέχει κύκλο. Τότε το G είναι δάσος, δηλαδή οι συνεκτικές του συνιστώσες είναι δέντρα ("ορίσαμε" τι είναι συνεκτική συνιστώσα). Είναι εύκολο να δούμε ότι έχει μια τουλάχιστον μη τετριμμένη συνεκτική συνιστώσα C (δηλαδή $E(C) \neq \emptyset$). Τότε η C, ως δέντρο, περιέχει τουλάχιστον ένα φύλλο t και προφανώς $d_G(t) = 1$ (εξηγήσαμε γιατί το t δεν μπορεί να έχει γείτονες εκτός της C), άτοπο. Άρα το G περιέχει κύκλο.

Άσκηση 5) [ΔΥΣΚΟΛΗ] Να αποδείξετε ότι κάθε αυτομορφισμός ενός δέντρου διατηρεί μια κορυφή ή μια ακμή.

Λύση) Θα γράψουμε μια απόδειξη χωρίς πολλές λεπτομέρειες (οι οποίες αποδεικνύονται σχετικά εύκολα). Θα κάνουμε επαγωγή στο πλήθος n των κορυφών του δέντρου.

Βάση: n=1. Τότε υπάρχει ένας τετριμμένος αυτομορφισμός που αφήνει σταθερή τη μοναδική κορυφή του δέντρου.
Επαγωγική Υπόθεση: Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε δέντρο με το πολύ $k-1$ κορυφές.
Έστω δέντρο T με $|T|=k$ και έστω ένας αυτομορφισμός f του T. Συμβολίζουμε με Φ το σύνολο των φύλλων του T. Τότε για τον περιορισμό $g=f|_{\Phi}$ του f έχουμε ότι ο $g:\Phi\to\Phi$ και ότι g αυτομορφισμός του Φ και επίσης ότι για τον $h=f\setminus g$ ότι $h: V(T)\setminus\Phi\to V(T)\setminus\Phi$ και h αυτομορφισμός του $V(T)\setminus\Phi$. Αλλά $|V(T)\setminus\Phi|\leq k$ (γιατί το T έχει τουλάχιστον ένα φύλλο) ,άρα ο h, από επαγωγική υπόθεση, διατηρεί μια κορυφή ή μια ακμή και βάζοντας πάλι τα φύλλα στο T και επεκτείνοντας ξανά τον h στον f, έχουμε το ζητούμενο.