Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες.

Επώνυμο:

Όνομα:

ΑΜ:													

Βαθμοί

1α (2)	1β (2)	2 (3,5)	3 (3,5)	Σύνολο

Καλη Επιτυχια

Θέμα 1α [2 μονάδες].

Να αποδείξετε ότι το $(3n)!$ διαιρείται ακριβώς με 6^n.

Απάντηση: Αν έχουμε $3n$ αντικείμενα χωρισμένα σε n ομάδες με τρία ίδια η κάθε μία αντικείμενα, τότε ο τρόπος των διατάξεων των αντικειμένων αυτών είναι

$$\frac{(3n)!}{(3!)^n},$$

το οποίο, επομένως, είναι ακέραιος αριθμός.

Θέμα 1β [2 μονάδες]. Να αποδείξετε επιπλέον ότι το $(3n)!$ διαιρείται ακριβώς με $6^n n!$. *Σημείωση:* Αφήστε αυτό το θέμα για το τέλος.

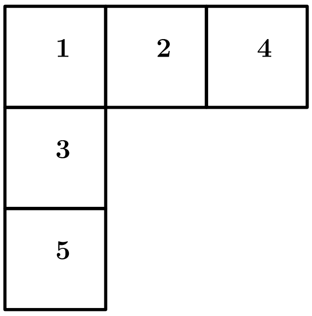
Απάντηση: Ο αριθμός στο προηγούμενο ερώτημα μετρά τις διατάξεις όταν οι ομάδες είναι διακεκριμένες. Όταν δεν είναι διακεκριμένες, ο αριθμός των διατάξεων γίνεται

$$\frac{(3n)!}{(3!)^n n!},$$

άρα και ο αριθμός αυτός πρέπει να είναι ακέραιος.

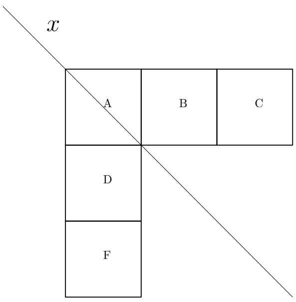
Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 2 [3.5 μονάδες]. Πέντε επίπεδα τετράγωνα έχουν συγκολληθεί σε σχήμα Γ όπως στο σχήμα.



Η κατασκευή περιστρέφεται ελεύθερα **στο χώρο** (με τα τετράγωνα να παραμένουν σταθερά συγκεκολλημένα μεταξύ τους στην ίδια διάταξη). Να υπολογιστεί με πόσους μη ισοδύναμους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τα πέντε τετράγωνα με τρία χρώματα (και οι δύο όψεις – εμπρός και πίσω– του κάθε τετραγώνου βάφονται με το ίδιο χρώμα και δεν ξεχωρίζουν). Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Pólya (απ' ευθείας μέτρηση δεν θα γίνει δεκτή). Να είστε σύντομοι. Μην κάνετε τις πράξεις μέχρι τέλους.

Απάντηση:



Οι μόνες συμμετρίες είναι η ταυτοτική με πέντε κύκλους μήκους 1 η κάθε μία, και η περιστροφή κατά π γύρω από τον άξονα στο διπλανό σχήμα, η οποία έχει έναν κύκλο μήκους 1 και δύο κύκλους μήκους 2. Επομένως το πολυώνυμο Pólya είναι το

$$(1/2)\left((x_1+x_2+x_3)^5+(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2\right).$$

Θέτοντας τώρα $x_1=x_2=x_3=1$, έχουμε ότι η απάντηση είναι $(1/2)(3^5+3^3)$.

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο

Θέμα 3 [3.5 μονάδες]. Θεωρήστε δύο σύνολα $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ και $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ με τέσσερα και τρία στοιχεία αντιστοίχως. Με τη μέθοδο του εγκλεισμού/αποκλεισμού να υπολογίσετε τον αριθμό των συναρτήσεων $f : A \overset{\text{επί}}{\mapsto} B$ οι οποίες είναι **επί** του B (άλλη μέθοδος πλην του εγκλεισμού/αποκλεισμού δεν θα γίνει δεκτή). Μην κάνετε τις πράξεις μέχρι τέλους, δώστε την απάντησή σας με τη μορφή αθροίσματος.
Υπόδειξη: Για $i = 1, 2, 3$, ας είναι C_i η συνθήκη ότι το b_i δεν περιέχεται στο πεδίο τιμών της f. Να υπολογίσετε το $N(\overline{C_1}\ \overline{C_2}\ \overline{C_3})$ δηλαδή τον αριθμό των συναρτήσεων που δεν ικανοποιούν τις συνθήκες C_1, C_2, C_3 (και επομένως είναι επί).

Απάντηση: Έχουμε ότι $N(C_1) = N(C_2) = N(C_3)$ είναι ο αριθμός των απεικονίσεων από ένα σύνολο με 4 στοιχεία σε ένα σύνολο με 2 στοιχεία, δηλαδή 2^4. Επίσης έχουμε ότι $N(C_1C_2) = N(C_1C_3) = N(C_2C_3)$ είναι ο αριθμός των απεικονίσεων από ένα σύνολο με 4 στοιχεία σε ένα σύνολο με ένα στοιχείο, δηλαδή $1^4 = 1$. Ακόμη $N(C_1C_2C_3) = 0$. Τέλος το N είναι ο αριθμός των απεικονίσεων από ένα σύνολο με 4 στοιχεία σε ένα σύνολο με τρία στοιχεία, δηλαδή 3^4. Επομένως από τον τύπο του εγκλεισμού/αποκλεισμού παίρνουμε ότι το ζητούμενο είναι

$$3^4 - \binom{3}{1}2^4 + \binom{3}{2}1 = 3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3.$$

.

Το πίσω μέρος της σελίδας είναι μόνο για πρόχειρο