

Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Σελίδες για πρόχειρο θα σας δοθούν χωριστά.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες (και ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο πρόχειρο).

Επώνυμο:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Όνομα:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ΑΜ:																	
-----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Βαθμοί

1α	1β	2	3	Σύνολο

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 1α [Δεν παίρνει μονάδες, αλλά μόνο αν είναι σωστό θα βαθμολογηθεί το δεύτερο ερώτημα αυτού του θέματος].

Έστω X υποσύνολο των φυσικών αριθμών με πληθάρημο $n \geq 1$ και k φυσικός με $1 \leq k$. Θεωρούμε τα εξής σύνολα:

- Το σύνολο A των τρόπων να τοποθετήσουμε k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές.
- Το σύνολο B των φθινουσών ακολουθιών (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) με k όρους από στοιχεία του X .
- Το σύνολο C των διατάξεων k στοιχείων του X με επανάληψη.

Κυκλώστε το σωστό, χωρίς αιτιολόγηση ούτε σχόλια:

1. Τα σύνολα A, B, C είναι ισοπληθικά.
2. Τα σύνολα A, B είναι ισοπληθικά και το C έχει πληθάρημο μικρότερο από αυτά.
3. Τα σύνολα A, B, C έχουν ανά δύο διαφορετικούς πληθάρημους.
4. Τα σύνολα A, C έχουν τον ίδιο πληθάρημο, αλλά το B έχει μικρότερο πληθάρημο από αυτά.
5. Τα σύνολα B, C έχουν τον ίδιο πληθάρημο, αλλά το A έχει μικρότερο πληθάρημο από αυτά.

Απάντηση: Σωστό σε αυτό το φύλλο θεμάτων είναι το (4) (η αρίθμηση διαφέρει από φύλλο σε φύλλο).

Εξήγηση (δεν σας ζητήθηκε). Υπάρχει προφανής 1–1 και επί αντιστοίχιση μεταξύ τοποθετήσεων k διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές και διατάξεων k στοιχείων του X με επανάληψη (αρκεί να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία του X με υποδοχές και στη συνέχεια να βάλουμε σε κάθε υποδοχή τα αντικείμενα που αντιστοιχούν στις θέσεις που η υποδοχή εμφανίζεται στη διάταξη. Άρα $|A| = |C|$. Το σύνολο B έχει μικρότερο πληθάρημο, διότι οι συνδυασμοί με επανάληψη είναι λιγότεροι από τις διατάξεις με επανάληψη.

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 1β [3,5 μονάδες]. Να γράψετε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των τρόπων να τοποθετήσουμε k διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές, με τον περιορισμό κάθε υποδοχή να δεχτεί άρτιο αριθμό αντικειμένων. Δίνεται ότι $k \geq n$. Μην υπολογίσετε το συντελεστή του x^k . Να είστε σύντομοι και σαφείς.

Υπόδειξη: Η εκθετική ΓΣ θα είναι ένα άπειρο άθροισμα στη δύναμη n .

Απάντηση: Η εκθετική γεννήτρια συνάρτηση δίνεται παρακάτω:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right)^n .$$

Ο εκθέτης n αντιστοιχεί στις υποδοχές. Ο εκθέτης $2i$ στον j -οστό παράγοντα της δύναμης εις την n αντιστοιχεί στην τοποθέτηση στην j -οστή υποδοχή $2i$ διακεκριμένων αντικειμένων. Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στο αποτέλεσμα δίνει την απάντηση.

Θέμα 2 [3,5 μονάδες]. Κύβος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα MM' , όπου M και M' τα κέντρα βάρους (σημεία τομής διαγωνίων), αντίστοιχα, δύο δεδομένων απέναντι εδρών. Να υπολογιστεί με πόσους μη ισοδύναμους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις έδρες του κύβου με τρία χρώματα. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Pólya (απ' ευθείας μέτρηση δε θα γίνει δεκτή). Να είστε σύντομοι.

Απάντηση: Έχουμε συνολικά έξι έδρες και τέσσερις συμμετρίες:

1. Την ταυτοτική, με δείκτρια συνάρτηση x_1^6
2. Την περιστροφή κατά π , με δείκτρια συνάρτηση την $x_1^2 x_2^2$
3. Τις δύο περιστροφές (αριστερά και δεξιά) κατά $\pi/2$ με δείκτρια συνάρτηση η κάθε μία $x_1^2 x_4$

Επομένως, αφού έχουμε τρία χρώματα, το πολυώνυμο Pólya είναι:

$$\frac{1}{4} \left((y_1 + y_2 + y_3)^6 + (y_1 + y_2 + y_3)^2 (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^2 + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 (y_1^4 + y_2^4 + y_3^4) \right).$$

Θέτουμε $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ για να βρούμε την απάντηση.

Θέμα 3 [3,5 μονάδες]. Σε κέντρο διασκέδασης υπάρχουν n τραπέζια κάθε ένα από τα οποία έχει ακριβώς ένα κάθισμα κενό (τα υπόλοιπα καθίσματα κάθε τραπέζιού είναι κατειλημμένα). Στο κέντρο εισέρχονται n νέοι πελάτες, οι οποίοι όμως είναι διατεθειμένοι να καθίσουν σε χωριστά τραπέζια μόνον εφ' όσον γνωρίζουν έναν τουλάχιστον από τους ήδη καθήμενους σε αυτό που θα τους τοποθετήσουν. Να αποδείξετε ότι εφ' όσον οι καθήμενοι σε οποιαδήποτε r από τα τραπέζια γνωρίζουν τουλάχιστον r από τους νεο-εισερχόμενους (για οποιοδήποτε $r \leq n$), το γκαρσόνι θα τα καταφέρει να τοποθετήσει τους νεο-εισερχόμενους, καθώς και το αντίστροφο.

Απάντηση: θεωρούμε διμερή γράφο που στο ένα μέρος του κορυφές είναι τα n τραπέζια και στο άλλο οι n νεο-εισερχόμενοι. Συνδέουμε κορυφή v που αντιστοιχεί σε τραπέζι με κορυφή w που αντιστοιχεί σε νεο-εισερχόμενο αν ο w έχει γνωστό στο v . Το γκαρσόνι θα εφαρμόσει το Θεώρημα του Γάμου για να βρει ένα τέλειο ταίριασμα μεταξύ τραπέζιών και νεο-εισερχομένων.

Για το αντίστροφο, αν υπάρχει ένα σύνολο με r τραπέζια των οποίων οι καθήμενοι γνωρίζουν λιγότερους από r νεο-εισερχόμενους, αναγκαστικά ένα από αυτά θα μείνει με κενό κάθισμα, και αφού οι νεο-εισερχόμενοι είναι όσα και τραπέζια, κάποιος θα μείνει όρθιος.