

Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Σελίδες για πρόχειρο θα σας δοθούν χωριστά.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες (και ονοματεπώνυμο και ΑΜ στο πρόχειρο).

Επώνυμο:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Όνομα:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| ΑΜ: | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Βαθμοί

| 1α | 1β | 2 | 3 | Σύνολο |
|----|----|---|---|--------|
| | | | | |

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 1α [Δεν παίρνει μονάδες, αλλά μόνο αν είναι σωστό θα βαθμολογηθεί το δεύτερο ερώτημα αυτού του θέματος].

Έστω X υποσύνολο των φυσικών αριθμών με πληθάρημο $n \geq 1$ και k φυσικός με $1 \leq k$. Θεωρούμε τα εξής σύνολα:

- Το σύνολο A των τρόπων να τοποθετήσουμε k μη διακεκριμένα αντικείμενα σε n διακεκριμένες υποδοχές.
- Το σύνολο B των φθινουσών ακολουθιών (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) με k όρους από στοιχεία του X .
- Το σύνολο C των διατάξεων k στοιχείων του X με επανάληψη.

Κυκλώστε το σωστό, χωρίς αιτιολόγηση ούτε σχόλια:

1. Τα σύνολα A, B, C είναι ισοπληθικά.
2. Τα σύνολα A, B είναι ισοπληθικά και το C έχει πληθάρημο μεγαλύτερο από αυτά.
3. Τα σύνολα A, B, C έχουν ανά δύο διαφορετικούς πληθάρημους.
4. Τα σύνολα A, C έχουν τον ίδιο πληθάρημο, αλλά το B έχει μεγαλύτερο πληθάρημο από αυτά.
5. Τα σύνολα B, C έχουν τον ίδιο πληθάρημο, αλλά το A έχει μεγαλύτερο πληθάρημο από αυτά.

Απάντηση: Σωστό σε αυτό το φύλλο θεμάτων είναι το (2) (η αρίθμηση διαφέρει από φύλλο σε φύλλο).

Εξήγηση (δεν σας ζητήθηκε). Υπάρχει προφανής 1–1 και επί αντιστοίχιση μεταξύ τοποθετήσεων k μη διακεκριμένων αντικειμένων σε n διακεκριμένες υποδοχές και φθινουσών ακολουθιών (όχι κατ' ανάγκη γνησίως) με k όρους από στοιχεία του X (αρκεί να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία του με υποδοχές και στη συνέχεια να βάλουμε σε κάθε υποδοχή τόσα αντικείμενα όσες φορές εμφανίζεται το αντίστοιχο στοιχείο του X στην ακολουθία. Άρα $|A| = |B|$. Το σύνολο C έχει μεγαλύτερο πληθάρημο, διότι οι διατάξεις είναι περισσότερες από τις φθίνουσες ακολουθίες.

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 1β [3,5 μονάδες]. Να γράψετε τη γεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των τρόπων να γράψουμε ένα περιττό φυσικό $n \geq 1$ ως άθροισμα άλλων φυσικών ≥ 1 , χωρίς να «μετρά» η σειρά, αλλά με τον περιορισμό στο άθροισμα οι άρτιοι όροι να εμφανίζονται άρτιες φορές ο καθένας και οι περιττοί περιττές φορές ο καθένας. Να δώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση σε απλοποιημένη μορφή με χρήση γινομένων με άπειρους παράγοντες, αλλά μην υπολογίσετε το συντελεστή του x^n (παρόμοια με τη ΓΣ του αριθμού των διαμερίσεων ενός φυσικού). Να είστε σύντομοι και σαφείς.

Απάντηση: Ο παράγοντας της ΓΣ που αντιστοιχεί στην εμφάνιση του 2 στο άθροισμα άρτιες φορές είναι:

$$1 + x^{2 \cdot 2} + x^{4 \cdot 2} + x^{6 \cdot 2} \dots = \frac{1}{1 - x^{2 \cdot 2}}.$$

Γενικά ο παράγοντας της ΓΣ που αντιστοιχεί στην εμφάνιση του $2i$ ($i \geq 1$) άρτιες φορές στο άθροισμα είναι:

$$1 + x^{2 \cdot 2i} + x^{4 \cdot 2i} + x^{6 \cdot 2i} \dots = \frac{1}{1 - x^{2 \cdot (2i)}}.$$

Ο παράγοντας της ΓΣ που αντιστοιχεί στην εμφάνιση του 1 στο άθροισμα περιττές φορές είναι

$$\begin{aligned} & x^{1 \cdot 1} + x^{3 \cdot 1} + x^{5 \cdot 1} + \dots \\ &= (1 + x^{1 \cdot 1} + x^{2 \cdot 1} + x^{3 \cdot 1} + \dots) - (1 + x^{2 \cdot 1} + x^{4 \cdot 1} + x^{6 \cdot 1} + \dots) \\ &= \frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Γενικά, ο παράγοντας της ΓΣ που αντιστοιχεί στην εμφάνιση του $2i-1$ ($i \geq 1$) στο άθροισμα περιττές φορές είναι

$$\begin{aligned} & x^{1 \cdot (2i-1)} + x^{3 \cdot (2i-1)} + x^{5 \cdot (2i-1)} + \dots \\ &= (1 + x^{1 \cdot (2i-1)} + x^{2 \cdot (2i-1)} + x^{3 \cdot (2i-1)} + \dots) - (1 + x^{2 \cdot (2i-1)} + x^{4 \cdot (2i-1)} + x^{6 \cdot (2i-1)} + \dots) \\ &= \frac{1}{1 - x^{2i-1}} - \frac{1}{1 - x^{2 \cdot (2i-1)}} = \frac{x^{2i-1}}{1 - x^{2 \cdot (2i-1)}}. \end{aligned}$$

Άρα η ΓΣ που ζητάμε είναι:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - x^{2 \cdot (2i)}} \frac{x^{2i-1}}{1 - x^{2 \cdot (2i-1)}} \right).$$

Μη γράφετε στο πίσω μέρος της σελίδας

Θέμα 2 [3,5 μονάδες]. Κανονικό τετράεδρο $ABCD$ (στερεό με τέσσερις έδρες που είναι ισόπλευρα τρίγωνα) περιστρέφεται γύρω από τον άξονα AM όπου M το κέντρο βάρους (σημείο τομής διαμέσων) του τριγώνου BCD . Να υπολογιστεί με πόσους μη ισοδύναμους τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του τετράεδρου με δύο χρώματα, με τον περιορισμό ένα χρώμα (οποιοδήποτε) να εμφανιστεί ακριβώς μία φορά. Να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Ρόλγα (απ' ευθείας μέτρηση δε θα γίνει δεκτή). Να είστε σύντομοι.

Απάντηση: Οι συμμετρίες εκτός από την ταυτοτική είναι οι δύο περιστροφές κατά $2\pi/3$ και $4\pi/3$ γύρω από τον άξονα AM . Η δείκτρια συνάρτηση της ταυτοτικής είναι y_1^4 ενώ κάθε μία από τις δύο περιστροφές έχει δείκτρια $y_1 y_3$. Επομένως το πολυώνυμο Ρόλγα για δύο χρώματα είναι

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2)^4 + 2(x_1 + x_2)(x_1^3 + x_2^3)].$$

Πρέπει να βρούμε τα άθροισμα των συντελεστών των $x_1 x_2^3$ και $x_1^3 x_2$ στο παραπάνω πολυώνυμο ή λόγω συμμετρίας να διπλασιάσουμε το συντελεστή του $x_1 x_2^3$. Ο ευκολότερος τρόπος για να βρούμε το συντελεστή του $x_1 x_2^3$ είναι να υπολογίσουμε το $\frac{\partial P}{\partial x_1}(0, 1)$. Έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{3}[4(x_1 + x_2)^3 + 2(x_1^3 + x_2^3) + 6x_1^2(x_1 + x_2)].$$

Άρα

$$\frac{\partial P}{\partial x_1}(0, 1) = 2$$

και η απάντηση που ζητάμε είναι 4.

Θέμα 3 [3,5 μονάδες]. Έστω γράφος $G = (V, E)$ με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E . Λέμε ότι ένα υποσύνολο κορυφών $X \subseteq V$ είναι προσιτό από κορυφή v (μέσω μίας ακμής) αν υπάρχει ακμή $\{v, w\} \in E$ με $w \in X$. Έστω τώρα X_1, \dots, X_n μία οικογένεια υποσυνόλων του V τέτοια ώστε για κάθε υποοικογένεια X_{i_1}, \dots, X_{i_r} , με $r \leq n$, το σύνολο $\cup_{s=1}^r X_{i_s}$ είναι προσιτό από τουλάχιστον r κορυφές. Να δείξετε ότι υπάρχουν n κορυφές v_1, \dots, v_n ανά δύο διαφορετικές έτσι ώστε το X_i είναι προσιτό από τη v_i , $i = 1, \dots, n$.

Απάντηση: Θεωρούμε διμερή γράφο του οποίου το ένα μέρος A έχει κορυφές το σύνολο X_1, \dots, X_n και το δεύτερο μέρος B έχει ως κορυφές τις κορυφές V του αρχικού γράφου G . Συνδέουμε με ακμή ένα σύνολο X_i στο μέρος A με μία κορυφή v_j στο μέρος B αν το X_i είναι προσιτό από τη v_j . Ας θεωρήσουμε τώρα $S = \{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}\}$ υποσύνολο του μέρους A . Είναι φανερό ότι τα στοιχεία του $\Gamma(S)$, δηλαδή οι κορυφές του μέρους B από τις οποίες κάποιο στοιχείο του S είναι προσιτό, ταυτίζονται με τις κορυφές του μέρους B από τις οποίες το $\cup_{s=1}^r X_{i_s}$ είναι προσιτό. Επομένως σύμφωνα με την υπόθεση, $|\Gamma(S)| \geq |S|$, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις για το θεώρημα Hall, άρα προκύπτει το ζητούμενο.